Instabilitäts- und Hystereseerscheinungen am Wackeltisch.

Von

Josef Weinacht.

Sommerfeld hat in der Phys. Zeitschrift 1901/02 in dem Aufsatz „Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre“ S. 266—271 und 286—291 den Einfluß eines gedämpft schwingenden Fundaments („Wackeltisch“) auf den Gang eines mit konstanter Spannung betriebenen Nebenschlußelektromotors studiert. Er findet experimentell gewisse „kritische“ Punkte, in denen die Tourenzahl bei geringer Steigerung des Vorschaltwiderstandes sich um einen großen Betrag rapid ändert, so daß man also für jede dieser Stellen zwei verschiedene Werte der Tourenzahl erhält. Alle dazwischen liegenden Tourenzahlen sind **instabil**, d. h. sie lassen sich durch keine noch so vorsichtige Änderung des Widerstandes festhalten. Ich habe experimentell und rechnerisch die Erscheinung an einem Nebenschlußmotor, dessen Anker durch einseitige Anbringung eines Stück Eisens asymmetrisch gemacht worden war und dadurch seine Unterlage (einen Tisch) zu gedämpften Schwingungen

Bild 1.

anregte, weiter verfolgt. Es stellte sich dabei heraus, daß die kritischen Stellen Anlaß zu einer weiteren Erscheinung geben, einer Art **Hysterese**, indem die Tourenzahlen, die bei Verringerung des Vorschaltwiderstandes durchlaufen werden, punktwise durchaus nicht dieselben zu sein brauchen wie diejenigen, die sich bei Vergrößerung des Vorschaltwiderstandes ergeben — analog der Hysterese des Eisens auf magnetischem Gebiete. Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Tourenzahl $\frac{\omega}{2\pi}$ als Funktion der in den Motor gehenden Energie auf, so ergibt sich für den Wackeltisch, der Längs-, Torsions- und Membranschwingungen (des Tischblatts!) fähig ist, experimentell nebenstehendes Bild (1). Die Pfeile geben den Sinn, in welchem die Kurve durchlaufen ist; an, die punktierten Teile die kritischen Intervalle $A_1 B_1$, $C_1 D_1$, $C_2 D_2$, $A_2 B_2$ an, wobei $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ zur Längs-, die übrigen zur Torsionsschwingung gehören. Oberhalb und unterhalb dieser Kurve sind zum Vergleiche die Amplituden der Längs- und Torsionsschwingungen, die mitgemessen wurden, als Funktion der der Energie E eingezeichnet. Wir wollen nun im folgenden diesen Sachverhalt auch theoretisch darlegen.

1. Das gekoppelte System. Wir legen unsern Betrachtungen einen Motor von konstantem Felde H der Feldmagnete zugrunde, dessen Tourenzahl durch

einen in den Ankerstromkreis eingeschalteten variablen Widerstand regulierbar sei. Auf der Axe A des Motors sitze ein Exzenter von der Masse m , dessen Schwerpunkt S die Entfernung R von A habe. Die Gerade AS bilde mit der Horizontalen den Winkel φ . Der Motor sei auf einer Unterlage mit der Elastizität ε und der Dämpfung α montiert, von der wir vereinfachend voraussetzen, daß sie nur in der vertikalen Richtung y schwingungsfähig sei. Gesamtmasse des Motors und der Unterlage sei M , Gesamtträgheitsmoment des Ankers und des Exzenter sei T . Bezeichnet ferner w den Widerstand des Ankerstromkreises einschließlich des variablen Widerstands, i seine Stromstärke, P die Klemmspannung des Leitungsnetzes, so können wir die im Ankerstromkreis infolge der Drehung des Ankers induzierte elektromotorische Kraft gleich $k \cdot \dot{\varphi}$ setzen, wo $k = \text{konst.}$; i wird dann durch die Gleichung bestimmt:

$$i \cdot w = P - k \dot{\varphi} \quad (1)$$

Das auf den Anker wirkende Drehmoment kann bei einfachen Verhältnissen gleich $k \cdot i$ gesetzt werden; das Drehmoment der Lagerreibung $= \beta \cdot \dot{\varphi}$. Es ergeben sich dann für das gekoppelte System folgende beiden Differentialgleichungen:

$$M \ddot{y} + \alpha \dot{y} + \varepsilon y + m \cdot R \cdot \frac{d^2}{dt^2} \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

$$T \ddot{\varphi} + \left(\frac{k^2}{w} + \beta \right) \cdot \dot{\varphi} - \frac{k}{w} \cdot P + m \cdot R \ddot{y} \cos \varphi = 0. \quad (3)$$

Die Terme $m \cdot R \frac{d^2}{dt^2} \sin \varphi$ und $m \cdot R \ddot{y} \cos \varphi$ stellen die Koppelungsglieder dar. Sie ergeben sich leicht so: Ein Massenelement dm des Exzenter habe in Bezug auf ein räumlich festes Koordinatensystem mit vertikaler Y-Achse durch die Motorachse A, die Koordinaten (x, Y) ; in Bezug auf ein System, dessen o-Punkt in A liege und also in vertikaler Richtung mitbewegt ist, die Koordinaten (x, η) . Die Entfernung (dm, A) sei r , die Koordinaten der Achse des Motors im festen System (o, y) . Dann ist: $Y = y + \eta$ und die Trägheitsrückwirkung des Exzenter auf die elastische Schwingung: $\int \ddot{Y} dm = \ddot{y} \cdot m + \frac{d^2}{dt^2} \int \eta dm = \ddot{y} \cdot m + m \cdot R \cdot \frac{d^2}{dt^2} \sin \varphi$, da $\frac{1}{m} \int \eta dm$ die η -Koordinate des Schwerpunktes des Exzenter ist.

Ferner ist das rückwirkende Drehmoment auf den Exzenter:

$$\int dm (x \cdot \ddot{Y} - \eta \ddot{x}) = \ddot{y} \int x \cdot dm + \ddot{\varphi} \int r^2 dm = m \cdot R \ddot{y} \cos \varphi + \ddot{\varphi} \int r^2 dm.$$

Die Terme $m \cdot \ddot{y}$ und $\ddot{y} \int r^2 dm$ sind in $M \ddot{y}$ bzw. $T \ddot{\varphi}$ mitberücksichtigt.

Wir wollen (2) und (3) näherungsweise integrieren. Wir bedienen uns dabei der Methode der sukzessiven Approximation und ersetzen demgemäß das vorliegende System durch das folgende:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{y}_n + \alpha \dot{y}_n + \varepsilon y_n + m \cdot R \cdot \frac{d^2}{dt^2} \sin \varphi_n &= 0; \\ T \ddot{\varphi}_{n+1} + \left(\frac{k^2}{w} + \beta \right) \cdot \dot{\varphi}_{n+1} - \frac{k}{w} P + m \cdot R \cdot \ddot{y}_n \cos \varphi_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} n = 1, 2, \dots \end{matrix} \quad \begin{matrix} (2') \\ (3') \end{matrix}$$

Ist φ_n als Funktion von t gegeben, so findet man aus (2') durch Integration nach der Methode der Variation der Konstanten y_n und aus (3') ebenso φ_{n+1} usf. Die Konstanten sind dabei so zu bestimmen, daß für $t = t_0$, y_n und φ_n dieselben Anfangswerte haben, wie die für die strenge Lösung y und φ vorgeschriebenen. Ist zu irgend einer Zeit $t = t_0$: $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, $y = y_0$, $\dot{y}_0 = \dot{y}$, so hat man zu setzen

$\varphi_1 = \dot{\varphi}_0(t - t_0) + \varphi_0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ stellt die strenge Lösung dar, falls der Prozeß konvergiert — und er tut dies offenbar —, mit den vorgeschriebenen Werten φ , $\dot{\varphi}$, y , $\dot{y}$ für irgend eine Zeit $t = t_0$.

Die allgemeine Lösung φ_n und y_n setzt sich aus einem zeitlich rasch abklingenden und aus einem stationären Teile zusammen, in welchem letzterem $\dot{\varphi}$ um einen Mittelwert ω schwankt, und zwar offenbar um so weniger, je größer das Trägheitsmoment T gewählt wird. Diesem stationären Teile wenden wir unsere Aufmerksamkeit zu. Wir wählen also unsere Anfangszeit t_0 sehr groß, so daß wir auf die Abklingungsglieder verzichten können. Als Anfangsgeschwindigkeit für $t = t_0$, die uns ja nicht bekannt ist, wollen wir den Mittelwert ω nehmen — was zudem eine weitere Annäherung bedingen wird — und setzen demgemäß: $\varphi_1 = \omega t$. Es ergibt sich dann einfach:

$$y_1 = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (4)$$

worin nach (2')

$$a = -\frac{m \cdot R \cdot \alpha \cdot \omega^3}{\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2}; \quad b = \frac{m \cdot R \cdot \omega^2 (\varepsilon - M \omega^2)}{\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2}, \quad (5)$$

und weiterhin:

$$\ddot{\varphi}_2 = c_1 + d \cos 2 \omega t + e \sin 2 \omega t, \quad (6)$$

worin nach (3'): c_1 , d , e sich aus den Gleichungen bestimmen:

$$\left(\frac{k^2}{w} + \beta\right) \cdot c_1 - \frac{m}{2} \cdot R \omega^2 a - \frac{k}{w} \cdot P = 0. \quad (7)$$

$$d = \frac{-m^2 R^2 \omega^4}{2(\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2) \cdot \left((2 \omega T)^2 + \left(\frac{k^2}{w} + \beta\right)^2\right)} \left(2 \omega T (\varepsilon - M \omega^2) + \left(\frac{k^2}{w} + \beta\right) \omega \alpha\right) \\ e = \frac{m^2 \cdot R^2 \cdot \omega^4}{2(\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2) \cdot \left((2 \omega T)^2 + \left(\frac{k^2}{w} + \beta\right)^2\right)} \left(\left(\frac{k^2}{w} + \beta\right)(\varepsilon - M \omega^2) - 2 \omega^2 \alpha \cdot T\right) \quad (8)$$

Aus dem Folgenden wird hervorgehen, daß die Näherung (6), wenn T groß ist vollkommen ausreicht, so daß also nach (6) c_1 als unser Mittelwert ω anzusprechen ist. Einsetzen von (5) in (7) ergibt dann für die Abhängigkeit zwischen w und ω die Gleichung:

$$\left(\frac{k^2}{w} + \beta\right) \omega + \frac{m^2 \cdot R^2 \cdot \alpha \cdot \omega^5}{2(\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2)} - \frac{k}{w} \cdot P = 0. \quad (9)$$

2. Diskussion der Lösung. Schwingung (4) hat die Amplitude:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{m \cdot R \cdot \omega^2}{\sqrt{(\omega \alpha)^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2}}. \quad (10)$$

Da nun

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{m \cdot R \cdot \omega}{\sqrt{(\omega \alpha)^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2}^3} (2 \varepsilon^2 - \omega^2 (2 M \varepsilon - \alpha^2))$$

so steigt A von $A = 0$ bei $\omega = 0$, hier die ω -Achse berührend zu einem Maximum für:

$$\omega_m^2 = \frac{2 \varepsilon^2}{2 M \varepsilon - \alpha^2}; \quad A_{\max} = \frac{2 m R \varepsilon}{\alpha \sqrt{4 M \varepsilon - \alpha^2}} \quad (11)$$

(welches von dem Maximum der Eigenschwingung $\omega_0^2 = \frac{4 M \varepsilon - \alpha^2}{4 M^2}$ verschieden ist) an, falls $2 M \varepsilon - \alpha^2 > 0$, um sich darauf, ständig abnehmend, asymptotisch dem Werte $\frac{m \cdot R}{M}$ zu nähern. Ist $2 M \varepsilon - \alpha^2 \leq 0$, so wächst A stets von $A = 0$ bis $A = \frac{m \cdot R}{M}$ (s. Bild 2). Wir setzen voraus: $2 M \varepsilon - \alpha^2 > 0$.

Gleichung (9) läßt sich nun auch so schreiben:

$$\frac{k}{w} (P - k w) = \beta w + \frac{1}{2} \frac{m^2 R^2 \alpha w^5}{\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2} = \beta w + \frac{1}{2} \alpha w \cdot A^2. \quad (9a)$$

Nach (1) ist nun offenbar stets $P - k w > 0$; $P - k w$ nimmt also mit wachsendem w , absolut genommen, ab, die rechte Seite aber bis ω_m sicherlich zu, somit w in dem Intervalle $(0, \omega_m)$ ab. Die Extremwerte für w ($\frac{dw}{d\omega} = 0$) ergeben sich aus der Gleichung, die durch Differentiation von 9a nach ω und Elimination von w folgt:

$$(5 \varepsilon^2 - 3 \omega^2 (2 M \varepsilon - \alpha^2) + M^2 \omega^4) + \frac{2 \cdot k w}{P} (\omega^2 (2 M \varepsilon - \alpha^2) - 2 \varepsilon^2) + \frac{2 \beta}{\omega^4 m^2 R^2 \alpha} (\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2)^2 = 0, \quad (12)$$

die also für $\omega \leq \omega_m$ keine positive Wurzel haben kann; soll sie überhaupt solche haben, so muß der erste Klammerausdruck negativ werden können (der zweite und dritte Term ist nämlich notwendig > 0 für $\omega > \omega_m$), d. h.

Bild 2.

Bild 3.

$$5 \varepsilon^2 - 3 \omega^2 (2 M \varepsilon - \alpha^2) + M^2 \omega^4 = 0$$

muß reelle, verschiedene Wurzeln ω_1, ω_2 haben:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3}{2} \frac{2 M \varepsilon - \alpha^2}{M^2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2} \frac{2 M \varepsilon - \alpha^2}{M^2} \right)^2 - 5 \frac{\varepsilon^2}{M^2}}$$

Die Wurzeln sind reell, wenn:

$$2 (3 - \sqrt{5}) M \varepsilon - 3 \alpha^2 > 0. \quad (13)$$

ω_1 und ω_2 liegen oberhalb ω_m ¹⁾.

Gleichung (12) ist vom 8. Grade in ω , schreibt man sie nach fallenden Potenzen von ω geordnet, so ersieht man, daß sie vier Vorzeichenwechsel, somit nach einem Satze der Algebra höchstens vier positive Wurzeln hat, oder eine gerade Anzahl

¹⁾ Denn wäre $\omega_m^2 > \omega_1^2$, so

$$\frac{2 \varepsilon^2}{2 M \varepsilon - \alpha^2} > \frac{3}{2} \frac{2 M \varepsilon - \alpha^2}{M^2} - \sqrt{\left(\frac{3}{2} \frac{2 M \varepsilon - \alpha^2}{M^2} \right)^2 - 5 \frac{\varepsilon^2}{M^2}},$$

und da:

$$\frac{3}{2} \frac{2 M \varepsilon - \alpha^2}{M^2} > \frac{2 \varepsilon^2}{2 M \varepsilon - \alpha^2}, \text{ da ja } 3 (2 M \varepsilon - \alpha^2)^2 > 4 \varepsilon^2 M^2 \text{ und: } 2 (\sqrt{3} - 1) M \varepsilon > \sqrt{3} \alpha^2 \text{ (nach (13))},$$

so müßte auch:

$$\left(\frac{3}{2} \left(\frac{2 M \varepsilon - \alpha^2}{M^2} \right) - \frac{2 \varepsilon^2}{2 M \varepsilon - \alpha^2} \right)^2 < \left(\frac{3}{2} \frac{2 M \varepsilon - \alpha^2}{M^2} \right)^2 - 5 \frac{\varepsilon^2}{M^2}$$

und nach Ausrechnung: $(2 M \varepsilon - \alpha^2)^2 > 4 \varepsilon^2 M^2$, was unmöglich ist.

weniger. Ich behaupte: (12) kann nur 2 positive Wurzeln haben. Wir betrachten zu dem Zwecke die beiden Kurven:

$$-y = 5\varepsilon^2 - 3\omega^2(2M\varepsilon - \alpha^2) + M^2\omega^4 \quad (14a)$$

$$y = 2\frac{k}{P}\omega((2M\varepsilon - \alpha^2)\omega^2 - 2\varepsilon^2) + \frac{2\beta}{m^2R^2\alpha\omega^4}(\omega^2\alpha^2 + (\varepsilon - M\omega^2)^2) \quad (14b)$$

im Intervalle (ω_1, ω_2) , deren Schnittpunkte offenbar die Wurzeln von (12) ergeben. Die Kurve (14a) steigt von $y=0$ bei $\omega=\omega_1$ zu einem Maximum für

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \frac{2M\varepsilon - \alpha^2}{M^2}, \quad y = \frac{9(2M\varepsilon - \alpha^2)^2 - 20M^2\varepsilon^2}{4M^4} \sim 4 \frac{\varepsilon^2}{M^2} (\alpha^2 \ll 2M\varepsilon),$$

um dann rasch gegen 0 herabzusinken für $\omega=\omega_2$. Sie hat innerhalb (ω_1, ω_2) keinen Wendepunkt; der einzig vorhandene liegt bei

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{2M\varepsilon - \alpha^2}{M^2} < \omega_m^2 = \frac{2\varepsilon^2}{2M\varepsilon - \alpha^2}.$$

Die Kurve wendet also in (ω_1, ω_2) der ω -Axe ihre konkave Seite zu. Siehe Bild 3.

Ähnlich, aber nach der entgegengesetzten Seite verhält sich auch die Kurve (14b). Denn der erste Term von (14b) wächst monoton mit $\omega > \omega_m$; ebenso der zweite Term, der sich bis auf einen konstanten positiven Faktor in der Form $\frac{\omega^4}{A^4}$ schreiben läßt (vgl. (10)), A aber für $\omega > \omega_m$ abnimmt (s. Bild 2). (14b) hat ferner ebensowenig wie (14a) einen Wendepunkt innerhalb (ω_1, ω_2) ; es ist nämlich:

$$y'' = 12\frac{k}{P}\omega(2M\varepsilon - \alpha^2) + \frac{8\beta}{m^2R^2\alpha} \left(5\frac{\varepsilon^4}{\omega^6} + 3M^4\omega^2 - 3\frac{\varepsilon^2}{\omega^4}(2M\varepsilon - \alpha^2) - M^2(2M\varepsilon - \alpha^2) \right)$$

Der erste Term ist nun positiv; setzen wir aber im zweiten Terme

$$\omega^2 = x \cdot \frac{\varepsilon}{M},$$

so wird dieser bis auf einen positiven Faktor:

$$\frac{M\varepsilon}{x^5} (3x^4 - 2x^3 - 6x + 5) + \alpha^2 \left(\frac{3}{x^2} + 1 \right) = \frac{M\varepsilon}{x^5} (x-1)^2 (3x^2 + 4x + 5) + \alpha^2 \left(\frac{3}{x^2} + 1 \right)$$

somit also ebenfalls positiv. Wir haben also bei (14b) $y'' > 0$, die Kurve ist konvex und steigt von einem positiven Werte y für $\omega=\omega_1$ an.

Zwei derartige Kurven können sich aber in höchstens 2 Punkten schneiden, deren Abszissen die Wurzeln von (12) sind: ω_3 und ω_4 . $w \cdot z \cdot b \cdot w$. Die wirkliche Existenz der Wurzeln hängt wesentlich vom Kleinheitsgrade von k und β ab. Je kleiner k und β sind, um so flacher wird (14b) und nähert sich mehr und mehr der Geraden $y=0$. ω_3 und ω_4 rücken dann auseinander, so daß ω_1 und ω_2 als Grenzlagen der Wurzeln erscheinen. Ist β sehr klein und steigt (14b) nicht zu rasch an, so wird ω_3 nahe ω_1 liegen.

Kehren wir nun zum Widerstand w , betrachtet als Funktion von ω , zurück¹⁾, so nimmt also w mit ω zunächst ab, hat ein Minimum und darauf ein Maximum bei den Punkten B bzw. C', um von nun an mit wachsendem ω weiter abzunehmen, falls Gleichung (12) zwei reelle positive Wurzeln hat (s. Bild 4). Existieren diese Wurzeln nicht, indem z. B. die notwendige Bedingung (13) nicht erfüllt ist, so fällt w mit wachsendem ω monoton ab.

¹⁾ Wir betrachten hier ω als Funktion von w ; ebenso hätten wir auch die Spannung P als unabhängige Variable wählen können, indem wir die Tourenzahl durch Variation der Spannung und nicht des Widerstandes regeln. Das Ergebnis ist rechnerisch das gleiche; denn die Größe k ist dem Felde H der Feldmagnete und somit auch P proportional, so daß in unseren Gleichungen es nur auf die Variation von $\frac{P^2}{w}$ ankommt. Wesentlich für das Folgende ist, daß man als unabhängige Variable eine Größe wählt, deren Wahl man fest in der Hand hat, was von der Stromstärke nicht gilt, da sie nach (1) noch von φ abhängt.

3. Schlußfolgerung auf Instabilität und Hysterese. Denken wir uns nun, von hohem Widerstande ausgehend, diesen allmählich ausgeschaltet, so läuft ω zunächst auf dem Aste A über B' bis B — wir betrachten also den Fall, wo ω_3 und ω_4 vorhanden sind — wird aber hier von B nach C übergehen müssen und dann auf dem zweiten Aste sich von C bis D bewegen. Der Übergang von B nach C geschieht offenbar dadurch, daß die Tourenzahl in B instabil wird und die von uns nicht betrachteten Abklingungsglieder, die ja den Übergang von einem stationären Zustand zum andern vermitteln, ein mit der Zeit rapid anwachsendes Verhalten zeigen. Schalten wir nun aber wieder Widerstand ein, so läuft ω auf dem zweiten Ast von D über C bis C' und „springt“ hier nach dem Punkte B' des ersten Astes über, um nach A zurückzukehren. Die Extrema B und C' sind somit die kritischen Punkte, B C und B' C' die kritischen Intervalle. Zugleich sieht man, daß mit der Instabilität eine Hysterese verknüpft ist: auf dem Hinwege wird die Kurve A B' B C D auf dem Rückwege D C C' B' A durchlaufen. Die Hystereseschleife ist B' B C C'. — Diese Hysterese ist von der des Ferromagnetismus insofern verschieden, als sie an ein bestimmtes Intervall für w gebunden ist: $w(\omega_3)$, $w(\omega_4)$. Nach (1) folgt noch, daß an den kritischen Stellen die Stromstärke sinkt bzw. steigt.

Bild 4.

Daß nun auch die Kurve, die die Abhängigkeit der Tourenzahl von der in Arbeit umgesetzten elektrischen Energie $E = P \cdot i - i^2 w$ oder:

$$E = \frac{1}{2} \frac{m^2 R^2 \alpha \cdot \omega^6}{\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2} + \beta \omega^2$$

solche kritische Punkte und Intervalle, ferner eine Hysterese zeigen muß, ist klar. Man bekommt leicht eine Vorstellung von der Gestalt dieser Kurve, wenn man bedenkt, daß sie innerhalb der Parabel $y = \beta \omega^2$ verläuft, ferner daß

$$E = \frac{1}{2} \alpha A^2 \omega^2 + \beta \omega^2$$

ist; sie kann unter Umständen auch Maxima und Minima haben. Die Untersuchung ist der obigen ganz analog; wir unterdrücken sie daher.

Hat aber die Gleichung (12) keine positiven verschiedenen Wurzeln, so fallen die Instabilitäts- und damit die Hystereseerscheinungen weg.

Praktisch lagen bei mir nun folgende Daten vor:

$$M = 6,76 \cdot 10^4 \text{ g}; \quad T = 5 \cdot 10^4 \text{ g cm}^2; \quad m = 310 \text{ g}; \quad R = 4,5 \text{ cm}; \quad \omega_m = 5,6;$$

$$A_m = 0,17 \text{ cm}; \quad \varepsilon = 2,12 \cdot 10^6 \text{ g} \cdot \text{sec}^{-2}. \quad \alpha^2 = 2,11 \cdot 10^9 (\text{g} \cdot \text{sec}^{-1})^2.$$

(ε und α^2 wurden aus 11 berechnet.) Aus (8) folgt dann

$$\sqrt{d^2 + e^2} = \frac{1}{2} \frac{m^2 R^2 \omega^4}{(\omega^2 \alpha^2 + (\varepsilon - M \omega^2)^2)^{1/2} \left((2 \omega T)^2 + \left(\frac{k^2}{w} + \beta \right)^2 \right)^{1/2}} < \frac{A_m}{4} \cdot \frac{m \cdot R}{T} \cdot \omega$$

$$< 0,0015 \omega.$$

Die Schwankung ist also wirklich recht gering. Die Höchsttourenzahlen waren etwa 30 p. sec. Da ferner $P = 110 \text{ Volt} = \frac{110}{300} \text{ abs}$; $k < \frac{110}{300 \cdot \omega} < \frac{110}{300 \cdot 30 \cdot 2 \pi}$; ferner β sicherlich ebenfalls sehr klein und $\frac{\alpha^2}{M \varepsilon} = 1,47 \cdot 10^{-2}$, so waren alle Bedingungen erfüllt, unter denen Instabilität eintritt. Da überdies die Extreme der Amplituden der Längs- und Torsionsschwingungen weit auseinander lagen, so dürfen wir die oben entwickelten Formeln auf die Umgebung der Maxima anwenden. Wir finden auch in der Tat alles in schönster Übereinstimmung: Kurz nach dem Maximum der erzwungenen Schwingung kam ein kritischer Punkt, bei welchem die Tourenzahl nahe auf das Doppelte stieg; wollte man diese wieder erniedrigen, so mußte man merklich mit dem Widerstande zulegen, bis beim zweiten kritischen Punkte die Tourenzahl wieder zurückging. Was die Hysterese angeht, so ist es klar, daß die Vielheit der Eigenschwingungen die Erscheinung komplizieren muß. Immerhin erkennt man in Bild 1 die Tendenz der Kurve, für den Rückweg nach einem kritischen Intervall sich der Hinwegkurve zu nähern.

Zusammenfassung.

1. Das gekoppelte gedämpfte System (2), (3) läßt sich zwar in geschlossener Form nicht integrieren; aber bei genügend groß gewähltem Trägheitsmoment läßt sich die Lösung ausreichend genau durch (4) und (6) darstellen, wenn man den stationären Teil derselben allein betrachtet.

2. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ des Motors schwankt im stationären Teil um weniger als $\frac{A_m}{4} \cdot \frac{m \cdot R}{T} \cdot \omega$ um den Mittelwert ω .

3. Zwischen dem Mittelwert ω und dem Widerstand w besteht eine algebraische Beziehung 6. Grades; w als Funktion von ω betrachtet kann unter der notwendigen Bedingung $2 \cdot (3 - \sqrt{5}) M \varepsilon - 3 \alpha^2 > 0$ zwei Extrema haben (nämlich dann, wenn Gleichung (12) zwei positive Wurzeln hat), die Punkte der Instabilität darstellen.

4. Diese Instabilitätsstellen bedingen eine Hysterese, die an ein bestimmtes, durch jene festgelegtes Intervall geknüpft ist.

5. Hat Gleichung (12) keine positiven Wurzeln, wofür hinreichend ist, daß $2(3 - \sqrt{5}) M \varepsilon - 3 \alpha^2 \leq 0$, so fallen Instabilitätsstellen und Hysterese weg.

Herrn Geheimrat Sommerfeld bin ich für das lebhafteste Interesse, das er am Fortgang der Arbeit nahm, für zahlreiche Winke und Ratschläge zu großem Dank verpflichtet.