Ueber cyklisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume.

Von J. LÜROTH in Karlsruhe.

In einer Arbeit, die im XI. Bande dieser Annalen erschienen ist, habe ich auf geometrischem Wege einige Eigenschaften der cyklisch-projectivischen Punktgruppen auf einer geraden Linie abgeleitet. Die gegenwärtige Abhandlung behandelt die allgemeinere Frage nach den cyklisch-projectivischen Punktgruppen in der Ebene und im Raume und löst die Aufgabe: *in der Ebene (oder im Raume) n reelle Punkte $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ so zu bestimmen, dass es projectivische Transformationen der Ebene (resp. des Raumes) giebt, welche a_1 in a_2 , a_2 in a_3 , $\dots$ a_n in a_1 überführen.* Ich werde eine projectivische Transformation der Ebene oder des Raumes (und nur von projectivischen Transformationen ist im Folgenden die Rede), welche die Punkte $abc\dots$ in die Punkte $a'b'c'\dots$ überführt, künftig als die Transformation $[abc\dots; a'b'c'\dots]$ bezeichnen. Statt des Zeichens $a_1 a_2 \dots; a_{p+1} a_{p+2} \dots$ werde ich aber auch die einfacheren $[a_i, a_{i+p}]$ oder $[i, i+p]$ benützen. Hier, wie im Folgenden stets, ist unter einem Index, der $> n$ ist, sein Rest nach dem Modul n zu verstehen. Ich benutze bei den Ableitungen auch imaginäre Elemente, die ich aber stets als solche ausdrücklich bezeichne.

1) Haben die n Punkte $a_1, a_2, \dots, a_n$ eine solche Lage, dass eine Transformation $[i, i+1] = T$ existirt und man wendet dieselbe zweimal an, so entsteht die Transformation $[i, i+2] = T^2$, eine weitere Anwendung liefert die Umformung $[i, i+3] = T^3$, u. s. w., so dass allgemein die Punkte eine Transformation $T^p = [i, i+p]$ zulassen. Die Transformation $T^n = [i, i+n] = [i, i]$ lässt jeden der Punkte $a_1, a_2, \dots, a_n$ unverändert und folglich überhaupt jeden Punkt in der Ebene oder im Raume, wenn man von besonderer, nachher auszu-schliessenden, Lagen der Punkte absieht. Gesetzt aber es gäbe eine Potenz von T mit einem Exponenten $q < n$, welche $= [i, i]$ wäre; dann müssten die Punkte $a_{q+1}, a_{q+2}, \dots, a_q$, welche durch T^q aus $a_1, a_2, \dots, a_n$

hervorgehen, der Reihe nach mit $a_1 a_2 \dots a_n$ identisch sein, und es könnten also die Punkte $a_1 \dots a_n$ nicht alle unter sich verschieden sein. Vielmehr würden dann nur die Punkte $a_1 a_2 \dots a_q$ in der That verschieden sein, und die übrigen mit diesen zusammenfallen, so dass $a_{q+1} = a_1, a_{q+2} = a_2, \dots a_n = a_q$ wäre. Dies verlangt, dass q ein Theiler von n und $n = pq$ ist. Seien umgekehrt von der Gruppe nur die Punkte $a_1 a_2 \dots a_q$ von einander verschieden. Durch T gehen aus ihnen die $a_2 a_3 \dots a_{q+1}$ hervor. Wäre nun a_{q+1} nicht mit a_1 , sondern mit einem andern der q Punkte z. B. a_{i+1} identisch, so müssten beide vermöge T aus demselben Punkte hervorgegangen sein d. h. es müssten, gegen die Annahme, a_q und a_i identisch sein. Es muss also $a_{q+1} = a_1$ sein und daraus folgt, dass $a_{q+2} = a_2 \dots$ allgemein $a_{r q + s} = a_s$ sein muss, und dass die Punkte, deren Indices Vielfache von q sind, die einzigen sind, welche durch T in a_1 übergeführt werden. Da dies von a_n angenommen ist, muss n durch q theilbar sein; es hat demnach T die Eigenschaft, dass $T^q = |i, i|$ ist. Dann ist aber $T = |a_1 a_2 \dots a_q; a_2 a_3 \dots a_1|$ und die Punkte $a_1 a_2 \dots a_q$ bilden eine cyklisch-projectivische Gruppe. Diese letzteren Betrachtungen gelten ebenso, wenn $a_1 a_2 \dots a_n$ Punkte einer Punktreihe, oder Strahlen eines Strahlenbüschels oder Ebenen eines Ebenenbüschels vorstellen, und in der That werden wir auch bei solchen Gebilden davon Gebrauch zu machen haben, während wir für die Hauptaufgabe das Vorkommen dieser Ausnahme dadurch ausschliessen, dass wir annehmen, die zu suchenden Punkte seien alle verschieden von einander.

I. Punktgruppen in der Ebene.

2) Da eine projectivische Transformation einer Ebene in sich selbst bestimmt ist, wenn 4 Paare sich entsprechender Punkte gegeben sind, so müssen erst 5 Punkte eine gewisse Bedingung erfüllen, wenn sie eine cykl.-proj. Gruppe bilden sollen und wir schliessen deshalb die Fälle $n \leq 4$ hier aus. Wenn nun für die Punkte $a_1 a_2 \dots a_n$ ($n \geq 5$) einer Ebene eine Transformation $T = |i, i+1|$ existirt, so giebt es, wie bei jeder projectivischen Transformation einer Ebene in sich, jedenfalls einen Punkt A , und eine Gerade g , die in sich selbst übergeführt werden oder Doppelemente der Transformation sind*). Wenn wir hier und im Folgenden den schon früher erledigten Fall ausschliessen, dass die ganze Gruppe auf einer Geraden liegt, so kann g nicht durch A gehen. Denn da vermöge T der Büschel $A(a_1 a_2 \dots a_n) \cap A(a_2 a_3 \dots a_1)$ ist, also die Strahlen $A(a_1 \dots a_n)$ eine cyklisch-projectivische Gruppe bilden, so kann kein Strahl von A durch T in sich übergeführt wer-

*) Vergl. v. Standt, Geometrie der Lage. Seite 169, No. 294.

den, weil sonst die zur Gruppe gehörige Transformation schon ein Doppелеlement hätte, was nicht möglich ist, wenn $n \leq 3$ ist*).

3) Es kann aber vorkommen, dass der Büschel $A(a_1 a_2 \dots a_n)$ nicht aus n , sondern aus weniger von einander verschiedenen Strahlen besteht. Nun kann auf einem Strahle Aa_i nicht auch der Punkt a_{i+1} liegen. Denn sonst würde T zeigen, dass auf dem Strahle $Aa_{i+1} = Aa_i$ auch $a_{i+2}, a_{i+3} \dots$ lägen, d. h., dass er die ganze Gruppe enthalten würde, einen Fall, den wir ausgeschlossen haben. Es müssen also Aa_1 und Aa_2 verschieden sein. Angenommen es wären nur $Aa_1, Aa_2, \dots, Aa_q$ unter sich verschieden, so würde gemäss den Erörterungen in No. 1) die Transformation T den Büschel $A(a_1 a_2 \dots a_q)$ in $A(a_2 a_3 \dots a_1)$ überführen. Aber auch diese Gruppe ist eine cyclische und folglich existirt kein sich selbst entsprechender Strahl, ausser wenn $q = 2$ ist, wobei die Transformation T die Strahlen des Büschels A involutorisch paart. In diesem Falle aber, der nur eintreten kann, wenn n gerade, $= 2p$, ist, besteht die ganze Strahlengruppe $A(a_1 \dots a_n)$ nur aus zwei Strahlen $Aa_1 = g_1$ und $Aa_2 = g_2$, von welchen einer g_1 die Punkte $a_1 a_3 \dots a_{2p-1}$, der zweite g_2 die Punkte $a_2 a_4 \dots a_{2p}$ trägt. Da die Transformation $T^2 = [i, i+2]$ die Punkte $a_1 a_3 \dots a_{2p-1}$ der Reihe nach in $a_3 a_5 \dots a_1$ überführt, so bilden diese Punkte auf g_1 eine cyclisch-projectivische Gruppe. Weil aber T den Punkt A ungeändert lässt, gilt dasselbe bei T^2 und somit wird bei der, zu einer cykl.-proj. Gruppe einer Geraden gehörenden, Transformation T^2 ein Punkt A dieser Geraden nicht verändert. Dies kann aber nur stattfinden, wenn die Anzahl der Punkte der Gruppe < 3 ist, und verlangt folglich, dass hier $p = 2$ sei, wobei die ganze Gruppe aus $2 \cdot p = 4$ Punkten bestehen würde. Da dieser Fall nicht eintreten kann, weil wir $n \geq 5$ angenommen haben, so kann also niemals eine Doppellinie der Transformation durch A gehen.

4) Hieraus folgt einerseits, dass g nicht durch A gehen kann, andererseits, dass auf g kein reeller Doppelpunkt liegen kann; denn ein solcher würde eine durch A gehende Doppellinie liefern. Dagegen liegen auf g zwei conjugirt imaginäre Doppelpunkte B und Γ der Transformation T .

Es sei nun K_1 der reelle Kegelschnitt, der in B und Γ die Linien AB und $A\Gamma$ berührt und durch den Punkt a_1 geht. Die Transformation T führt diesen in einen Kegelschnitt K_2 über, der ebenfalls AB und $A\Gamma$ in B und Γ berührt, aber durch a_2 geht. Beide Kegelschnitte haben entweder, weil sie in denselben Punkten dieselben Geraden berühren, keinen weiteren Punkt gemein, oder sie müssen ganz zu-

*) Vergl. Annalen Bd. XI, Seite 90, No. 5.

sammenfallen. Im letzteren Falle zeigt die Anwendung von T , dass auch $a_3 \cdots a_n$ auf demselben Kegelschnitt K_1 liegen müssen. Liegt aber a_2 nicht auf K_1 , sondern z. B. im Innern desselben, so muss, weil beide Kegelschnitte sich nicht schneiden, der ganze Kegelschnitt K_2 im Innern von K_1 liegen. Aus a_2 lässt T den Punkt a_3 hervorgehen, der dann im Innern von K_2 und daher auch von K_1 gelegen ist. Indem man so weiter schliesst, findet man, dass auch a_n innerhalb K_1 gelegen ist und daraus, durch Anwendung der Umformung, dass a_1 im Innern von K_2 liegt. Dies widerspricht der Annahme, dass a_2 und damit K_2 innerhalb K_1 , also a_1 ausserhalb K_2 gelegen ist. Da man die Annahme, a_2 liege im Aeusseren von K_1 , genau ebenso wiederlegen kann, so ist bewiesen, dass alle Punkte der Gruppe auf einem Kegelschnitt liegen. Wir können also sagen: *eine cyklisch-projectivische Gruppe von mindestens fünf Punkten in einer Ebene liegt entweder auf einer Geraden oder auf einem Kegelschnitt.*

5) Sei die Gruppe auf einem Kegelschnitt gelegen, B irgend ein Punkt desselben, und C der ihm in der projectivischen Beziehung entsprechende, so ist $B(a_1 a_2 \cdots a_n) \cap C(a_2 a_3 \cdots a_1) \cap B(a_2 a_3 \cdots a_1)$ und es bildet also dann die Gruppe $a_1 a_2 \cdots a_n$ eine cyklisch-projectivische Gruppe von n Punkten auf dem Kegelschnitt. In meiner früheren Arbeit (Bd. XI, Seite 95, No. 10) habe ich gezeigt, dass, wenn n Punkte eines Kegelschnitts eine cykl.-proj. Gruppe bilden, sie auch noch in anderer Anordnung eine solche Gruppe bilden, in jeder nämlich, in welcher die Indices der Punkte eine arithmetische Reihe bilden. Sei $a'_1 a'_2 \cdots a'_n$ eine derartige zweite Anordnung der Punkte, so giebt es für die Punkte des Kegelschnittes eine Transformation $|a'_i, a'_{i+1}|$. Man kann aber stets eine projectivische Umformung der Ebene eines Kegelschnittes in sich selbst herstellen, bei welcher der Kegelschnitt sich selbst entspricht, und die dessen Punkte nach demselben Gesetz verändert wie die gegebene Transformation. Bezeichnet man mit a_3'' den Schnittpunkt der Tangenten in a'_1 und a'_2 , und mit a_5'' den der Tangenten in a'_2 und a'_3 , so ist diese Transformation für unseren Fall

$$|a'_1 a'_2 a'_3 a_3''; a'_2 a'_3 a'_4 a_5''|,$$

und diese stellt somit eine Transformation der Ebene dar, die durch $|a'_i, a'_{i+1}|$ bezeichnet werden kann. Folglich ist eine cykl.-proj. Gruppe in einer Ebene, nicht nur in einer, sondern in jeder Anordnung cykl.-proj., in der die Indices der Punkte eine arithmetische Reihe bilden.

6) Die Transformation $T^k = |i, i+k|$ führt jeden Punkt der Gruppe in einen andern über, und lässt, wie T , den Punkt A und die Gerade g unverändert. Man kann aber zeigen, dass auch bei der Umformung T^k , A der einzige nicht in g gelegene Doppelpunkt ist.

Ist n ungerade, so sind nach dem in Nr. 1) Bemerkten alle Strahlen des Büschels $A(a_1 a_2 \dots a_n)$ von einander verschieden, weil auf jedem Strahle höchstens zwei Punkte liegen können, und bilden eine cykl.-proj. Gruppe. Die Transformation T^* lässt aus ihnen die $A(a_{k+1} a_{k+2} \dots a_k)$ hervorgehen; dabei aber kann, wie Bd. XI, Seite 93, Nr. 8, bewiesen ist, kein Strahl unverändert bleiben. Ist dagegen n gerade, $= 2q$, so ist $a_1 a_{q+1}, a_2 a_{q+2}, \dots$ eine Involution auf dem Kegelschnitt, und es gehen $a_1 a_{q+1}, a_2 a_{q+2}, \dots$ alle durch denselben Punkt. Weil aber durch die Umformung T der Schnittpunkt von $a_1 a_{q+1}$ mit $a_2 a_{q+2}$ in den der Linien $a_2 a_{q+2}$ und $a_3 a_{q+3}$ übergeht, so entspricht der Mittelpunkt der Involution sich selbst, und ist also der Punkt A . Der Büschel A enthält daher für $n = 2q$ nur die Strahlen $A(a_1 a_2 \dots a_q)$, die nach Nr. 1) eine cykl.-proj. Gruppe bilden. Die Umformung T^k liefert daraus die Strahlen $A(a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{q+k})$; so lange diese von jenen verschieden sind, kann kein Doppelstrahl existiren. Dagegen werden für $k = q$ beide Büschel identisch, und dann schneidet also der ursprüngliche und der abgeleitete Büschel die Linie g in denselben Punkten, die sich selbst entsprechen müssen. Weil $n \geq 5$ sein soll, ist $q \geq 3$, daher ist die Zahl der auf g sich selbst entsprechenden Punkte mindestens gleich drei, und folglich entspricht jeder Punkt von g , und damit jeder Strahl von A , sich selbst. Die Umformung T^2 ist sonach eine projectivische, und, weil die Punkte a_1 und a_{q+1} sich abwechselnd entsprechen, eine involutorische. Ausser dem Inversionscentrum A und den Punkten der Involutionsaxe g können aber keine Doppelpunkte existiren. In den vorher betrachteten beiden Fällen dagegen kann überhaupt ausser A kein weiterer Doppelpunkt existiren, weil sonst auch ein durch A gehender Doppelstrahl vorhanden sein würde.

7) Sei nun b_1 irgend ein anderer Punkt der Ebene, der aber nicht der Gruppe $a_1 \dots a_n$ angehört, noch auch mit A zusammenfällt oder auf g liegt. Wenn die Umformungen $T, T^2 \dots$ aus ihm die Punkte $b_2 b_3 \dots b_n$ hervorgehen lassen, so hat man eine Gruppe $b_1 b_2 b_3 \dots b_n$, welche T in $b_2 b_3 \dots b_1$ überführt. Keiner dieser Punkte kann mit einem der Punkte a identisch sein. Wäre nämlich b_k etwa $= a_i$, so würde die Transformation T nach $n - k + 1$ maliger Anwendung aus b_k den Punkt b_1 und aus a_i einen anderen Punkt der Gruppe hervorgehen lassen, und diese müssten, unserer Annahme entgegen, identisch sein. Die n Punkte b müssen aber auch unter sich verschieden sein, denn wenn $b_{k+1} = b_1$ wäre, so wäre auch $b_{k+2} = b_2$ u. s. w., und die Umformung T^* würde die Gruppe $b_1 b_2 \dots b_k$ in $b_1 b_2 \dots b_k$ überführen, so dass diese Punkte Doppelpunkte der Transformation T^* wären. Dies ist nach dem Vorigen nur möglich, wenn es Punkte von g sind, und dies ist nicht der Fall, weil b_1 nicht auf g liegen sollte.

Es bilden also die Punkte $b_1, b_2 \dots b_n$ eine neue cykl.-proj. Gruppe von n Punkten, die durch dieselbe Transformation T cyklisch vertauscht werden. Dies gilt auch noch, wenn b_1 der Linie g angehört und erleidet in diesem Falle nur eine Ausnahme, wenn $n = 2q$ ist. Weil dann nämlich schon die Umformung T^2 die Punkte von g nicht ändert, besteht die aus b_1 hervorgehende Gruppe nur aus q Punkten.

8) Auf jede Gruppe, die auf die angegebene Art aus einem Punkte der Ebene abgeleitet wurde, lässt sich, wofern sie nicht ganz auf einer Geraden, und zwar dann auf g liegt, die frühere Untersuchung anwenden, und so findet sich, dass jede solche Gruppe auf einem Kegelschnitt liegt, und dass alle diese Kegelschnitte in den imaginären Punkten B und Γ von g die Linien AB und $A\Gamma$ berühren. Für alle diese Gruppen ist g „die zu der Gruppe gehörige Linie“ im Sinne der Nr. 11) der früheren Abhandlung. Denn bezeichnet man mit p_1 den Schnittpunkt der Linien $a_1 a_n$ und $a_2 a_{n-1} \dots$ mit p_2 den der Linien $a_2 a_n, a_3 a_{n-1} \dots$, mit p_3 den der Linien $a_1 a_2, a_3 a_n \dots$ und endlich mit p_4 den der Linien $a_3 a_1, a_4 a_n \dots$, welche Punkte alle auf der zur Gruppe gehörigen Linie liegen, so entsprechen vermöge T den Punkten $p_1 p_2$ resp. die $p_3 p_4$, und also die Linie $p_1 p_2$ sich selbst. Da g allein bei der Umformung T sich selbst entspricht, so muss es die zur Gruppe gehörige Linie sein. Wählt man den Punkt b_1 , von dem aus eine neue Gruppe $b_1 b_2 \dots b_n$ construiert werden soll, auf der Linie Aa_1 , so liegt b_2 auf $Aa_2, \dots b_n$ auf Aa_n . Daraus folgt, dass man die sämtlichen Gruppen erhält, deren Punkte durch die Transformation $|a_i a_{i+1}|$ cyklisch vertauscht werden, wenn man auf einem der erwähnten Kegelschnitte alle derartigen Gruppen construiert, und sie dann von A aus auf alle übrigen Kegelschnitte projicirt. Wird g die unendlich ferne Gerade, so wird A der Mittelpunkt von Kegelschnitten, die dieselben imaginären Asymptoten haben, also der Mittelpunkt von concentrischen und ähnlichen Ellipsen. Ein specieller Fall davon sind concentrische Kreise, auf welchen die Ecken der eingeschriebenen regulären n Ecke die Punkte der Gruppen bilden.

II. Punktgruppen im Raume.

9) Indem wir uns zur Aufsuchung der cyklisch-projectivischen Punktgruppen $a_1 a_2 \dots a_n$ ($n \geq 6$) im Raume wenden, suchen wir diejenigen Elemente des Raumes auf, welche bei der Transformation $T = |i, i+1|$ des Raumes sich nicht ändern. Es sind im Allgemeinen 13 verschiedene Fälle möglich, die v. Staudt in den Beiträgen zur Geometrie der Lage § 35. Seite 328 ff. beschrieben hat. Wir wollen hier von diesen Resultaten keinen Gebrauch machen, sondern nur den dort in Nr. 508 bewiesenen Satz benützen, dass zwei projectivische

Räume jedenfalls einen reellen oder imaginären Punkt entsprechend gemein haben. Führt die Transformation T einen reellen Punkt in sich über, so führt sie auch den Strahlenbündel dieses Punktes in sich selbst über. Wenn aber zwei projectivisch bezogene Strahlenbündel ineinander liegen, so haben sie sicher mindestens einen Strahl entsprechend gemein. Folglich geht dann durch jenen Punkt ein reeller sich selbst entsprechender Strahl. Ist dagegen der Doppelpunkt von T imaginär, so muss sein reeller Träger sich selbst entsprechen. Denn da jedem reellen Punkt wieder ein solcher entsprechen soll, so muss dieser reellen Geraden wieder eine reelle Gerade entsprechen, und da sie ferner durch den Doppelpunkt gehen soll, so wird sie durch T in die einzige, den Doppelpunkt enthaltende, reelle Gerade, nämlich dessen reellen Träger, übergeführt, der sich also selbst zugeordnet ist. *Wenn daher zwei Räume reell projectivisch sind, so haben sie jedenfalls eine reelle Gerade entsprechend gemein.*

10) Sei nun A diese jedenfalls existirende Gerade, welche durch T in sich übergeht (oder wenn es deren mehrere giebt, eine von ihnen). Wie oben in Nr. 3) kann man dann beweisen, dass durch A nur dann eine Doppelebene gehen kann (wenn nicht die ganze Gruppe in einer Ebene gelegen ist), wenn alle Punkte der Gruppe sich auf zwei Ebenen vertheilen, so dass auf der einen E_1 die Punkte $a_1 a_2 \dots$, auf der zweiten E_2 die Punkte $a_2 a_1 \dots$ liegen, was nur bei geraden $n = 2p$, stattfinden kann, und wobei dann T die Ebenen E_1 und E_2 vertauscht. Dann ist aber die durch T im Ebenenbüschel A hervor-gebrachte Umformung eine involutorische und es existiren zwei Doppelenen, wenn überhaupt reelle vorhanden sind. Es sind also die beiden Fälle möglich:

- a) Der Büschel A hat zwei reelle Doppelebenen E_1, E_2 , und alle Punkte der Gruppe liegen auf zwei Ebenen, so dass von den $n = 2p$ Punkten auf jeder Ebene p liegen; oder
- b) Der Büschel A hat keine reellen, sondern zwei conjugirt imaginäre Doppelebenen.

11) Die Linie A wird nun von jeder der Ebenen $a_1 a_2 a_3, a_2 a_3 a_4 \dots$ geschnitten. Denn würde eine von ihnen die Linie ganz enthalten, so würden sie alle A enthalten, weil sie durch T in einander übergehen, während A ungeändert bleibt. Dann wären aber die beiden Ebenen $a_1 a_2 a_3$ und $a_2 a_3 a_4$ nicht verschieden (wenn wir annehmen, dass keiner der Punkte der Gruppe auf A liegt; und wenn einer auf A läge, würde die ganze Gruppe auf A liegen), und die ganze Gruppe würde eben sein. Bezeichnen wir aber den Schnittpunkt der Ebene $a_1 a_2 a_3$ und der Linie A mit b_2 , den der Ebene $a_2 a_3 a_4$ und A mit $b_3 \dots$ u. s. w., so geht die Punktreihe $b_1 b_2 b_3 \dots b_n$ durch die Umformung T in die Reihe $b_2 b_3 \dots b_1$ über, und diese n Punkte bilden

also eine cyklisch-projectivische Gruppe. Die Anzahl der von einander verschiedenen Punkte dieser Gruppe ist sicher grösser als Eins. Denn wären alle Punkte mit demselben Punkte b identisch, so würden die Punkte ba_2a_3 gleichzeitig auf zwei Ebenen, also auf einer Geraden liegen müssen, ebenso ba_3a_4 , so dass $a_2a_3a_4$ auf einer Geraden lägen und die ganze Gruppe gerade wäre.

Ist q die Anzahl der verschiedenen Punkte, so kann man wie in Nr. 1) zeigen, dass q ein Theiler von n sein muss und dass diese q Punkte wieder durch T cyklisch vertauscht werden. Daraus folgt, dass nur dann auf A ein Doppelpunkt der Transformation liegen kann, wenn $q = 2$, $n = 2p$ ist. Die Umformung vertauscht dann die beiden Punkte unter sich, und ist also für die Linie A eine involutorische, die entweder zwei oder keine Doppelpunkte besitzt. Hienach sind zwei Fälle möglich:

c) Die Punktreihe A hat zwei reelle Doppelpunkte, und alle Ebenen wie $a_na_1a_2$, $a_1a_2a_3$, $\dots$ der Gruppe gehen durch zwei Punkte von A , so dass von den $n = 2p$ Ebenen durch jeden Punkt p gehen; oder

d) Die Punktreihe A hat zwei imaginäre Doppelpunkte.

Aehnliches gilt natürlich für jede andere sich selbst entsprechende reelle Linie, die ausser A noch vorhanden ist.

Wenn wir von der Linie A ausgehen, so kann jeder der beiden Fälle von Nr. 10) mit jedem der beiden obigen sich combiniren, so dass im Ganzen 4 Möglichkeiten zu untersuchen sind, die wir mit den Zeichen ac , bc , ad und bd bezeichnen wollen.

12) *Fall ac.* Der Ebenenbüschel A hat zwei reelle Doppel Ebenen E_1 und E_2 , und die Punktreihe zwei reelle Doppelpunkte P_1 und P_2 . Jedem Punkt von E_1 z. B. wird durch T wieder ein Punkt von E_1 zugeordnet. Wenn aber eine projectivische Umformung einer Ebene nur zwei Punkte P_1P_2 einer Linie A ungeändert lässt, so lässt sie entweder*) noch einen dritten Punkt der Ebene unverändert; oder eine gerade Linie, die entweder durch P_1 oder durch P_2 geht und keinen weiteren Doppelpunkt enthält; oder eine gerade Linie, die entweder durch P_1 oder durch P_2 geht und in der jeder Punkt sich selbst entspricht. Wie aber in Nr. 10) bewiesen ist, kann eine sich selbst entsprechende Gerade, in dem hier vorliegenden Falle, entweder zwei oder keinen reellen Doppelpunkt enthalten, und folglich sind die beiden zuletzt angeführten Fälle nicht statthaft. Somit muss die Ebene E_1 noch einen Doppelpunkt P_3 und ebenso die E_2 noch einen Doppelpunkt P_4 enthalten. Bei der Transformation T bleibt also das Tetraeder

*) Vergl. v. Staudt, Geom. d. Lage, Seite 169, Nr. 294.

$P_1 P_2 P_3 P_4$ unverändert. Da durch jede Kante zwei Doppel-
 ebenen gehen, so muss nach der in Nr. 10) bei a) gemachten
 Bemerkung die ganze Gruppe auf zwei durch jene Kanten gehenden
 Ebenen liegen, von welchen eine die Punkte $a_1 a_3 \dots$, die andere die
 $a_2 a_4 \dots$ enthält. Da dies für jede Kante gilt, so müssen die Punkte
 $a_1 a_3 \dots$ auf 6 Ebenen gelegen sein, von welchen eine durch jede Kante
 geht, und ebenso $a_2 a_4 \dots$ auf 6 andern Ebenen. Dies geht nur an,
 wenn die ganze Gruppe aus den beiden Punkten a_1 und a_2 besteht.

13) *Fall ad.* Jede der beiden reellen durch A gehenden Doppel-
 ebenen enthält A als sich selbst entsprechende Gerade, auf der aber,
 weil der Fall d stattfindet, kein reeller, sondern nur zwei imaginäre
 Doppelpunkte liegen. Folglich enthält jede der beiden Ebenen noch
 einen ausserhalb A gelegenen reellen sich selbst entsprechenden Punkt.
 Die Verbindungslinie der beiden Punkte ergibt eine zweite sich selbst
 entsprechende Gerade B .

Der Fall bc ist mit diesem im Wesentlichen identisch. Der
 Büschel A hat zwei conjugirt imaginäre Doppel-
 ebenen und die Punkt-
 reihe A zwei reelle Doppelpunkte. Das Strahlbündel, welches einen
 dieser Punkte zum Centrum hat, entspricht sich selbst und enthält
 daher ausser der sich selbst entsprechenden Linie A noch eine sich
 selbst zugeordnete Ebene. Diese kann nicht durch A gehen, weil sie
 sonst, gegen die Annahme, eine Doppel-
 ebene des Büschels A wäre. Die beiden Doppel-
 ebenen, welche durch die beiden Doppelpunkte auf
 A gehen, schneiden sich folglich in einer sich selbst entsprechenden
 Linie B . Somit ist dieser Fall nur durch die Vertauschung von A
 und B vom vorigen unterschieden und reicht es aus, den ersten zu
 untersuchen. Weil durch A zwei Doppel-
 ebenen gehen, so liegen (Nr. 10) die Punkte $a_1 a_3 \dots$ in einer Ebene E_1 , und die $a_2 a_4 \dots$
 in einer zweiten Ebene E_2 durch A . Und weil die Linie B zwei
 sich entsprechende Punkte P_1 und P_2 trägt, die durch die Ebenen E_1
 und E_2 harmonisch getrennt werden, so gehen nach der bei c in
 Nr. 11) bemerkten Eigenschaft die Ebenen $a_n a_1 a_2$, $a_2 a_3 a_4$, $\dots$ durch
 einen und die Ebenen $a_1 a_2 a_3$, $a_3 a_4 a_5$, $\dots$ durch einen zweiten auf B
 liegenden Punkt. Beide Eigenschaften verlangen, dass n gerade $= 2p$
 sei. Man lege nun von P_1 aus die Strahlen $P_1 a_1$, $P_1 a_2$, $\dots$ $P_1 a_n$. Die
 Umformung T führt diese der Reihe nach in $P_1 a_2$, $P_1 a_3$, $\dots$ $P_1 a_1$
 über, so dass sie eine cyklisch-projectivische Gruppe im Strahlenbündel
 P_1 bilden und folglich, wenn wir den Fall einer ebenen Gruppe aus-
 schliessen, einem Kegel zweiter Ordnung K angehören müssen, der
 alle Punkte der Gruppe enthält. Die Ebene $P_1 A$ ist die zur Gruppe
 gehörige, weil sie sich bei der Transformation T nicht ändert. Ein
 zweiter Kegel mit gleichen Eigenschaften hat seine Spitze in P_2 .

14) Es ergibt sich hieraus folgende Construction einer solchen Gruppe. Auf einem Kegel mit der Spitze P_1 bestimme man eine cykl.-proj. Gruppe von $n = 2p$ Strahlen $a_1 a_2 \dots a_{2p}$. In der zu der Gruppe gehörenden Ebene E nehme man eine beliebige Gerade A , die nicht durch P_1 geht, an und lege durch sie zwei Ebenen E_1 und E_2 , die den Kegel in zwei Kegelschnitten treffen. Die eine dieser Ebenen, E_1 , schneide man durch die Strahlen $a_1 a_3 \dots a_{2p-1}$, die andere E_2 durch die Strahlen $a_2 a_4 \dots a_{2p}$, so sind die Schnittpunkte $a_1 a_3 \dots a_{2p-1}$ resp. $a_2 a_4 \dots a_{2p}$ die Punkte der Gruppe. Um den Beweis zu liefern, dass so eine cykl.-proj. Gruppe erhalten wird, nehme man auf der Polaren B der Ebene E in Bezug auf den Kegel den Punkt P_2 so an, dass er von P_1 durch die Ebenen E_1 und E_2 harmonisch getrennt ist und betrachte dann die projectivische Raumtransformation

$$T' = [P_1 P_2 a_1 a_3 a_5; P_1 P_2 a_2 a_4 a_6],$$

durch die $P_1 P_2$ oder B sich selbst entspricht. Da die Strahlen $P_1 a_1, P_1 a_2, \dots$ einer cykl.-proj. Gruppe angehören, so schneiden sich die Ebenen $P_1 a_1 a_4$ und $P_1 a_2 a_3$ in einer Geraden $P_1 p_5$, die der zur Gruppe gehörigen Ebene E angehört*). In derselben Ebene liegt die Schnittlinie $P_1 p_6$ der Ebenen $P_1 a_1 a_3$ und $P_1 a_2 a_4$, die Schnittlinie $P_1 p_7$ der Ebenen $P_1 a_2 a_3$ und $P_1 a_3 a_4$, sowie die Schnittlinie $P_1 p_8$ der Ebenen $P_1 a_2 a_6$ und $P_1 a_3 a_5$. Durch T' gehen aber die Linien $P_1 p_5$ und $P_1 p_6$ in resp. $P_1 p_7$ und $P_1 p_8$ über, also die Ebene E in sich selbst. Der Kegel mit der Spitze P_1 , der durch die Strahlen $P_1 a_1, P_1 a_3, P_1 a_5$ geht und in Bezug auf welchen E die Polarebene von B ist, wird also durch T' in einen Kegel umgeformt, der die Strahlen $P_1 a_2, P_1 a_4, P_1 a_6$ enthält und in Bezug auf den ebenfalls E die Polarebene von B ist. Durch beide Bedingungen wird aber derselbe Kegel bestimmt, derjenige nämlich, welcher der Construction zu Grunde lag, und der sich also selbst entspricht. Da nun weiter die Ebene $a_1 a_3 a_5$ der Ebene $a_2 a_4 a_6$ entspricht und E eine Doppelebene ist, so entspricht auch die Linie A sich selbst. Nach der Construction ist der Wurf $A(P_1 a_1 P_2 a_2)$ harmonisch, folglich $A(P_1 a_1 P_2 a_2) \cap A(P_1 a_2 P_2 a_1)$, und deswegen führt T' die Ebene E_2 in E_1 über. Weil die Gruppe von Strahlen $P_1(a_1 a_2 \dots)$ eine cykl.-projectivische ist, so ist $P_1(a_1 a_3 a_5 a_2) \cap P_1(a_2 a_4 a_6 a_3)$, und weil durch T' der Kegel sich nicht ändert, so entspricht in dieser Umformung dem Strahle $P_1 a_2$ der Strahl $P_1 a_3$ und also dem Punkte a_2 der Punkt a_3 . Auf diesem Wege weitergehend zeigt man, dass T' allgemein den Punkt a_i in a_{i+1} überführt, womit bewiesen ist, dass die construirte Gruppe die gewünschte Eigenschaft besitzt.

*) Vergl. diese Annalen Bd. XI, Seite 96, Nr. 11.

15) *Fall* bd. Der Ebenenbüschel A hat zwei conjungirt imaginäre Doppelsebenen und die Punktreihe A zwei conjungirt imaginäre Doppelpunkte. Seien H_1 und H_2 diese Ebenen und Π_1 und Π_2 die Doppelpunkte. Die Ebene H_1 wird durch T in sich selbst übergeführt und zwar so, dass die Punkte Π_1 und Π_2 ungeändert bleiben. Die Betrachtung der Fälle, die eintreten können, wenn eine Ebene projectivisch in sich transformirt wird*), zeigt dann, dass jedenfalls in H_1 noch eine imaginäre Doppellinie γ existiren muss, welche durch einen der beiden Punkte Π_1 oder Π_2 , sagen wir durch Π_1 , geht. Diese Linie γ muss eine Gerade zweiter Art sein; denn wäre sie von der ersten Art, so hätte sie einen reellen Punkt, der der Ebene H_1 angehörte, ohne auf A zu liegen, was nicht angeht, da H_1 imaginär sein soll. Im hier vorliegenden Falle können nicht alle Punkte von γ sich selbst entsprechen. Um dies zu beweisen, legen wir durch den Punkt a_1 der Gruppe den einzigen reellen Strahl, der γ schneidet. Entspricht dann der Schnittpunkt sich selbst, so entspricht auch jener Strahl, als sein reeller Träger, sich selbst und enthält daher den Punkt a_2 . Derselbe Schluss zeigt aber, dass er auch a_3 enthalten muss u. s. w. Folglich kann die Annahme nur richtig sein, wenn alle Punkte der Gruppe auf einer Geraden liegen. Die Gerade γ kann also entweder ausser Π_1 noch einen zweiten Doppelpunkt enthalten, oder aber Π_1 ist der einzige auf ihr liegende Doppelpunkt.

Im zweiten Falle lege man durch $a_1 a_2 a_3$ die reellen Strahlen $g_1 g_2 g_3$, welche γ schneiden und mit dieser Geraden die imaginären Punkte $A_1 A_2 A_3$ gemein haben. Durch die Transformation T geht a_1 über in a_2 , der γ schneidende reelle Strahl g_1 also in den einzigen durch a_2 gehenden reellen Strahl g_2 , welcher γ schneidet, und daher auch, weil γ sich selbst entspricht, A_1 in A_2 ; aus dem gleichen Grunde geht A_3 hervor aus A_2 . Da nun nach der Annahme die beiden projectivischen Punktreihen $\Pi_1 A_1 A_2 \dots$ und $\Pi_1 A_2 A_3 \dots$, von welchen die zweite aus der ersten vermöge T hervorgeht, Π_1 allein entsprechend gemein haben, so ist der Wurf $\Pi_1 A_1 A_2 A_3$ harmonisch**) und deswegen sind die 4 reellen Träger $A g_1 g_2 g_3$ der 4 Punkte Erzeugende einer Regelschaar und auf dieser $A g_2$ durch $g_1 g_3$ harmonisch getrennt***). Seien jetzt weiter $g_4 \dots g_n$ die reellen Geraden, welche durch die Punkte $a_4 \dots a_n$ der Gruppe gehen und γ schneiden, so folgt, weil $A g_1 g_2 g_3$ einer Regelschaar angehören, vermöge der Umformung T , dass auch $A g_2 g_3 g_4$ einer Regelschaar angehören, welche mit jener übereinstimmt, weil sie drei Gerade mit ihr gemein hat. Durch wei-

*) v. Staudt, Beitr. z. Geom. d. Lage, Seite 186, Nr. 301.

**) A. o. a. O. Seite 145, Nr. 221.

***) A. o. a. O. Seite 92, Nr. 143; diese Annalen Bd. VIII, Seite 175, Nr. 40.

tere Anwendung desselben Schlusses ergibt sich nun, dass alle Strahlen $Ag_1g_2 \cdots g_n$ Erzeugende einer Regelschaar sind, und ferner folgt, dass durch T aus der Gruppe $Ag_1g_2 \cdots g_n$ die $Ag_2g_3 \cdots g_1$ hervorgeht. Folglich bilden die Linien $g_1g_2 \cdots g_n$ eine cyklisch-projectivische Gruppe von Erzeugenden dieser Regelschaar und A bleibt bei der zugehörigen Umformung ungeändert. Nun überträgt sich aber der Satz, dass eine cyklische Transformation einer Geraden, die sich auf mehr als zwei Punkte erstreckt, keinen Doppelpunkt besitzt, auch auf cyklische Transformationen der Erzeugenden einer Regelschaar (etwa indem man mit einem Leitstrahl schneidet) und zeigt so, dass eine Doppelerzeugende A nur existiren kann, wenn die Zahl der von einander verschiedenen der Linien $g_1g_2 \cdots g_n$ zwei ist, von welchen beiden geraden Linien dann jede die Hälfte der Punkte der Gruppe trägt. Ist dann aber B diejenige Erzeugende der Regelschaar Ag_1g_2 , welche von A durch g_1 und g_2 harmonisch getrennt ist, so ist $Ag_1Bg_2 \nabla Ag_2Bg_1$, d. h. B entspricht durch T sich selbst. Da nun auf der Doppelgeraden γ nur ein Punkt B existirt, der von Π_1 durch A_1 und A_2 getrennt ist und dessen Träger in Folge dessen von A durch g_1 und g_2 harmonisch getrennt ist, so muss B der Träger von B und daher B ein zweiter auf γ gelegener Doppelpunkt sein. Da dies gegen unsere Annahme streitet, so ist diese nicht möglich.

16) Es bleibt also nur noch der Fall, dass γ und damit H_1 noch einen zweiten Doppelpunkt P_1 enthält. Dann wird aber die conjungirt imaginäre Ebene H_2 den zu P_1 conjungirten Punkt P_2 als weiteren Doppelpunkt tragen. Die Verbindungslinie P_1P_2 ist dann eine zweite reelle Doppellinie. Dagegen sind die zwei Linien Π_1P_1 und Π_2P_2 , sowie andererseits die beiden Π_1P_2 und Π_2P_1 conjungirt imaginär. Diese 4 Linien bestimmen mit dem Punkt a_1 der Gruppe ein einmanteliges Hyperboloid, von dessen Erzeugenden die der einen Schaar die Geraden Π_1P_1 und Π_2P_2 , und die der anderen die Geraden Π_1P_2 und Π_2P_1 schneiden. Legt man nämlich durch a_1 und die beiden conjungirt imaginären Linien Π_1P_1 und Π_2P_2 die reelle Gerade g_1 , so geht durch jeden Punkt von g_1 eine einzige Gerade, die die beiden conjungirten Geraden Π_1P_2 und Π_2P_1 schneidet, und zwar durch jeden reellen Punkt von g_1 eine reelle Gerade und alle diese gehören einer reellen Regelschaar*) H_1 an, welche jene zwei Paare conjungirt imaginärer Geraden gleichfalls enthält. Durch die Umformung T geht diese Fläche in ein anderes reelles Hyperboloid H_2 über, das durch den Punkt a_2 und dieselben vier imaginären Linien geht. Liegt a_2 auf H_1 , so fällt H_2 mit H_1 zusammen, und die wiederholte Anwendung von T

*) v. Staudt, Beiträge, Seite 114, Nr. 175.

lehrt, dass die ganze Gruppe der Fläche H_1 angehört. Liegt aber a_2 nicht auf der Fläche, sondern z. B. im Aeussern von H_1 , so folgt durch die Umformung, dass auch a_3 im Aeussern von H_2 und folglich auch im Aeussern von H_1 liegt. Denn weil H_1 und H_2 die 4 imaginären Linien gemein haben, treffen sie sich in keinem reellen Punkt und somit liegt H_2 ganz ausserhalb H_1 , weil der Punkt a_2 von H_2 ausserhalb H_1 sich befindet. Es ergibt sich dann weiter, dass auch a_4 im Aeusseren von H_2 und von H_1 sich befindet u. s. w., bis man findet, dass a_n die gleiche Lage hat, woraus durch Anwendung von T folgen würde, dass a_1 im Aeusseren von H_2 gelegen ist; während wir annahmen, a_2 und damit H_2 sei im Aeusseren von H_1 , und also a_1 im Inneren von H_2 gelegen. Ebenso wenig kann a_2 im Inneren von H_1 sich vorfinden und muss daher, und mit ihm die ganze Gruppe, der Fläche H_1 selbst angehören.

17) Legt man durch die Punkte der Gruppe die reellen Erzeugenden $g_1 g_2 \dots g_n$ der einen Schaar und die $h_1 h_2 \dots h_n$ der zweiten Schaar des Hyperboloids H_1 , so führt T diese, nach einem oben schon angewandten Schlusse, in $g_2 g_3 \dots g_1$ resp. $h_2 h_3 \dots h_1$ über. Beide Gruppen bilden also cyklisch-projectivische Gruppen von Strahlen, die beide auch aus weniger als n Strahlen bestehen können, wobei dann jeder Strahl mehr als einen Punkt, aber jeder gleichviele Punkte tragen muss. Man kann also eine cyklisch-projectivische Gruppe construiren, indem man die cyklischen Gruppen von Geraden $g_1 g_2 \dots g_n$, $h_1 h_2 \dots h_n$ aus den beiden Schaaren von Erzeugenden eines Hyperboloids herauswählt und g_1 mit h_1 , g_2 mit h_2 , $\dots$ schneidet. Die Raumtransformation nämlich, die die Punkte

$$g_1 h_1 \quad g_1 h_2 \quad g_2 h_1 \quad g_2 h_2 \quad g_3 h_3$$

in resp.

$$g_2 h_2 \quad g_2 h_3 \quad g_3 h_2 \quad g_3 h_3 \quad g_4 h_4$$

überführt, erzeugt aus dem durch die Geraden $g_1 h_1 g_2 h_2$ und den Punkt $g_3 h_3$ gehenden Hyperboloid das durch die Geraden $g_2 h_2 g_3 h_3$ und den Punkt $g_4 h_4$ gehende, welches mit jenem identisch ist; der Linie g_3 , weil sie durch den Punkt $g_3 h_3$ und die beiden Geraden $h_1 h_2$ gelegt ist, entspricht die Erzeugende, die durch $g_4 h_4$ und die Geraden $h_2 h_3$ geht, also g_4 ; ebenso der h_3 die Linie h_4 . Entspricht der Linie g_4 die Linie x , so muss sein $g_1 g_2 g_3 g_4 \cap g_2 g_3 g_4 x$. Es ist aber wegen der cykl.-proj. Gruppe $g_1 g_2 g_3 g_4 \cap g_2 g_3 g_4 g_5$, so dass x mit g_5 übereinstimmt; in gleicher Weise wird h_4 in h_5 , also der Punkt $g_4 h_4$ in den $g_5 h_5$ übergeführt. Man beweist ohne Weiteres in der Art, dass eine Transformation existirt, welche die Punkte der construirten Gruppe cyklisch vertauscht. Wenn die so gefundene Gruppe ganz in derselben Ebene liegt, so ist $g_1 g_2 \dots g_n \cap h_1 h_2 \dots h_n$, und umgekehrt, wenn diese Beziehung besteht, liegt die Gruppe in einer Ebene.

Alles zusammengefasst, ergibt das Resultat: *Eine cyklisch-projectivische Gruppe im Raume liegt entweder auf einer Geraden, oder auf einer Ebene, oder auf zwei Ebenen, oder auf einem Hyperboloide.*

18) Nehmen wir an, eine cyklisch-projectivische Gruppe $a_1 a_2 \dots a_n$ gehöre einer der letzten Arten an, und construiren dann, ausgehend von einem reellen Punkt b_1 , der aber auf keinem der reellen Doppelpunkte der Transformation T liegt und mit keinem der Punkte $a_1 a_2 \dots a_n$ identisch ist, die Punkte $b_2, b_3, \dots b_n$, welche aus b_1 durch wiederholte Anwendung von T hervorgehen. Die Anzahl der von einander verschiedenen ist sicher nicht $> n$. Wie in Nr. 7) kann man zeigen, dass keiner dieser Punkte mit einem der Punkte $a_1 \dots a_n$ zusammenfallen kann. Es kann aber auch die Anzahl der verschiedenen Punkte nicht $< n$ sein. Denn wäre sie nur $= k$, so dass $b_{k+1} = b_1$ wäre, so würde die Transformation T^k die Punkte $a_1 a_2 \dots a_n$ $b_1 b_2 \dots b_k$ in $a_{k+1} a_{k+2} \dots a_k b_1 b_2 \dots b_k$ verwandeln und liesse demnach die Punkte $b_1 b_2 \dots b_k$ unverändert. Da aber T^k dieselben (reellen und imaginären) Doppelpunkte nicht ändert, die auch T nicht ändert und deren Anzahl schon 4 beträgt, so würde ein weiterer Doppelpunkt, der nicht dem Tetraeder jener vier Punkte angehörte, bewirken, dass die Umformung T^k gar keinen Punkt änderte. Dies ist aber nur für $k = n$ möglich. *Die neue aus b_1 entstehende Gruppe enthält daher ebenfalls n Punkte.* Aehnlich wie der in Nr. 7) bewiesene Satz kann auch dieser eine Ausnahme erleiden, wenn b_1 auf einer Doppelsebene oder auf einer Doppelgeraden angenommen wird. Ich will auf die nähere Erörterung dieser Ausnahmen, sowie die damit zusammenhängende Frage, wann die Verbindungslinie zweier Punkte einer solchen Gruppe die beiden reellen Doppelgeraden schneidet, hier nicht weiter eingehen und nur bemerken, dass sie mit einer Eintheilung der cyklisch-projectivischen Gruppen in Unterarten zusammenhängt, die mit der Eintheilung der regulären Polygone in Arten analog ist.

19) Auf die, wie oben gezeigt, aus b_1 entstehende neue Gruppe von n Punkten lassen sich dieselben Sätze anwenden, wie auf die ursprüngliche, und sie liegt also im Falle bc oder ad auf zwei Ebenen und gleichzeitig auf zwei Kegeln; oder, im Falle bd, auf einem Hyperboloid. Im letzten Falle bilden alle, durch verschiedene Annahme für b_1 , so entstehenden einmanteligen Hyperboloide eine einfach unendliche Schaar von Flächen, die, weil sie 4 imaginäre Kanten eines Tetraeders enthalten, sich in keinem reellen Punkte treffen. Für alle Flächen sind die Linien A und B conjugirte Polaren, weil die durch die eine gehenden imaginären Tangentenebenen, nämlich die Tetraederflächen, in Punkten der andern berühren. Hat man auf einer der

Flächen alle cyklisch-projectivischen Gruppen von n Punkten construirt, so kann man leicht die auf jeder andern finden. Liegen nämlich die beiden Punkte a_1 und b_1 zweier Gruppen auf einer Geraden, die A und B schneidet, so liegen, wie die Umformung T lehrt, a_2 und b_2 ebenfalls auf einer solchen Geraden u. s. w. Man kann also mit Hülfe solcher Strahlen die zweite Gruppe aus der ersten ableiten.

Ein specieller Fall wird gebildet durch die Schaar der concentrischen und coaxialen einmanteligen Rotationshyperboloide, wobei die Gerade A die Rotationsaxe und die B eine zur Axe senkrechte unendlich ferne Gerade ist. Mit Hülfe von zwei regulären Vielecken, die man dem Kehlkreis einer dieser Flächen einschreibt, kann man dann die Erzeugenden beider Schaaren zu cyklisch-projectivischen Gruppen ordnen und so leicht eine Punktgruppe realisiren.

Karlsruhe, 10. December 1877.