Lebesguesches Maß und Analysis Situs.

Von

L. E. J. BROUWER in Amsterdam.

Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist, für das Lebesguesche Maß die vollständige Abwesenheit von für die Analysis Situs invarianten Eigenschaften darzutun.*) Die Beweisführung, welche für den linearen Fall noch keinerlei Schwierigkeiten bietet**), beschränkt sich im folgenden auf ebene Punktmengen; doch läßt sich, wie ich glaube, die hier angewandte Methode ohne prinzipielle Änderungen auf Punktmengen des n -dimensionalen Raumes übertragen.

§ 1. Ableitung eines Hilfssatzes.

Wir denken in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem, verstehen unter einer Breitelinie $b_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ (bzw. unter einer Längelinie $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$) eine gerade Linie, welche der X -Achse (bzw. der Y -Achse) parallel ist und von ihr eine im ternalen System gemessene positive Entfernung $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ besitzt, und betrachten eine nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge C , welche ganz zum von den Längelinien l_0 und l_3 und den Breitelinien b_0 und b_3 begrenzten abgeschlossenen Quadrate k gehört, aber weder von l_0 noch von l_3 Teilsegmente enthält. Wir wählen eine solche Fundamentalreihe $\eta_1, \eta_2, \dots$ von positiven Zahlen < 1 , daß das unendliche Produkt

*) Man vergleiche folgende Äußerung Borels, welche mir auf eine entgegengesetzte Vermutung hinzuweisen scheint: „Les ensembles qui ne sont pas de mesure nulle sont formés d'une matière simple, avec des ensembles continus positifs ou négatifs; ils sont hétérogènes au continu; les ensembles de mesure nulle peuvent être, au contraire, sensiblement homogènes au continu, c'est-à-dire identiques à eux-mêmes dans des intervalles aussi petits que l'on veut . . . la notion d'ensemble de mesure nulle est primordiale“ (Bull. Soc. Math. de France 41 (1913), S. 17).

**) Beispiele topologischer Äquivalenz von linearen Nullmengen und Komplementärmengen von Nullmengen finden sich u. a. in einem Schreiben von mir an Herrn Blumenthal aus dem Jahre 1913; doch waren solche damals auch anderen Mathematikern, z. B. Herrn Bohl, bekannt; das erste in der Literatur auftretende Beispiel dürfte sich finden bei Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, § 337.

$\prod_{\nu}(1 - \eta_{\nu})$ nicht verschwindet, und das unendliche Produkt $\prod_{\nu}(1 + \eta_{\nu})$ einen endlichen Wert besitzt, und nehmen mit dem Quadrate k der Reihe nach eine Fundamentalreihe $\tau_1, \tau_2, \dots$ von eindeutigen und stetigen Transformationen vor, welche alle Breitelinien nebst l_0 und l_3 in sich überführen, und im folgenden näher definiert werden sollen.

Definition von τ_1 . Wir bezeichnen mit s_0, s_1 und s_2 die Streifen, in welche k durch b_1 und b_2 zerlegt wird, und bestimmen eine endliche Folge $q_1, q_2, q_3, \dots$ von mit k homothetischen und keinen Punkt von C enthaltenden Quadraten, welche abwechselnd zwischen b_0 und b_1 und zwischen b_2 und b_3 liegen, während ihre Mittelpunkte wachsende Abszissen besitzen, keine Längelinie zwei q_{ν} trifft, der erste Mittelpunkt auf l_0 und der letzte auf l_3 gelegen ist, und für jedes ν der Abstand der Schnittpunkte der Längelinien durch die Mittelpunkte von q_{ν} und $q_{\nu+1}$ mit einer willkürlichen Breitelinie weniger als ε_1 beträgt. Der Minimalwert der Seitenlängen der q_{ν} sei ξ_1 . Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien, welche $q_{2\nu-1}$ in drei kongruente Rechtecke zerlegen, mit b_0 bzw. b_1 bezeichnen wir mit $A_{2\nu-1}$ und $B_{2\nu-1}$ bzw. $C_{2\nu-1}$ und $D_{2\nu-1}$. Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien, welche $q_{2\nu}$ in drei kongruente Rechtecke zerlegen, mit b_2 bzw. b_3 bezeichnen wir mit $E_{2\nu}$ und $F_{2\nu}$ bzw. $G_{2\nu}$ und $H_{2\nu}$. Sodann verstehen wir unter den *Hauptlinien zweiter Ordnung* die Streckenzüge $B_{2\nu-1} D_{2\nu-1} E_{2\nu} G_{2\nu}$ und $H_{2\nu} F_{2\nu} C_{2\nu+1} A_{2\nu+1}$ nebst den in l_0 und l_3 enthaltenen Seiten von k . Zerlegen wir die zwischen zwei bestimmten aufeinanderfolgenden Hauptlinien zweiter Ordnung enthaltenen Teilstrecken von Breitelinien in je zwei Segmente, welche auf jeder Breitelinie dasselbe Verhältnis aufweisen, so nennen wir den geometrischen Ort der Teilpunkte eine *Längelinie zweiter Ordnung*. Diejenige Längelinie zweiter Ordnung, welche b_0 im selben Punkte wie $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ trifft, bezeichnen wir mit ${}_2 l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ und bestimmen τ_1 durch die Eigenschaft, daß sie das in k liegende Segment von $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ für jede Wahl der a_{ν} in ${}_2 l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ überführt. Durch geeignete Wahl von ε_1 sorgen wir dafür, daß für jede Wahl von a_1 die zwischen ${}_2 l_{a_1}$ und ${}_2 l_{a_1+1}$ enthaltene Teilstrecke einer willkürlichen Breitelinie zwischen $\frac{1}{3}(1 - \eta_1)$ und $\frac{1}{3}(1 + \eta_1)$ liegt.

Definition von τ_2 . Sei m_2 eine solche positive ganze Zahl, daß für jede Wahl von $a_1, a_2, \dots, a_{m_2}$ die zwischen ${}_2 l_{a_1 \dots a_{m_2}}$ und ${}_2 l_{a_1 \dots a_{m_2-1}(a_{m_2}+1)}$ enthaltene Teilstrecke einer willkürlichen Breitelinie $< \frac{1}{9}$ ist. Wir bezeichnen mit $s_{\mu 0}, s_{\mu 1}, s_{\mu 2}$ die Streifen, in welche s_{μ} durch $b_{\mu 1}$ und $b_{\mu 2}$ zerlegt wird, und bestimmen in jedem s_{μ} eine endliche Folge ${}_{\mu} q_1, {}_{\mu} q_2, {}_{\mu} q_3, \dots$ von mit k homothetischen und keinen Punkt von C enthaltenden Quadraten, welche abwechselnd zwischen $b_{\mu 0}$ und $b_{\mu 1}$ und zwischen $b_{\mu 2}$

und $b_{\mu+1}$ liegen, während die Längelinien zweiter Ordnung durch ihre Mittelpunkte b_μ in Punkten mit wachsenden Abszissen treffen, keine Längelinie zweiter Ordnung zwei ${}_\mu q_\nu$ trifft, der erste Mittelpunkt auf l_0 und der letzte auf l_3 gelegen ist, und für jedes ν der Abstand der Schnittpunkte der Längelinien zweiter Ordnung durch die Mittelpunkte von ${}_\mu q_\nu$ und ${}_\mu q_{\nu+1}$ mit einer willkürlichen Breitelinie weniger als ε_2 beträgt. Der Minimalwert der Seitenlängen der ${}_\mu q_\nu$, wenn wir sowohl μ wie ν variieren lassen, sei ξ_2 . Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien zweiter Ordnung, welche die der X-Achse parallele Mittellinie von ${}_\mu q_{2\nu-1}$ in drei gleiche Stücke zerlegen, mit $b_{\mu 0}$ bzw. $b_{\mu 1}$ bezeichnen wir mit ${}_\mu A_{2\nu-1}$ und ${}_\mu B_{2\nu-1}$ bzw. ${}_\mu C_{2\nu-1}$ und ${}_\mu D_{2\nu-1}$. Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien zweiter Ordnung, welche die der X-Achse parallele Mittellinie von ${}_\mu q_{2\nu}$ in drei gleiche Stücke zerlegen, mit $b_{\mu 2}$ bzw. $b_{\mu+1}$ bezeichnen wir mit ${}_\mu E_{2\nu}$ und ${}_\mu F_{2\nu}$ bzw. ${}_\mu G_{2\nu}$ und ${}_\mu H_{2\nu}$. Sodann verstehen wir unter den *Teilhauptlinien dritter Ordnung* von s_μ die Streckenzüge ${}_\mu B_{2\nu-1}$ ${}_\mu D_{2\nu-1}$ ${}_\mu E_{2\nu}$ ${}_\mu G_{2\nu}$ und ${}_\mu H_{2\nu}$ ${}_\mu F_{2\nu}$ ${}_\mu C_{2\nu+1}$ ${}_\mu A_{2\nu+1}$ nebst den in l_0 und l_3 enthaltenen Seiten von s_μ . Zerlegen wir die zwischen zwei bestimmten aufeinanderfolgenden Teilhauptlinien dritter Ordnung von s_μ enthaltenen Teilstrecken von Breitelinien in je zwei Segmente, welche auf jeder Breitelinie dasselbe Verhältnis aufweisen, so nennen wir den geometrischen Ort der Teilpunkte eine *Teillängelinie dritter Ordnung* von s_μ . Unter einer *Längelinie dritter Ordnung* verstehen wir einen aus Teillängelinien dritter Ordnung der verschiedenen s_μ zusammengesetzten, b_0 und b_1 verbindenden Streckenzug. Diejenige Längelinie dritter Ordnung, welche b_0 im selben Punkte wie $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ trifft, bezeichnen wir mit ${}_3 l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ und bestimmen τ_2 durch die Eigenschaft, daß sie ${}_2 l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ für jede Wahl der a_ν in ${}_3 l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ überführt. Wir wählen $\varepsilon_2 < \frac{1}{27} \xi_1$, und sorgen weiter durch geeignete Wahl von ε_2 dafür, daß für jede Wahl von $a_1, a_2, \dots, a_{m_2}$ das Verhältnis von der zwischen ${}_3 l_{a_1 \dots a_{m_2-1} a_{m_2}}$ und ${}_3 l_{a_1 \dots a_{m_2-1} (a_{m_2}+1)}$ enthaltenen Teilstrecke einer willkürlichen Breitelinie und der zwischen ${}_2 l_{a_1 \dots a_{m_2-1} a_{m_2}}$ und ${}_2 l_{a_1 \dots a_{m_2-1} (a_{m_2}+1)}$ enthaltenen Teilstrecke derselben Breitelinie zwischen $1 - \eta_2$ und $1 + \eta_2$ liegt.

Definition von τ_n . Sei m_n eine solche positive ganze Zahl $> m_{n-1}$, daß für jede Wahl von $a_1, a_2, \dots, a_{m_n}$ die zwischen ${}_n l_{a_1 \dots a_{m_n-1} a_{m_n}}$ und ${}_n l_{a_1 \dots a_{m_n-1} (a_{m_n}+1)}$ enthaltene Teilstrecke einer willkürlichen Breitelinie $< \frac{1}{3^n}$ ist. Wir bezeichnen mit $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 0}$, $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 1}$, $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 2}$ die Streifen, in welche $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ durch $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 1}$ und $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 2}$ zerlegt wird, und bestimmen in jedem $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ eine endliche Folge ${}_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}} q_1, {}_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}} q_2,$

$\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_3, \dots$ von mit k homothetischen und keinen Punkt von C enthaltenden Quadraten, welche abwechselnd zwischen $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 0}$ und $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 1}$ und zwischen $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 2}$ und $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 3}$ liegen, während die Längelinien n^{ter} Ordnung durch ihre Mittelpunkte $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ in Punkten mit wachsenden Abszissen treffen, keine Längelinie n^{ter} Ordnung zwei $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_\nu$ trifft, der erste Mittelpunkt auf l_0 und der letzte auf l_3 gelegen ist, und für jedes ν der Abstand der Schnittpunkte der Längelinien n^{ter} Ordnung durch die Mittelpunkte von $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_\nu$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_{\nu+1}$ mit einer willkürlichen Breitelinie weniger als ε_n beträgt. Der Minimalwert der Seitenlängen der $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_\nu$, wenn wir sowohl ν wie die μ_ν variieren lassen, sei ξ_n . Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien n^{ter} Ordnung, welche die der X -Achse parallele Mittellinie von $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_{2\nu-1}$ in drei gleiche Stücke zerlegen, mit $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 0}$ bzw. $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 1}$ bezeichnen wir mit $\mu_1 \dots \mu_{n-1} A_{2\nu-1}$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} B_{2\nu-1}$ bzw. $\mu_1 \dots \mu_{n-1} C_{2\nu-1}$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} D_{2\nu-1}$. Die Schnittpunkte derjenigen beiden Längelinien n^{ter} Ordnung, welche die der X -Achse parallele Mittellinie von $\mu_1 \dots \mu_{n-1} q_{2\nu}$ in drei gleiche Stücke zerlegen, mit $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 2}$ bzw. $b_{\mu_1 \dots \mu_{n-1} 3}$ bezeichnen wir mit $\mu_1 \dots \mu_{n-1} E_{2\nu}$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} F_{2\nu}$ bzw. $\mu_1 \dots \mu_{n-1} G_{2\nu}$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} H_{2\nu}$. Sodann verstehen wir unter den *Teilhauptlinien* $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ die Streckenzüge $\mu_1 \dots \mu_{n-1} B_{2\nu-1}$, $\mu_1 \dots \mu_{n-1} D_{2\nu-1}$, $\mu_1 \dots \mu_{n-1} E_{2\nu}$, $\mu_1 \dots \mu_{n-1} G_{2\nu}$ und $\mu_1 \dots \mu_{n-1} H_{2\nu}$, $\mu_1 \dots \mu_{n-1} F_{2\nu}$, $\mu_1 \dots \mu_{n-1} C_{2\nu+1}$, $\mu_1 \dots \mu_{n-1} A_{2\nu+1}$ nebst den in l_0 und l_3 enthaltenen Seiten von $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$. Zerlegen wir die zwischen zwei bestimmten aufeinanderfolgenden Teilhauptlinien $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ enthaltenen Teilstrecken von Breitelinien in je zwei Segmente, welche auf jeder Breitelinie dasselbe Verhältnis aufweisen, so nennen wir den geometrischen Ort der Teilpunkte eine *Teillängelinie* $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$. Unter einer *Längelinie* $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung verstehen wir einen aus Teillängelinien $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der verschiedenen $s_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}$ zusammengesetzten, b_0 und b_1 verbindenden Streckenzug. Diejenige Längelinie $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche b_0 im selben Punkte wie $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ trifft, bezeichnen wir mit ${}_{n+1}l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ und bestimmen τ_n durch die Eigenschaft, daß sie ${}_{n+1}l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ für jede Wahl der a_ν in ${}_{n+1}l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ überführt. Wir wählen

$$\varepsilon_n < \frac{1}{2^7} \xi_{n-1} \left(< \frac{1}{2^{43}} \xi_{n-2} < \dots < \frac{1}{3^{2n-3}} \xi_2 < \frac{1}{3^{2n-1}} \xi_1 \right)$$

und sorgen weiter durch geeignete Wahl von ε_n dafür, daß für jede Wahl von $a_1, a_2, \dots, a_{m_n}$ das Verhältnis von der zwischen ${}_{n+1}l_{a_1 \dots a_{m_n-1} a_{m_n}}$ und ${}_{n+1}l_{a_1 \dots a_{m_n-1} (a_{m_n}+1)}$ enthaltenen Teilstrecke einer willkürlichen Breitelinie

und der zwischen $l_{a_1 \dots a_{m_n-1} a_{m_n}}$ und $l_{a_1 \dots a_{m_n-1} (a_{m_n}+1)}$ enthaltenen Teilstrecke derselben Breitelinie zwischen $1 - \eta_n$ und $1 + \eta_n$ liegt.

Die Limestransformation von $\tau_1, \tau_1 \cdot \tau_2, \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3, \dots$ ist eine eindeutige und stetige Transformation τ des Quadrates k in sich, welche das in k liegende Segment von $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ für jede Wahl der a_v in einen solchen b_0 und b_3 verbindenden und jede Breitelinie nur in einem Punkte treffenden einfachen Kurvenbogen $o l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ überführt, daß für jede Wahl von n und den μ_v innerhalb des Streifens $s_{\mu_1 \dots \mu_n}$ zum Innern eines Quadrates $\mu_1 \dots \mu_n G$ gehörige, also außerhalb C liegende Punkte dieses Kurvenbogens liegen. Mithin enthält C von keinem Kurvenbogen $o l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ einen Teilbogen, so daß die zu τ reziproke Transformation die Menge C in eine nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge C' überführt, welche von keiner Längelinie $l_{a_1 a_2 a_3 \dots}$ ein Segment enthält. Mit anderen Worten, wir haben bewiesen:

Hilfssatz: *Sei $PQRS$ ein abgeschlossenes Quadrat, und C eine in diesem Quadrat enthaltene nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge, zu welcher kein Segment von QR oder PS gehört; es existiert eine eindeutige und stetige Transformation des Quadrates in sich, welche jede Quadratseite und jeden der Seite PQ parallelen Querschnitt des Quadrates invariant läßt, und C in eine Punktmenge C' überführt, welche kein der Quadratseite QR paralleles gerades Liniensegment enthält.*

§ 2. Der Inhalt der abgeschlossenen Punktmengen.

Wir denken wieder im abgeschlossenen Quadrate k mit den Eckpunkten P, Q, R, S (von denen Q im Koordinatenanfangspunkt, P auf der X -Achse und R auf der Y -Achse liegt) eine nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge C , zu welcher kein Segment von QR oder PS gehört und bestimmen nach § 1 eine eindeutige und stetige Transformation τ' von k in sich, welche alle geraden Liniensegmente $y = c$ nebst den Quadratseiten $x = 0$ und $x = 1$ und allen Punkten der Quadratseite $y = 0$ invariant läßt, und C in eine Punktmenge C' überführt, welche kein gerades Liniensegment $x = c$ enthält. Die Entfernung, welche ein willkürlicher Punkt von k von C' besitzt, bezeichnen wir mit φ . Alsdann ist φ eine sich über k erstreckende stetige, nirgends negative Funktion von x und y , welche in allen Punkten von C' , aber sonst nirgends verschwindet. Wir setzen

$$\frac{\int_0^y \varphi(xy) dy}{\int_0^1 \varphi(xy) dy} = \eta(x, y).$$

Die Formeln

$$x' = x$$

$$y' = \eta(xy)$$

definieren eine eindeutige und stetige Transformation τ'' von k in sich, welche C' in eine solche nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge C'' überführt, daß der lineare Inhalt der auf einer willkürlichen Geraden $x = c$ liegenden Teilmenge von C'' verschwindet, mithin auch der ebene Inhalt von C'' selbst verschwindet.

Sei t die durch $\tau''^{-1} \cdot \tau'^{-1}$ bestimmte, die Eckpunkte invariant lassende Transformation der Quadratseite QR in sich, M der Mittelpunkt von k , und Q_n bzw. R_n der Schnittpunkt von MQ bzw. MR mit der Geraden $x = 2^{-n-1}$. Durch Projektion aus M bestimmt dann t gleichzeitig eine Transformation des geraden Liniensegmentes $Q_n R_n$ in sich, welche einen willkürlichen Punkt W_n dieses Liniensegmentes in W'_n überführt. Unter ${}_a R_n$ verstehen wir einen solchen Punkt von $Q_n R_n$, daß der Schnittpunkt der geraden Linie $M {}_a R_n$ mit der Y -Achse eine Ordinate $\frac{a}{2^n}$ besitzt, und betrachten ein Trapezium ${}_a R_{n+a+1} R_n {}_{2a} R_{n+1} {}_{2a+2} R_{n+1}$. Sei Z die Mitte von ${}_a R_{n+a+1} R_n$ und U die Mitte von ${}_a R'_{n+a+1} R'_n$, und sei ${}_a \tau_n$ die eindeutige und stetige Transformation, welche das Trapezium ${}_a R_{n+a+1} R_n {}_{2a} R_{n+1} {}_{2a+2} R_{n+1}$ in solcher Weise in das Trapezium ${}_a R'_{n+a+1} R'_n {}_{2a} R'_{n+1} {}_{2a+2} R'_{n+1}$ überführt, daß für jedes α die gerade Linie, welche die Strecken ${}_a R_n {}_{2a} R_{n+1}$ und ${}_{a+1} R_n {}_{2a+2} R_{n+1}$ bzw. die Strecken ${}_a R_n Z$ und ${}_{2a} R_{n+1} {}_{2a+1} R_{n+1}$ bzw. die Strecken $Z {}_{a+1} R_n$ und ${}_{2a+1} R_{n+1} {}_{2a+2} R_{n+1}$ nach dem Verhältnis α zerlegt, in die gerade Linie, welche die Strecken ${}_a R'_n {}_{2a} R'_{n+1}$ und ${}_{a+1} R'_n {}_{2a+2} R'_{n+1}$ bzw. die Strecken ${}_a R'_n U$ und ${}_{2a} R'_{n+1} {}_{2a+1} R'_{n+1}$ bzw. die Strecken $U {}_{a+1} R'_n$ und ${}_{2a+1} R'_{n+1} {}_{2a+2} R'_{n+1}$ nach dem Verhältnis α zerlegt, übergeht. Bei Variierung von n und a bestimmen die verschiedenen ${}_a \tau_n$ eine eindeutige und stetige Transformation τ_{QR} der abgeschlossenen Dreiecksfläche MQR in sich, bei welcher die Quadratseite QR der Transformation t unterliegt, und die zur Dreiecksfläche gehörige Teilmenge von C'' in eine nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge vom Inhalt Null übergeht. Wenn wir in analoger Weise τ_{RS} und τ_{PS} definieren, so gelangen wir zu einer eindeutigen und stetigen Transformation τ''' von k in sich, bei welcher der Quadratumfang derselben Transformation wie bei $\tau''^{-1} \cdot \tau'^{-1}$ unterliegt, und C'' in eine nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge C''' vom Inhalt Null übergeht.

Betrachten wir nun die Transformation $\tau' \cdot \tau'' \cdot \tau'''$, so stellt sich folgende Eigenschaft heraus:

Satz 1: Sei $PQRS$ ein abgeschlossenes Quadrat, und C eine in diesem Quadrat enthaltene nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge, zu welcher

kein Segment von QR oder PS gehört; es existiert eine eindeutige und stetige Transformation des Quadrates in sich, welche jeden Punkt des Quadratumfangs invariant läßt und C in eine Punktmenge vom Inhalte Null überführt.

Sei nun C_1 eine völlig willkürliche in k enthaltene nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge. Dann existiert ein Ordnungstypus $^*\omega + \omega$ von der Y -Achse parallelen, links gegen QR und rechts gegen PS konvergierenden geraden Querschnitten

$$\dots, K_{-2}L_{-2}, K_{-1}L_{-1}, K_0L_0, K_1L_1, K_2L_2, \dots$$

von k , welche keine zu C_1 gehörige Segmente enthalten.*) Auf Grund von Satz 1 gibt es für jedes ν eine eindeutige und stetige Transformation t_ν des abgeschlossenen Rechteckes $K_\nu L_\nu L_{\nu+1} K_{\nu+1}$ in sich, welche jeden Punkt seines Umfangs invariant läßt, und die zu ihm gehörige Teilmenge ${}_nC_1$ von C_1 in eine Punktmenge ${}_nC'_1$ vom Inhalt Null überführt. Aus der Betrachtung der Vereinigung der verschiedenen Transformationen t_ν ergibt sich sodann folgendes Resultat:

Satz 2: Sei k ein abgeschlossenes Quadrat und C_1 eine in k enthaltene nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge; es existiert eine eindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt des Quadratumfangs invariant läßt und C_1 in eine Punktmenge vom Inhalt Null überführt.

Wir nehmen nunmehr an, daß die dem Innern von k angehörige Teilmenge von C_1 nicht-abzählbar ist. Alsdann liegt im Innern von k eine perfekte punkthafte Teilmenge C_2 von C_1 , und kann man im Innern von k eine einfache geschlossene Kurve γ konstruieren, welche C_2 als Bestandteil enthält.***) Sei ε eine beliebige zwischen 0 und 1 liegende positive Zahl, so kann man im Innern von k eine einfache geschlossene „nicht-quadrirbare“ Kurve γ' konstruieren, deren Inhalt $> 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$ ist***), und auf γ' eine solche punkthafte perfekte Punktmenge C' bestimmen, daß das Maß der Komplementärmenge von C' auf $\gamma' < \frac{1}{2}\varepsilon$, mithin der Inhalt von $C' > 1 - \varepsilon$ ist. Zwischen C_2 und C' läßt sich eine eindeutige und stetige Beziehung herstellen; diese läßt sich zu einer eindeutigen und stetigen Beziehung zwischen γ und γ' , und letztere sich zu einer ein-

*) Sei nämlich $a_1, a_2, a_3, \dots$ eine Folge von gegen Null konvergierenden positiven Zahlen. Diejenigen Werte von x , zu denen in C_1 enthaltene, der Y -Achse parallele gerade Liniensegmente $\geq a_\nu$ gehören, bilden für jedes ν eine nirgends dichte abgeschlossene Menge σ_ν , und die Komplementärmenge von $\mathfrak{S}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ ist überall dicht zwischen 0 und 1.

**) Schoenflies, Bericht über die Mengenlehre II, S. 258, 259.

***). Ibid. S. 257.

deutigen und stetigen Transformation von k in sich erweitern*), bei welcher jeder Punkt des Quadratumfanges invariant bleibt. D. h. wir haben bewiesen:

Satz 3: *Sei k ein abgeschlossenes Quadrat der Seitenlänge 1, und C_1 eine in k enthaltene, im Innengebiete von k nicht-abzählbare nirgends dichte abgeschlossene Punktmenge; es existiert eine eindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt des Quadratumfanges invariant läßt und C_1 in eine Punktmenge, deren Inhalt dem Werte 1 beliebig nahe kommt, überführt.*

Wir fassen das Ergebnis dieses Paragraphen wie folgt zusammen:

Theorem 1: *Sei k ein abgeschlossenes Quadrat der Seitenlänge 1, und C eine in k enthaltene, im Innengebiete von k nicht-abzählbare abgeschlossene Punktmenge; bei den eindeutigen und stetigen Transformationen von k in sich schwankt der Inhalt der Punktmengen, in welche C übergeht, zwischen 0 (inklusive) und 1 (exklusive), wenn C nirgends dicht ist; zwischen 0 (exklusive) und 1 (exklusive), wenn C weder nirgends dicht noch überall dicht ist.*

§ 3. Das Maß der inneren und äußeren Grenzmengen.

Wir denken das abgeschlossene Quadrat k zerlegt in eine überall nicht-abzählbare äußere Grenzmenge C und eine innere Grenzmenge I . Sei $C = \mathfrak{S}(C_1, C_2, C_3, \dots)$, wobei die abgeschlossene Punktmenge C_ν für jedes ν in der abgeschlossenen Punktmenge $C_{\nu+1}$ enthalten ist, und sei I_ν die Komplementärmenge von C_ν in k .

Wir zerlegen k in vier kongruente homothetische Teilquadrate, mit jedem der letzteren nehmen wir die gleiche Zerlegung vor, und fahren in dieser Weise unbeschränkt fort. Alle so entstehende Teilquadrate von k werden wir als Quadrate α bezeichnen. Wir definieren nun eine Fundamentalreihe $\tau_1, \tau_2, \dots$ von eindeutigen und stetigen Transformationen von k wie folgt:

Definition von τ_1 . Sei C_{α_1} eine im Innengebiete von k nicht-abzählbare Punktmenge. Auf Grund des Satzes 3 von § 2 definieren wir τ_1 als eine eindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt des Umfanges von k invariant läßt und C_{α_1} in eine Punktmenge mit Inhalt $> \frac{1}{2}$ überführt. Die Punktmenge, in welche C_ν bzw. I_ν durch τ_1 übergeführt wird, bezeichnen wir mit C'_ν bzw. I'_ν .

Definition von τ_2 . Wir zerlegen I'_{α_1} in solcher Weise in als α_2 zu bezeichnende Quadrate α , deren Größe bei Konvergenz gegen C'_{α_1} aber auch

*) Schoenflies, Bericht über die Mengenlehre II, S. 209—212. Vgl. auch meine Bemerkung dazu in Math. Ann. 68, S. 427, 428.

nur dabei unbeschränkt abnimmt, daß zwei willkürliche Punkte von k , deren Entfernung $\geq \frac{1}{2}$ ist, durch τ_1 in zwei *nicht* zum selben α_2 gehörige Punkte übergeführt werden. Sodann wählen wir eine endliche Menge von als α_2' zu bezeichnenden Quadraten α_2 aus, deren Gesamthalt mehr als $\frac{3}{4}$ des Maßes von I_{α_1}' beträgt. Sei C_{α_2}' eine im Innengebiete jedes α_2' nicht-abzählbare Punktmenge. Auf Grund des Satzes 3 von § 2 definieren wir τ_2 als eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt der Umfänge der α_2' und jeden außerhalb der α_2' liegenden Punkt invariant läßt und C_{α_2}' in eine Punktmenge überführt, deren Inhalt innerhalb jedes α_2' mehr als $\frac{2}{3}$ des Inhaltes dieses α_2' beträgt. Die Punktmenge, in welche C_{α_1}' bzw. I_{α_1}' durch τ_2 übergeführt wird, bezeichnen wir mit C_{α_1}'' bzw. I_{α_1}'' .

Definition von τ_n . Wir zerlegen $I_{\alpha_{n-1}}^{(n-1)}$ in solcher Weise in als α_n zu bezeichnende Quadrate α_n , deren Größe bei Konvergenz gegen $C_{\alpha_{n-1}}^{(n-1)}$ aber auch nur dabei unbeschränkt abnimmt, daß jedes α_n in einem α_{n-1} enthalten ist und zwei willkürliche Punkte von k , deren Entfernung $\geq \frac{1}{2^{n-1}}$ ist, durch $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_{n-1}$ in zwei *nicht* zum selben α_n gehörige Punkte übergeführt werden. Sodann wählen wir eine endliche Menge von als α_n' zu bezeichnenden Quadraten α_n aus, deren Gesamthalt mehr als $\frac{3}{4}$ des Maßes von $I_{\alpha_{n-1}}^{(n-1)}$ beträgt. Sei $C_{\alpha_n'}^{(n-1)}$ eine im Innengebiete jedes α_n' nicht-abzählbare Punktmenge. Auf Grund des Satzes 3 von § 2 definieren wir τ_n als eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt der Umfänge der α_n' und jeden außerhalb der α_n' liegenden Punkt invariant läßt und $C_{\alpha_n'}^{(n-1)}$ in eine Punktmenge überführt, deren Inhalt innerhalb jedes α_n' mehr als $\frac{2}{3}$ des Inhaltes dieses α_n' beträgt. Die Punktmenge, in welche $C_{\alpha_{n-1}}^{(n-1)}$ bzw. $I_{\alpha_{n-1}}^{(n-1)}$ durch τ_n übergeführt wird, bezeichnen wir mit $C_{\alpha_{n-1}}^{(n)}$ bzw. $I_{\alpha_{n-1}}^{(n)}$.

Die Limestransformation von $\tau_1, \tau_1 \cdot \tau_2, \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3, \dots$ ist eine eineindeutige und stetige Transformation τ des Quadrates k in sich, welche C in eine äußere Grenzmenge vom Maß 1 und I in eine innere Grenzmenge vom Maß 0 überführt. Wir formulieren mithin:

Satz 4: *Sei k ein abgeschlossenes Quadrat der Seitenlänge 1, welches in eine überall nicht-abzählbare äußere Grenzmenge C und eine innere Grenzmenge I zerlegt ist; es existiert eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche C in eine Punktmenge vom Maß 1 und I in eine Punktmenge vom Maß 0 überführt.*

Wir denken nunmehr k zerlegt in eine äußere Grenzmenge C und eine überall dichte innere Grenzmenge I . Sei wieder $C = \mathfrak{S}(C_1, C_2, C_3, \dots)$, wobei die abgeschlossene Punktmenge C_ν für jedes ν in der abgeschlossenen Punktmenge $C_{\nu+1}$ enthalten ist, so ist jedes C_ν nirgends dicht. Sei wieder I_ν die Komplementärmenge von C_ν in k .

Wir definieren in folgender Weise eine Fundamentalreihe $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ von eineindeutigen und stetigen Transformationen von k :

Definition von τ_1 . Auf Grund des Satzes 2 von § 2 definieren wir τ_1 als eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt des Umfanges von k invariant läßt und C_1 in eine Punktmenge vom Inhalt Null überführt. Die Punktmenge, in welche C_ν bzw. I_ν durch τ_1 übergeführt wird, bezeichnen wir mit C'_ν bzw. I'_ν .

Definition von τ_2 . Wir zerlegen I'_1 in solcher Weise in als κ_2 zu bezeichnende Quadrate κ , deren Größe bei Konvergenz gegen C'_1 aber auch nur dabei unbeschränkt abnimmt, daß zwei willkürliche Punkte von k , deren Entfernung $\geq \frac{1}{2}$ ist, durch τ_1 in zwei *nicht* zum selben κ_2 gehörige Punkte übergeführt werden. Auf Grund des Satzes 2 von § 2 definieren wir τ_2 als eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt von C'_1 und jeden Punkt der Umfänge der κ_2 invariant läßt und C'_2 in eine Punktmenge überführt, welche innerhalb jedes κ_2 vom Inhalt Null ist. Die Punktmenge, in welche C'_ν bzw. I'_ν durch τ_2 übergeführt wird, bezeichnen wir mit C''_ν bzw. I''_ν .

Definition von τ_n . Wir zerlegen I''_{n-1} in solcher Weise in als κ_n zu bezeichnende Quadrate κ , deren Größe bei Konvergenz gegen C''_{n-1} aber auch nur dabei unbeschränkt abnimmt, daß jedes κ_n in einem κ_{n-1} enthalten ist und zwei willkürliche Punkte von k , deren Entfernung $\geq \frac{1}{2^{n-1}}$ ist, durch $\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_{n-1}$ in zwei *nicht* zum selben κ_n gehörige Punkte übergeführt werden. Auf Grund des Satzes 2 von § 2 definieren wir τ_n als eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche jeden Punkt von C''_{n-1} und jeden Punkt der Umfänge der κ_n invariant läßt und C''_{n-1} in eine Punktmenge überführt, welche innerhalb jedes κ_n vom Inhalt Null ist. Die Punktmenge, in welche $C''_{\nu-1}$ bzw. $I''_{\nu-1}$ durch τ_n übergeführt wird, bezeichnen wir mit $C^{(n)}_\nu$ bzw. $I^{(n)}_\nu$.

Die Limestransformation von $\tau_1, \tau_1 \cdot \tau_2, \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3, \dots$ ist eine eineindeutige und stetige Transformation τ des Quadrates k in sich, welche C in eine äußere Grenzmenge vom Maß 0 und I in eine innere Grenzmenge vom Maß 1 überführt. Wir formulieren mithin:

Satz 5: Sei k ein abgeschlossenes Quadrat der Seitenlänge 1, welches in eine äußere Grenzmenge C und eine überall dichte innere Grenzmenge I

zerlegt ist; es existiert eine eineindeutige und stetige Transformation von k in sich, welche C in eine Punktmenge vom Maß 0 und I in eine Punktmenge vom Maß 1 überführt.

Das Ergebnis dieses Paragraphen kann wie folgt zusammengefaßt werden:

Theorem 2: Sei k ein abgeschlossenes Quadrat der Seitenlänge 1, welches in eine im Innern von k nicht-abzählbare äußere Grenzmenge C und eine im Innern von k nicht-abzählbare innere Grenzmenge I zerlegt ist; bei den eineindeutigen und stetigen Transformationen von k in sich schwankt daß Maß der Punktmengen, in welche I übergeht, zwischen 0 (inklusive) und 1 (inklusive), wenn I überall dicht und C überall nicht-abzählbar ist; zwischen 0 (inklusive) und 1 (exklusive), wenn I nicht überall dicht, aber C überall nicht-abzählbar ist; zwischen 0 (exklusive) und 1 (inklusive), wenn I überall dicht, aber C nicht überall nicht-abzählbar ist; zwischen 0 (exklusive) und 1 (exklusive), wenn weder I überall dicht noch C überall nicht-abzählbar ist.