**3. Die Doppelbrechung optischer Gläser
in Abhängigkeit von ihrer
chemischen Zusammensetzung und der Form;
von E. Zschimmer und H. Schulz.**

(Hierzu Taf. II.)

Mit der Vervollkommenung optischer Systeme sowohl bezüglich ihres Korrektionszustandes als auch ihrer bisherigen Abmessungen steigen die Ansprüche an die Beschaffenheit der zur Herstellung verwendeten Rohmaterialien, der optischen Gläser. Die vorliegende Arbeit, welche teils im Glaswerk Schott u. Gen., Jena, teils in der Optischen Anstalt C. P. Goerz, Friedenau, ausgeführt wurde, soll einen Versuch darstellen, die akzidentelle Doppelbrechung des optischen Gläser, welche beim Härtingsprozeß auftritt, in ihrer Abhängigkeit von der Härtingstemperatur, der chemischen Zusammensetzung des Glases und der Form des Versuchsstückes zu ermitteln.

1. Vorhergehende Beobachtungen.

Die Hauptzahl aller Beobachtungen über akzidentelle Doppelbrechung des Glases bezieht sich naturgemäß auf diejenigen Fälle, in denen die Doppelbrechung durch mechanische Einflüsse hervorgerufen wird, und zwar auf Fälle, welche einer theoretischen Behandlung des Zusammenhanges zwischen den auftretenden Kräften und der resultierenden Doppelbrechung zugänglich sind.

Biot zeigte 1820, daß eine schmale Glasplatte, welche durch Reiben mit einem feuchten Tuch in Schwingungen versetzt wird, auf polarisiertes Licht einen Einfluß ausübt, wie ein parallel der optischen Achse geschnittener einachsiger Kristall. Die Achsengröße bzw. die Werte der Hauptachsen variieren dabei mit der gleichen zeitlichen und räumlichen Periode, wie die Deformationen. Der experimentelle Nachweis

Fig. 12.

Fig. 19.

der zeitlichen Periode wurde jedoch erst von Kundt¹⁾ geführt, welcher sie mit Hilfe eines rotierenden Spiegels beobachtete und ferner zeigte, daß die Glasplatte bei Ausdehnung das Verhalten eines optisch positiven Kristalles (Bergkristall) zeigt, beim Zusammenziehen sich dagegen wie ein optisch negativer Kristall (Kalkspat) verhält. Die letzteren Eigenschaften waren für Spiegelglas bereits durch Neumann²⁾ in seiner klassischen Arbeit nachgewiesen.

Neumann stellt zum Zwecke der theoretischen Behandlung die Grundsätze auf, daß für gespannte isotrope Körper, solange deren Spannung ein gewisses Maß nicht überschreitet, die Bahnen der Lichtstrahlen im Körper bei der Berechnung der Interferenzerscheinung als geradlinig betrachtet werden können. — Ferner kann für die nach dem Austritt interferierenden Strahlen angenommen werden, daß sie den gespannten Körper in gleicher Richtung durchsetzt haben.

Es sind diese Postulate gleichbedeutend mit folgender Behandlung des Problems:

Nimmt man an, daß ein ungleichförmig dilatierter Körper aufzufassen ist als ein Aggregat von unendlich vielen, unendlich kleinen gleichförmig dilatierten Elementen, welche sich also in optischer Beziehung wie doppelbrechende Kristalle verhalten, so wird die Lage und Größe der optischen Achse in diesen Teilchen eine Funktion des Ortes sein. Werden nun die Unterschiede der Elastizitätsachse benachbarter Teile als so klein angenommen, daß die zweiten und höheren Potenzen als verschwindend klein gegen die erste betrachtet werden können, so ergeben sich die oben angeführten Postulate. Die Hauptlichtgeschwindigkeiten A , B , C in einem bestimmten Element sind dann darstellbar in der Form:

$$A = G + q\alpha + p\beta + p\gamma,$$

$$B = G + p\alpha + q\beta + p\gamma,$$

$$C = G + p\alpha + p\beta + q\gamma,$$

wo G die Lichtgeschwindigkeit im isotropen Körper darstellt, α , β , γ die Hauptdilatationen und p , q Konstanten sind. Die

1) A. Kundt, Pogg. Ann. 123, p. 541. 1864.

2) F. E. Neumann, Die Gesetze der Doppelbrechung des Lichtes, Abb. d. Kgl. Akad. d. Wiss. Berlin 1843.

Ermittelung der Konstanten p und q auf experimentellem Wege ist in einfachster Weise für eine gleichförmige Deformation möglich, wenn die Elastizitätskonstante μ , das Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation bekannt ist. Neumann nimmt für μ den Wert $1/4$ und gelangt dann zu den Werten

$$p = -0,131,$$

$$q = -0,213,$$

wenn die Lichtgeschwindigkeit in Luft als Einheit angenommen wird. Seine Beobachtungen ergeben, daß die „Wellenfläche“ des Glases bei Kompression derjenigen eines optisch negativen Kristalles gleicht. Der Begriff „Wellenfläche“ ist hierbei, wie auch im folgenden, nur zulässig, wenn man ihn auf ein so kleines Volumelement bezieht, daß innerhalb dieses Volumelementes die Größe und Richtung der optischen Elastizitätsachsen als konstant betrachtet werden kann.

Soweit die Verteilung der elastischen Kräfte innerhalb der Körper bekannt ist, läßt sich mit Hilfe obiger Formeln stets die resultierende Doppelbrechung berechnen. Unter Verwendung der Neumannschen Formeln prüften Mach¹⁾ und Pockels²⁾ die von Neumann erhaltenen Werte nach etwas abweichenden Methoden, unter Berücksichtigung von genaueren Werten für die Elastizitätskonstante μ , und fanden hinreichende Übereinstimmung mit den Neumannschen Werten.

Diese Arbeiten, ebenso wie die Untersuchungen von W. König³⁾, bestätigen die Gültigkeit der Neumannschen Theorien in weitestem Umfange. Für die charakteristische Konstante des Glases, welche die Änderung des Brechungsexponenten bei reiner Volumdilatation bzw. -kompression angibt, erhält König aus den Versuchen an einer schwingenden Glasplatte

$$K = 0,162,$$

1) E. Mach, *Optisch-akustische Versuche*, Prag 1873.

2) F. Pockels, *Wied. Ann.* **37.** p. 390—391. 1889; *Ann. d. Phys.* **7.** p. 745—771. 1902; **9.** p. 220—223. 1902.

3) W. König, *Ann. d. Phys.* **4.** p. 1—40. 1901; **11.** p. 842—866. 1903.

während nach Neumann

$$K = 0,157$$

war, und die von Mach und Pockels angegebenen Werte

$$K = 0,168 \quad \text{bzw.} \quad K = 0,174$$

waren.

Die ungleichförmige Doppelbrechung, wie sie durch den schnellen Abkühlungsprozeß beim Glase hervorgerufen wird, ist nach der Neumannschen Methode kaum zu behandeln, da die Endausdrücke auch unter der Annahme einfachster Verhältnisse, d. h. z. B. einer Glaskugel, wie sie Neumann im letzten Teil seines Werkes behandelt, so unübersichtlich werden, daß günstigstenfalls qualitative Angaben über die Verteilung der Doppelbrechung auf diesem Wege gewonnen werden können. Es ist dies darauf zurückzuführen, daß bei diesem Abkühlungsvorgang eine Reihe von Einflüssen tätig ist, deren Berücksichtigung mit äußersten Schwierigkeiten verknüpft ist, zumal über die Abhängigkeit der einzelnen Faktoren von Temperatur und Druck nur sehr wenig bekannt ist. Einen der wesentlichsten Einflüsse beispielsweise, nämlich den Einfluß der inneren Reibung, hat Neumann bei seiner Ableitung völlig unberücksichtigt gelassen, was bei Temperaturen in der Nähe der Zimmertemperatur zweifellos gestattet ist, nicht aber bei höheren Temperaturen, wie sie beim Härtingsprozeß des Glases auftreten.

Die Verteilung der Doppelbrechung in gehärteten Glasstücken wurde untersucht von Macé de l'Épinay.¹⁾ Er zeigte, daß schnell gekühlte Glasplatten am Rande negative, im zentralen Teil dagegen positive Doppelbrechung besitzen, daß also die äußeren Partien eines schnell gekühlten Glasstückes komprimiert sind, während die inneren Zonen dilatiert sind. Die Doppelbrechung wird in ihrer Abhängigkeit vom Orte durch die Gleichung

$$y = A(e^{ax} + e^{-ax} + 2)$$

dargestellt, wo x den Abstand des betrachteten Punktes von der Mitte darstellt. Auch die Czapskischen²⁾ Untersuchungen

1) Macé de l'Épinay, Ann. d. Chim. et d. Phys. 19. p. 5. 1880.

2) S. Czapski, Wied. Ann. 42. p. 319. 1891.

ergeben für schnell gekühltes Glas das Auftreten der Druck- und Zugzonen. Zwischen beiden muß naturgemäß eine neutrale Zone vorhanden sein, in der keine elastischen Kräfte vorhanden sind. Der Grund für das Auftreten der neutralen Zone ergibt sich durch folgende Überlegung:

Wird der Körper von einer hohen Temperatur aus abgekühlt, so werden zunächst die äußeren Zonen eine geringere Temperatur annehmen und sich dabei merklich zusammenziehen. Es wird also zunächst ein Druck auf die den äußeren Schichten benachbart liegenden ausgeübt. Beim weiteren Abkühlen der Masse und der damit verbundenen Volumenverminderung des Körperinnern wird ein Stadium erreicht, bei welchem die inneren Zonen sich so stark zusammenziehen, daß ihr Volumen einen kleineren Raum einzunehmen strebt, als er durch die nun als starr zu betrachtenden äußeren Schichten bedingt ist. Es muß somit beim weiteren Abkühlen im Innern eine Zugspannung eintreten. Zwischen den Zonen der Zugspannung und Druckspannung wird eine spannungsfreie neutrale Zone vorhanden sein. Czapski ging in folgender Weise vor:

Eine Glasplatte, welche ziemlich schnell gekühlt war, wurde an den Schmalseiten angeschliffen und zwischen Nicols beobachtet. Es zeigte sich ein System ziemlich gerader, nahezu horizontaler Interferenzstreifen, welche im natürlichen Licht farbig erschienen. Symmetrisch zur Mitte der Platte erschienen zwei achromatische Streifen. Diese entsprachen den neutralen Zonen im Glase.

Da nun der Gangunterschied der Hauptkomponenten, d. h. der Schwingungen parallel und senkrecht zur Streifenrichtung, um eine Wellenlänge von Streifen zu Streifen variiert, so läßt sich auf diese Weise die Größe der Doppelbrechung durch Beobachtung der Interferenzstreifen ermitteln. Zur Kontrolle dieser Beobachtungen benutzte Czapski eine dioptrische Methode. Die gespannte Platte läßt sich als geschichtetes Medium auffassen. Es werden somit die Strahlen, welche parallel zu den Schichtengrenzen einfallen, gekrümmt, und die durch die Krümmung der Strahlen hervorgerufene Bildortänderung kann zur Ermittlung der Größe des Spannungsgradienten benutzt

werden. Der Gangunterschied für Natriumlicht ergab am Rande der Platte für

$$\text{Kronglas } \Delta n = 429 \cdot 10^{-7},$$

$$\text{Flintglas } \Delta n = 339 \cdot 10^{-7}$$

nach der Interferenzmethode, während die dioptrische Prüfung in guter Übereinstimmung hiermit ergab:

$$\text{Kronglas } \Delta n = 446 \cdot 10^{-7},$$

$$\text{Flintglas } \Delta n = 293 \cdot 10^{-7}.$$

Über den Ausgleich der Spannung in schnell gekühlten Gläsern wurde von Schott¹⁾ eine Reihe von Versuchen angestellt, welche ihn zu dem Resultat führten, daß die Erweichungstemperaturen sämtlicher Gläser zwischen 370 und 465° liegen. Jedoch wurde in einer späteren Abhandlung²⁾ gezeigt, daß bei genügend großer Anfangsspannung schon bei 100° ein merklicher Ausgleich der Spannung erfolgt, daß also bereits bei dieser Temperatur der Wert der Relaxationszeit in der Größenordnung von Stunden liegt. Es traten bereits innerhalb 1½ Stunden meßbare Verschiebungen ein, welche durch eine innere Entspannung hervorgerufen worden waren.

2. Plan der Untersuchung.

In den oben angeführten Arbeiten ist also noch kein ausreichendes Material gegeben, um die Gesetze der akzidentellen Doppelbrechung, welche durch den Kühlprozeß im Glase hervorgerufen wird, abzuleiten. Nur die Arbeit von Macé de l'Épinay enthält zahlenmäßige Angaben über die Verteilung der Spannung, dagegen hat der Einfluß der Kühltemperatur, sowie derjenige der inneren Reibung noch keine Berücksichtigung gefunden.

Die Schwierigkeit einer theoretischen Bearbeitung des Problems ist erklärlich, wenn man bedenkt, daß die während des Härtingsprozesses auftretenden Spannungen von folgenden Faktoren abhängen, deren Verhalten innerhalb des in Frage kommenden Temperatur- und Druckgebietes noch nicht bekannt ist:

1) O. Schott, Zeitschr. f. Instrumentenk. 11. p. 330. 1891.

2) O. Schott, Vortr. im Ver. z. Bef. d. Gewerbeleißes, 4. April 1892.

1. Koeffizienten der inneren und äußeren Wärmeleitfähigkeit bei verschiedener Zusammensetzung des Glases.
2. Spezifische Wärme.
3. Ausdehnungskoeffizient.
4. Elastizitätskonstanten.
5. Innere Reibung.

Es muß also zunächst ein ausreichendes experimentelles Material gesammelt werden, an Hand dessen die für eine theoretische Bearbeitung erforderlichen Voraussetzungen exakt geprüft werden können.

Der Plan der Untersuchung ist bereits an anderer Stelle angegeben worden.¹⁾ Es sind unter Voraussetzung einer bestimmten Form folgende Fragen durch Messung von Temperatur, Zeit und Doppelbrechung zu beantworten:

1. Für ein gegebenes Glas muß ermittelt werden, wie groß die bei verschiedenen Temperaturen erregte mittlere Doppelbrechung ist, wenn der spannungsfreie Versuchskörper plötzlich aus dem Raum von der Temperatur τ in einen Raum von 20° C. gebracht wird, wo er sich gleichmäßig abkühlt.

2. Die Abhängigkeit der so erregten Doppelbrechung von der Erregungs- oder Spannungstemperatur τ soll für verschiedene Gläser bestimmt werden und dadurch erkannt werden, welchen Einfluß die chemische Zusammensetzung auf die Gestalt der Spannungskurve hat.

3. Von einer Glasart werden mehrere Stücke auf einen ausgewählten Größenwert der Doppelbrechung (der durch Interpolation zu finden ist) gebracht (durch plötzliche Abkühlung bei derselben, aus den Kurven entnommenen Temperatur τ). Hierauf werden für dieses Glas die Zeiten gemessen, welche nötig sind, um bei verschiedenen Temperaturen die vorhandene Doppelbrechung auf einen gewissen Restbetrag herabzudrücken (bzw. zum völligen Verschwinden zu bringen).

Durch letztere Versuchsreihe ist es möglich, den Koeffizienten der inneren Reibung in Abhängigkeit von Temperatur und chemischer Zusammensetzung zu bestimmen.

Sind diese Abhängigkeiten bekannt, so läßt sich daraus in sehr einfacher Weise der Prozeß der Abkühlung für jede

1) E. Zschimmer, Arch. f. Physik. Chem. d. Glases 1. p. 5 u. 9. 1912.

Glasart im voraus bestimmen, wenn überdies noch die Abhängigkeit der Spannung von der Form der gekühlten Stücke durch eine besondere Untersuchung ermittelt wird.

Da für diesen Zweck mit sehr großen Temperaturdifferenzen bzw. mit sehr schneller Abkühlung gerechnet werden mußte, so ergab sich die Notwendigkeit, die zur Untersuchung benutzten Glasstücke möglichst klein zu gestalten. Andererseits leidet unter Kleinheit der Untersuchungsstücke zweifellos die Genauigkeit der Untersuchung insofern, als der durch die Doppelbrechung hervorgerufene Gangunterschied, welcher als Maß für die Doppelbrechung benutzt wird, direkt proportional der Dicke der durchlaufenen Glasschicht ist. Nach einer großen Anzahl von Vorversuchen gelang es, eine Form für die Versuchsstücke zu finden, welche einerseits klein genug war, um auch den größten Temperaturdifferenzen bei schneller Kühlung folgen zu können, ohne durch innere Spannungen zersprengt zu werden; andererseits aber eine genügende Länge des Glasweges aufwies, um den Einfluß der Meßfehler bei der Bestimmung der Doppelbrechung genügend klein zu halten.

Die Versuchsstücke wurden in Form kleiner Stäbchen von den Abmessungen $4 \times 4 \times 24$ mm hergestellt, deren quadratische Endflächen plangeschliffen und poliert waren. Außerdem wurde zur Bestimmung der Abhängigkeit von der Form eine Reihe von Versuchsstücken hergestellt, deren Länge 4, 8, 16, 20 und 24 mm betrug, während der Querschnitt stets 4×4 mm betrug. Zum gleichen Zwecke dienten ferner kleine Würfel aus demselben Glas von 5 bzw. 6 mm Kantenlänge. Alle Stücke, welche zur Bestimmung der Abhängigkeit von der Form des Versuchsstückes dienten, waren bei gleicher Temperatur gespannt.

Die Anzahl der Versuchsstücke für jedes Glas betrug wenigstens drei. Bei einigen Gläsern waren Versuchsstücke in größerer Anzahl vorhanden. Die Bleigläser O 340, O 378, O 118, O 102, O 41 und O 198 wurden besonders eingehend untersucht; es wurden für diese Glasarten zahlreiche Stäbchen hergestellt, so daß die Abhängigkeit der erzeugten Spannung von der Kühltemperatur durch zahlreiche Messungen festgelegt werden konnte.

3. Apparat zur Erregung der Spannung (Härtung).

Die Einrichtung (Fig. 1) zur Erregung, Aufhebung und gleichzeitigen Beobachtung der Spannung im polarisierten Licht besteht aus zwei Teilen: Dem *elektrisch geheizten Röhrenofen* und dem zu photographischen Aufnahmen wie zur visuellen Beobachtung dienenden *Polarisationsapparat*.

1. Der *Ofen* besteht aus einem horizontalen Porzellanrohr *Po* von 20 mm Öffnung, welches mit 0,6 mm starkem

Apparat zur Spannung und Entspannung der Gläser, mit Polarisations-einrichtung zur Beobachtung der Doppelbrechung nach O. Henker.

Fig. 1.

Platindraht in einer gleichmäßigen Spirale *Sp* umwickelt ist. Es ruht in zwei Rohrstützen aus Eisenblech, an welchen der Heizdraht befestigt ist. Die Stirnwände des viereckigen, mit Caloritmasse *Ca* gefüllten Blechkastens nehmen direkt den Heizstrom auf (220 Voltleitung mit Vorschaltwiderstand, Stromverbrauch bei 600° etwa 4 Amp.); sie sind durch Hartgummileisten *HG* von den Längswänden isoliert. Die Dimensionen des Kastens sind 54 × 40 × 40 cm. Die Caloritmasse¹⁾ isoliert gegen Wärmeleitung erheblich besser als Kieselgur, was durch Versuche festgestellt wurde. In der Mitte des Porzellanrohres sitzt ein Silberrohr *S* von 100 mm Länge, 2 mm Wandstärke, welches die Wärme gleichmäßig verteilt. Dieses hat 4 mm aus der Mitte einen Anschlag für das Glasprisma *GP* und trägt mit zwei Schellen ein Quarzglasröhrchen *Q*,

1) Gesellschaft für Wärme- und Kälteschutz, Leuben bei Dresden.

welches an der inneren oberen Wand des Silberrohres anliegt. In dem Quarzröhrchen ist ein $Pt-PtRh$ -Thermoelement („Arbeitselement“) so ausgespannt, daß die Lötstelle genau in der Mitte des Silberrohres liegt, während die beiden Schenkel Pt_2 und $PtRh_1$ links und rechts aus dem Ofen heraus nach einem auf der Decke des Kastens feststehenden Kupferblock Cu geführt sind. Hierin befinden sich in zwei Glasröhren die zweiten Lötstellen Cu_2-Pt_2 bzw. Cu_1-PtRh_1 . Mitten zwischen den Bohrungen für die beiden Glasröhrchen und parallel dazu ist ein auf $1/10^\circ$ geeichtes Thermometer eingelassen, nach dessen Angaben die Temperaturkorrektur der zweiten Lötstellen bestimmt wird. Der ganze Kasten ist im stabilen Gleichgewicht drehbar um eine horizontale Achse (senkrecht zur Zeichnungsebene durch den Schwerpunkt). Er ist zu diesem Zweck von einem Flacheisengerippe umgürtet, an welchem eiserne Zapfen sitzen, die beiderseits (vorn und hinten) in den Kerben zweier senkrecht stehender Balken ruhen.

Zur Kontrolle des „Arbeitselementes“, welches dauernd benutzt wurde, dient ein geeichtes ebenso beschaffenes „Kontrollelement“, welches von Zeit zu Zeit in die Rohrachse eingeführt werden kann. Die Vergleichung der Elemente ergab z. B.:

Arbeitselement	Kontrollelement
286,2°	286,6°
336,1°	336,5°
369,0°	368,5°
432,8°	432,5°.

Zu einer anderen Zeit verglichen:

323,1°	323,1°
322,1°	322,3°
603,3°	604,0°
606,3°	606,1°.

2. Den *Polarisationsapparat* einschließlich der Optik von Zeiss hat Herr Dr. O. Henker entworfen, der uns folgende Beschreibung freundlichst mitteilt:

„Der Nernstfaden N wird durch den Kondensor Cd auf die kleine kreisförmige Blende B_1 abgebildet. Unmittelbar hinter der Blende liegt der Polarisator P (ein Nicolsches

Prisma mit geraden Endflächen), der das Licht linear polarisiert. Das Kollimatorobjektiv des Kollimators C_1 ist so angeordnet, daß die Blende B_1 im Brennpunkt des Objektives liegt. Infolgedessen treten aus dem Objektiv parallele Strahlenbündel aus. Die Neigung der Strahlenbündel der Achse gegenüber ist infolge der Kleinheit der Blende sehr gering. Das Objektiv des Kollimators C_2 vereinigt die durch den Glasblock GP hindurchgegangenen parallelen Strahlenbündel in B_2 ; die Blende B_1 wird also durch die beiden Kollimatorobjektive in B_2 abgebildet. A ist der Analysator. Er ist um die Systemachse drehbar. Die Blende B_2 ist gleichzeitig die Eintrittspupille des Objektives O der photographischen Kamera. Das Objektiv O erzeugt in Gemeinschaft mit dem Objektiv des Kollimators C_2 auf der Mattscheibe M ein vergrößertes Bild des zu untersuchenden Glasprismas GP . Diese Abbildung kann man sich auch so entstanden denken, daß das Objektiv des Kollimators C_2 ein Bild von GP erzeugt, das dem Objektiv der Kamera O als Objekt dient. Durch die Regelung der Beleuchtung, d. h. der Anordnung der Blenden B_1 und B_2 wird dabei erreicht, daß das zu photographierende Glasstück von parallelen Strahlenbündeln durchsetzt, oder anders ausgedrückt: im telezentrischen Strahlengang photographiert wird.“

4. Verfahren bei der Härtung der Gläser.

Die orientierenden Vorversuche zeigten, daß ein *Zentimeterwürfel* nicht ohne weiteres von höherer Temperatur auf 20° abgekühlt werden kann, falls er nicht zerspringen soll. Am besten eigneten sich quadratische Stäbchen von der Größe $4 \times 4 \times 24$ mm. Diese wurden in die Mitte des Silberrohres gebracht und nach erreichter Temperaturkonstanz durch Umkippen des ganzen Kastens in ein mit Tonasbestmasse emailiertes Eisendrahtkörbchen geworfen, worin sie bei Zimmertemperatur bis zum Erkalten geschüttelt wurden.

Um sicher zu sein, daß die Glasmasse vor der Abkühlung spannungsfrei war, wurde während des Temperaturanstieges von Zeit zu Zeit im verdunkelten Zimmer das Spannungsbild auf der Mattscheibe der Kamera beobachtet. War die beobachtete Würfelfläche bei gekreuzten Nicols gleichmäßig dunkel, so wurde die Temperatur abgelesen und das Stäbchen

aus dem Rohr geworfen. Am Beginn und Schluß der Versuche wurden die Angaben des „Arbeitselementes“ und des „Kontrollelementes“ verglichen. Durch Verschiebung des letzteren in der Rohrachse wurde außerdem die Temperaturverteilung innerhalb des Rohres untersucht. Es ergab sich z. B., wenn a den Abstand der Lötstelle des Arbeitselementes von der Mitte des Silberrohres bedeutet und τ die Temperaturangabe:

	Arbeitselement	Kontrollelement
a	τ	τ
0 mm	336,8°	338,5°
+20 mm	335,8°	335,4°
-20 mm	333,8°	335,5°

Die Temperatur bleibt also auf die Länge des Stäbchens (24 mm) genügend konstant.

5. Methode der Messung der Doppelbrechung.

Wie bereits angeführt, hatte schon Czapski den in einer gehärteten Glasplatte erzeugten Gangunterschied als Maß der Doppelbrechung benutzt. Läßt man die oben angeführten Neumannschen Postulate gelten, so kann man den Vorgang im Glase folgendermaßen darstellen:

Ein auffallender Strahl linear polarisierten Lichtes wird beim Eintritt in das gespannte Glasstück in zwei Strahlen zerlegt, welche mit verschiedener Geschwindigkeit sich innerhalb des Glases in gleicher Bahn fortpflanzen. Sind n_1 und n_2 die Brechungsindizes für die in der betrachteten Richtung verlaufenden Komponenten des eintretenden Strahles, welche beide senkrecht zueinander linear polarisiert sind, und ist d die Dicke der Glasschicht, so ist der Gangunterschied Δ beim Austritt der Strahlen

$$\Delta = (n_1 - n_2) d = r \lambda,$$

wobei λ die Wellenlänge des verwendeten Lichtes ist.

Da die Dicke der Glasschicht ebensowohl als die Wellenlänge als bekannt betrachtet werden kann, so läßt sich die

Differenz der Brechungsindizes $n_1 - n_2$ bestimmen, wenn ν gemessen wird.

Der Gangunterschied der Strahlen kann mit Hilfe des Babinetschen Kompensators ermittelt werden; wenn jedoch, wie in diesem Falle, der Gangunterschied von Punkt zu Punkt variiert, und zwar innerhalb verhältnismäßig kleiner Gebiete um merkliche Beträge, die bei starker Spannung sogar die Größenordnung λ überschreiten können, so ist weder durch direkte Einstellung auf Auslöschung, noch bei Verwendung eines einfachen Halbschattenanalysators eine brauchbare Messung möglich, da bei der einfachen Auslöschung sowohl wie bei der Anwendung einer Halbschattenmethode die Intensitätsschwankung auf einer allgemeinen Helligkeit aufgelagert ist, welche geringe vorkommende Schwankungen völlig unter der Schwelle der Wahrnehmungsfähigkeit erscheinen läßt. Es ergibt sich demnach die Notwendigkeit, ein anderes Verfahren anzuwenden, und dieses gibt sich aus der von Lummer¹⁾ im Jahre 1907 entwickelten Theorie der „Interferenzkurven gleicher Neigung“ im polarisierten Licht (Lummersche Doppelringe), welche von einem der Verfasser²⁾ und von Sorge³⁾ so weit geführt worden ist, daß sämtliche vorkommenden Fälle theoretisch sowohl wie praktisch geklärt sind.

Legt man zwei rechtwinklige Prismen mit ihren Hypotenusenflächen so aneinander (Fig. 2), daß zwischen ihnen eine dünne planparallele Luftschicht von ca. $\frac{1}{1000}$ mm Dicke entsteht, und läßt durch eine Kathetenfläche Licht einfallen, so entsteht sowohl im durchgehenden als im reflektierten Licht ein Interferenzphänomen, dessen größte Schärfe erreicht wird, wenn man nahe dem Grenzwinkel der Totalreflexion beobachtet. Die Interferenzverteilung für linearpolarisiert einfallendes Licht in dem reflektierten Interferenzphänomen, welche sich durch die Gesamtwirkung der

Fig. 2.

1) O. Lummer, *Ann. d. Phys.* 22. p. 49—63. 1907.

2) H. Schulz, *Jahresber. d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur*, Dez. 1907.

3) K. Sorge, *Inaug.-Diss.* Breslau 1909.

Strahlen $S_1, S_2, S_3 \dots$ (Fig. 2) ergibt, wird dargestellt durch¹⁾

$$J_{1-\infty} = M_{\perp}^2 (A_{\perp}^2 + B_{\perp}^2) + M_{\parallel}^2 (A_{\parallel}^2 + B_{\parallel}^2) \\ + 2 M_{\perp} M_{\parallel} (A_{\parallel} B_{\parallel} + A_{\perp} B_{\perp}),$$

wobei

$$M_{\perp} = \cos \alpha \cdot \cos \delta,$$

$$M_{\parallel} = \sin \alpha \cdot \sin \delta,$$

$$A_{\perp} = \frac{2 \sigma_{\perp} (1 + \sigma_{\perp}^2) \sin^2 \beta_0 / 2}{1 - 2 \sigma_{\perp}^2 \cos \beta_0 + \sigma_{\perp}^4},$$

$$B_{\perp} = \frac{\sigma_{\perp} (1 - \sigma_{\perp}^2) \sin \beta_0}{1 - 2 \sigma_{\perp}^2 \cos \beta_0 + \sigma_{\perp}^4}$$

ist, und $A_{\parallel}$ und $B_{\parallel}$ durch analoge Ausdrücke dargestellt werden. α und δ sind die Winkel, welche die Schwingungsrichtungen von Polarisator bzw. Analysator mit der Einfallsebene an der dünnen planparallelen Luftschicht bilden, $\sigma_{\parallel}$ und $\sigma_{\perp}$ die Fresnelschen Koeffizienten für parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht und β_0 der Gangunterschied der Teilwellen, welcher durch die Gleichung

$$\beta_0 = \frac{4 \pi n D \cos r}{\lambda}$$

gegeben ist. (n Brechungsindex der Schicht, D Dicke, r Brechungswinkel, λ Wellenlänge.)

Aus dem Ausdruck für $J_{1-\infty}$ folgt, daß für jeden Polarisationszustand des einfallenden Lichtes absolute Minima für $\beta_0 = 2 m \pi$ ($m = 1, 2, 3 \dots$) auftreten. Zwischen diesen, auch im natürlichen Licht auftretenden Hauptminima, treten im linearpolarisierten Licht für $\beta_0 = (2 m + 1) \pi$ noch weitere Minima (Verdoppelungstreifen) auf; ihre größte Schärfe erhalten diese Verdoppelungstreifen, wenn der Strahl S_1 durch den Analysator vollkommen ausgelöscht wird. Ihr Auftreten erklärt sich dadurch, daß die Strahlen $S_1, S_2, S_3 \dots$ mit verschiedenen Polarisationsazimuten auftreten, so daß, auch wenn Strahl S_1 ausgelöscht wird, noch merkbare Intensitäten der Teilwellen $S_2, S_3 \dots$ den Analysator verlassen. Die Lage der Polarisationsazimute ist in Fig. 2 angedeutet.

1) H. Schulz, Inaug.-Diss. Breslau 1908.

Für die nahe der Totalreflexion auftretenden Streifen ist die Intensitätsverteilung in Fig. 3 dargestellt, und zwar oben für Parallelstellung von Polarisator und Analysator, unten für gekreuzte Stellung; die Schwingungsrichtung des Polarisators bildet einen Winkel von 45° mit der Einfallsebene.

Fig. 3.

Sorge wies nach, daß die Lage des Verdoppelungsstreifens in bezug auf die Hauptminima geändert wird, wenn das auffallende Licht elliptisch polarisiert ist, und zwar ist die Lage nur von der Phasendifferenz Δ der Komponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene abhängig. Es ergibt sich für diese Abhängigkeit:

$$\operatorname{tg} \Delta = 2 \frac{[(1 - \sigma_{\perp}^2)(1 - \sigma_{\parallel}^2) + 2(\sigma_{\perp}^2 + \sigma_{\parallel}^2) \sin^2 \beta_{0/2}] \sin \beta_0 (\sigma_{\parallel}^2 - \sigma_{\perp}^2)}{[(1 - \sigma_{\perp}^2)(1 - \sigma_{\parallel}^2) + 2(\sigma_{\perp}^2 + \sigma_{\parallel}^2) \sin^2 \beta_{0/2}]^2 - \sin^2 \beta_0 (\sigma_{\parallel}^2 - \sigma_{\perp}^2)^2}.$$

Die Bedeutung der Werte $\sigma_{\parallel}$, $\sigma_{\perp}$ und β_0 ist bereits oben erörtert. Diese Abhängigkeit ist für einen konstanten Fall (Einfallswinkel $89^\circ 30'$, $n = 1,52$) in Fig. 4 dargestellt. Die Abszissen 0° und 360° entsprechen den Lagen zweier benachbarter Hauptminima.

Durch eine auftretende Elliptizität wird also der Verdoppelungsstreifen zu den in ihrer Lage vollkommen von jeglichem Polarisationszustand unabhängigen Streifen I und II

verschoben, während die Drehung der Polarisationssebene die Lage des Streifens nicht verändert, sondern nur eine allgemeine Helligkeit über das Phänomen überlagert, welche durch Drehung des Analysators leicht ausgeglichen werden kann. Man sieht, daß besonders bei kleinen Phasendifferenzen eine große Verschiebung des Streifens auftritt, und zwar in dem Sinne, daß positive Elliptizität den Streifen nach links, negative dagegen den Streifen nach rechts verschiebt.

Fig. 4.

Der Vorzug, den die Benutzung dieser Streifen gegenüber den bisher zur Messung der Doppelbrechung benutzten Methoden bietet, ist darin zu suchen, daß auch bei merklicher Variation des Gangunterschiedes innerhalb des beobachteten Querschnittes der Verdoppelungsstreifen nicht verschwindet, sondern nur verbreitert und aufgehellt wird; bei variablem Gangunterschied ergibt die Lage des Minimums gewissermaßen automatisch den mittleren Wert der Doppelbrechung innerhalb des beobachteten Querschnittes. Wie der Versuch ergab, ist die Lage des Verdoppelungsstreifens mit Sicherheit auch dann noch wahrnehmbar, wenn der Gangunterschied größer als eine Wellenlänge ist (Versuchsstück Nr. 86); in diesem Falle würde jedes der bis jetzt benutzten Einstellungskriterien versagen.

Kombiniert man also die von Lummer angegebene Prismenkombination mit einem Babinetschen Kompensator, so ergibt sich folgende Versuchsanordnung für die Messung der Gangunterschiede, die durch die gespannten Glasstücke hervorgerufen sind.

Der Lichtbogen einer Quecksilberlampe Q (Fig. 5) wird durch die Linse L_1 auf dem Spalt S_1 eines Monochromators abgebildet und aus dem in der Ebene des Spaltes S_2 entworfenen Spektrum das Licht der Wellenlänge $\lambda = 546,1 \mu\mu$ ausgesondert. Das den Spalt S_2 durchdringende Licht wird

Fig. 5.

durch die Linse L_4 parallel gemacht und durchsetzt den Polarisator P , den Kompensator, das Versuchsstück V , vor dem gegebenenfalls eine Blende S_3 anzuordnen ist. In der Prismenkombination D wird das Interferenzphänomen erzeugt; das reflektierte Licht durchsetzt den Analysator A und gelangt in das mit Okularspalt S_4 versehene Beobachtungsfernrohr. Ist das Beobachtungsfernrohr auf Unendlich gestellt, so entstehen in der Brennebene desselben gleichzeitig mit dem Spaltbild die Interferenzstreifen.

6. Optischer Apparat (Fig. 6).

Der von der Firma C. P. Goerz konstruierte optische Apparat mußte möglichst universelle Messungen gestatten. Es sollte sowohl die Verteilung der Doppelbrechung in größeren Objektivscheiben, als auch die Änderung der Doppelbrechung

bei höheren Temperaturen gemessen werden. Es mußte also zwischen Polarisator bzw. Babinetschem Kompensator und Analysator hinreichend Raum vorhanden sein, um sowohl große Scheiben unterbringen, als auch Wärmekästen montieren zu können. Es ergab sich also eine Konstruktion, welche auf den ersten Blick etwas unrationell erscheint. Es mußte nämlich die Entfernung zwischen Polarisator und Analysator wenigstens 40 cm betragen und ebenso mußte die Höhe, um welche der Prisentisch bzw. der Träger der Scheibe verstellt werden konnte, wenigstens 20 cm betragen, so daß die Achse

Fig. 6.

im Verhältnis zu den optischen Teilen sehr tief gelegt werden mußte.

Der Apparat ruht auf einem gußeisernen Fuß, welcher mit Horizontierungsschrauben versehen ist. Auf einem Anfuß dieses Fußes steht fest eine Säule, welche Kollimatorrohr, Polarisator und den Soleil-Babinetschen Kompensator trägt. Das Kollimatorrohr ist mit verstellbarem Spalt S_2 versehen, das Objektiv L_4 ist in besonderem Rohr gefaßt, das sich mit Trieb T_1 in dem äußeren Rohr verschieben läßt. Hinter dem Fernrohr ist ein Tischchen A_1 vorgesehen, auf welchem ein Gradsichtprisma Aufstellung finden kann. Zur Justierung des

Prisma ist der Tisch A_1 mit Hilfe zweier Schrauben und einer Druckfeder horizontierbar und zur Einstellung auf eine bestimmte Farbe kann der Tisch mittels Schneckentriebs um seine Achse gedreht werden. Bei der großen Entfernung von Kollimatorrohr und Okularrohr erweist sich die Einschaltung von Blenden nur in seltenen Fällen als notwendig, da schon die Teile des Apparates die nötige Ausblendung bewirken.

Für sehr genaue Messungen ist es jedoch, um jede Spur fremden Lichtes abzuhalten, ratsam, einen vom Apparat getrennten Monochromator zu verwenden. Für die später zu beschreibenden Messungen an kleinen gekühlten Glasstäbchen wurde die Verwendung eines Monochromators vorgezogen, da in diesem Falle die Messungen als solche außerordentlich schwierig waren und auch die Lichtstärke sehr gering war, so daß man nach Möglichkeit Nebenlicht vermeiden mußte.

Der Polarisator P und der Soleil-Babinetsche Kompensator mit seinem Azimutalkreis sind auf einer Achse befestigt, welche diese Teile aus dem Strahlengang herauszukippen gestattet. Durch einen konischen Zapfen K_1 ist dafür gesorgt, daß beim Zurückschlagen diese Teile wieder in ihre ursprüngliche Stellung gelangen. Es hat sich gezeigt, daß bei dieser Art der Befestigung, wenn die Achse gut eingeschliffen ist, eine Einstellungsänderung nicht wahrnehmbar war. In Betracht der Dimensionen des Apparates bietet diese Einrichtung aber eine so große Annehmlichkeit bei der Justierung, daß eine derartige Vorrichtung bei Apparaten großer Dimensionen stets anzustreben ist.

Der zur Aufnahme der zu prüfenden Objekte bestimmte Tisch, welcher sowohl in Höhe als auch in seiner horizontalen Lage bequem justiert werden kann, ist mit der Achse durch einen Schraubring verbunden und kann durch Vorrichtung F fein verstellt werden. Der bewegliche Teil des Apparates (der Okularteil) ist, da eine Entlastung durch Gegengewicht bei der Größe der Massen äußerst schwierig war, und die Achse übermäßig belastet haben würde, bei K_3 durch Federn entlastet. Eben dort ist Klemmung und Feinverstellung vorgesehen. Auf dem durch eine Brücke mit der Achse verbundenen Unterbau erhebt sich der Träger für Beobachtungsfernrohr, Analysator A und ein verschiebbares Tischchen zur

Aufnahme des Doppelprismas. Das Beobachtungsfernrohr ist in gleicher Weise wie das Kollimatorrohr mit verstellbarem Objektiv versehen. Je nach Bedarf kann zur Messung ein Okularmikrometer oder ein Okularspalt besonderer Konstruktion benutzt werden, dessen Anwendung sich gerade bei den schwierigen Messungen als günstig erwies.

Der Analysator A ist, wie der Polarisator, zum Beiseitekippen eingerichtet und wird durch den konischen Zapfen K_2 in seiner Lage fixiert. Das Tischchen, welches die zur Erzeugung der Interferenzstreifen dienende Prismenkombination trägt, ist in gleicher Weise wie Tischchen A_1 justierbar, außerdem ist der gesamte Tisch auf einer in Richtung der Achse des Okularrohres verschiebbaren Schlittenführung aufgesetzt, so daß für die verschiedenen Farben stets die ersten Streifen nahe der Grenze der Totalreflexion beobachtet werden können.

Analysator- und Polarisatorteilkreis sind auf halbe Grade geteilt und gestatten mit Hilfe von Nonien eine Ablesung auf Minuten. Der für den Babinetschen Kompensator verwendete Azimutalkreis ist von Grad zu Grad geteilt und mit Nonius auf Zehntelgrad ablesbar, da für die vorgesehenen Messungen eine größere Genauigkeit nicht notwendig war; jedoch ist in einfachster Weise die Anbringung eines genaueren Kreises möglich. Der die Verstellung des Okularrohres messende Kreis M ist gleichfalls mit Nonien auf Minuten ablesbar. Für sämtliche Nonien sind Lupen an besonderen Haltern vorgesehen.

Die Verstellungsschraube des Babinet hat eine Ganghöhe von $\frac{1}{4}$ mm, die Trommel ist auf 250 Teile geteilt, so daß eine Verschiebung von $\frac{1}{1000}$ mm ablesbar ist. An Stelle des Tisches ist einzusetzen eine Vorrichtung, welche zur Aufnahme großer Glasplatten dient, deren Spannungsgrad ermittelt werden soll. Sie besteht aus einer mit Längsteilung versehenen Schiene, auf welcher ein Schlitten verschiebbar ist, der ein Kreissegment darstellt. In ihm kann die in einer Fassung befindliche Glasplatte um ihre Mitte als Achse gedreht werden; das Azimut kann dabei auf einer am Kreissegment angebrachten Teilung abgelesen werden (von 5 zu 5°). Es können somit die zu messenden Glasplatten nach Polarkoordinaten abgetastet werden.

7. Justierung. Erreichbare Genauigkeit.

Die Justierung wurde in üblicher Weise bewerkstelligt. Es wurde zunächst der Okularteil so gestellt, daß direkt die Auslöschungsstellung des Analysators beobachtet werden konnte. Zu diesem Zwecke läßt sich der ganze Okularteil des Apparates bei R abnehmen und in axialer Richtung auf der Platte des Wagens befestigen. Ist α die Polarisationsstellung, β die Analysatorstellung, so muß sein:

$$\alpha + \beta = c.$$

Die Versuche ergaben:

α	β	c
0°	118° 2,5'	118° 2,5'
10	108 3	118 3,0
20	98 4,7	118 4,7
30	98 2	118 2,0
40	78 0	118 0
50	68 5	118 5
60	58 2	118 2
70	48 3,2	118 3,2
80	38 2,3	118 2,8
90	28 2,3	118 2,3
		Mittel 118° 2,75'

wobei die Werte von β als Mittel von je drei Einstellungen ermittelt wurden. Der größte mittlere Fehler der Werte für β beträgt $\pm 0,9'$, der mittlere Fehler des Mittelwertes ca. $0,5'$, so daß die Genauigkeit der Teilung der Leistungsfähigkeit des Apparates angemessen ist. Es wurde dann die Horizontalstellung des Analysators bzw. Polarisators ermittelt. Dies geschah in der Weise, daß der Polarisator ausgeschaltet wurde und die unter dem Polarisationswinkel von einer gut planparallelen Platte reflektierten Strahlen beobachtet wurden. Die Einstellung auf Dunkelheit ergab die Horizontalstellung des Analysators, und mit Hilfe der oben ermittelten Konstante diejenige des Polarisators.

Es wurde dann das Okularteil in normaler Gebrauchsstellung auf R befestigt und die Prismenkombination eingeführt. Der Polarisator wurde so gestellt, daß seine Schwingungsebene gegen die Horizontale unter 45° geneigt war; dann wurde der Analysator in der Lage schärfster Verdoppelung festgestellt.

Es ergab sich nun, daß die Justierung des Kompensators am besten zu bewerkstelligen ist, wenn man mit Hilfe der Lummerschen Doppelringe am Apparat selbst die Justierung vornahm. Die Azimutstellung ergab sich mit äußerster Schärfe. Die Länge des Keiles läßt vier Auslöschungsstellungen zu. Für grünes Quecksilberlicht ($\lambda = 546 \mu\mu$) ergab sich nach Messungen vom 3./12. 1911: 8,419; 1,703; -5,031; -11,762. Jede dieser Zahlen ist als Mittel von 20 Einstellungen gewonnen, und zwar wurden die Einstellungen bei verschiedenen Azimuten des Kompensators gemacht, um Fehler auszuschalten, welche durch die von den Keilen des Kompensators erzeugten Nebenbilder des Spaltes veranlaßt sein können. Es ergibt sich also für die Keillänge, die einer Gangdifferenz des grünen Quecksilberlichtes von einer Wellenlänge entspricht

$$6,716 \quad 6,734 \quad 6,731.$$

Also im Mittel

$$\underline{6,727 \pm 0,005.}$$

Die hierfür benutzten Ablesungen wurden an verschiedenen Tagen und nach Neujustierung des Kompensators wiederholt kontrolliert und ergaben gute Übereinstimmung. Eine Kontrolle am 18./6. 1912 ergab beispielsweise die Einstellungen (Mittel von 10 Ablesungen mit verschiedenem Kompensatorazimut)

$$1,754 \quad -4,970,$$

also für die Kompensatorkonstante

$$6,724.$$

Temperaturänderungen änderten die Lage der Auslöschungsstellungen, jedoch blieb die Kompensatorkonstante merklich unbeeinflußt.

Sind die Variationen der Spannung innerhalb des beobachteten Querschnittes erheblich, wie bei den später zu erwähnenden Messungen an kleinen, stark gespannten Glasstäbchen, so sinkt die Genauigkeit der Einstellung, da sich bei der in diesem Falle eintretenden Strahlenkrümmung und der noch restierenden Elliptizität eine allgemeine Helligkeit dem Phänomen überlagert. Immerhin ist auch bei einem Gangunterschied ($n_0 - n_e$) $d = \lambda$ bei drei Einstellungen der mittlere Fehler erst 0,009, so daß auch bei ungünstigen Versuchs-

anordnungen der Einstellungsfehler nur etwa 0,15 Proz. der Kompensatorkonstante betrug.

Ist die Spannungsdifferenz innerhalb des beobachteten Querschnittes klein genug, um mit großer Blende arbeiten zu können, so ist die Einstellung am besten in der Weise vorzunehmen, daß der Okularspalt auf die Breite des Kollimatorspaltbildes gebracht wird. Durch diese Begrenzung des Interferenzphänomens wird der Verdoppelungsstreifen scheinbar schärfer. Die Intensitätsverteilung erscheint in dem Sinne geändert, daß die Intensität der dunkleren Partien scheinbar vergrößert ist, wie es die gestrichelte Kurve in Fig. 2 andeutet, deren Ordinaten im zehnfachen Maßstab der ausgezogenen Kurve dargestellt sind. Auftretende Elliptizität verschiebt den Streifen gegen die Spaltränder, eine Winkelablenkung des ganzen Phänomens gibt sich dadurch kund, daß das Bild des Kollimatorspaltes gegen den Okularspalt sich verschiebt. Deckt der Okularspalt nur das halbe Gesichtsfeld, so ist diese prismatische Wirkung deutlich erkennbar und kann leicht durch Nachdrehen des Beobachtungsfernrohres eliminiert werden.

8. Messungen an großen Platten.

Um über die Verteilung der Spannung in Glasstücken klar zu werden, wurden zuerst einige große Scheiben in der Weise gemessen, daß die Spannung in einer großen Zahl von Punkten bzw. Zonen mit Hilfe der vorher beschriebenen Anordnung bestimmt wurde. Da nun von Punkt zu Punkt sowohl Größe als Achsenlage variiert, so versuchte man zunächst die Messung in der Weise auszuführen, daß bei feststehendem Polarisatorazimut von 45° für jede Stelle der Platte zwei Messungsreihen ausgeführt wurden, deren eine bei einem Babinetazimut von 45° gegen das Polarisatorazimut, deren andere bei einem Babinetazimut von $22\frac{1}{2}^\circ$ ermittelt wurde. Es läßt sich daraus in verhältnismäßig einfacher Weise sowohl Achsenlage als auch Größe der Spannung ermitteln, jedoch mit dem einen Nachteil, daß die Werte für die Spannung sich nicht eindeutig ergeben. Fällt nämlich die Schwingungsrichtung des Polarisators mit der Schwingungsrichtung eines durch das Versuchsobjekt gehenden Strahles zusammen,

so wird bei jedem Azimut des Babinetschen Kompensators die Messung den Wert Null ergeben, auch wenn an dem betreffenden Punkte eine endliche Spannung existiert. Man erhält also im allgemeinen nicht das direkte Spannungsbild der Platte, sondern man mißt den richtigen Spannungswert nur für diejenigen Zonen, in welchen die Achsenlage um 45° von der Schwingungsrichtung des Polarisators oder Analysators sich unterscheidet. Wie bekannt, liegt das schwarze Kreuz bei einer gespannten Platte an denjenigen Stellen, wo die Schwingungsrichtung der das Versuchsstück durchsetzenden Strahlen mit derjenigen von Analysator oder Polarisator koinzidiert. Es zeigte sich, daß an denselben Stellen mit Hilfe des Apparates, im parallelen Licht gemessen, ebenfalls die Spannung Null sich ergibt, was jedoch nach dem oben Angeführten nicht richtig ist, da bei Drehung der Nicols sich das schwarze Kreuz mit der Schwingungsebene der Nicols dreht.¹⁾

Es war bei diesen Messungen die Platte stets nur parallel zu sich selbst in ihrer Ebene verschoben worden, und zwar in der Weise, daß die Platte in ein quadratisches Netz eingeteilt worden war, dessen Quadratseiten je 2 cm betragen. Dabei mußte natürlich in zwei um ca. 45° gegen die Horizontale geneigten Graden bzw. Hyperbeln die Schwingungsrichtung in der Platte mit der durch Analysator und Polarisator festgelegten Schwingungsrichtung koinzidieren, was bewirkte, daß eben an den gleichen Stellen, wo im konvergenten Licht die Spannung σ war, diese auch bei der Messung im Apparat sich im gleichen Werte ergab. Es mußte mithin die Messung nach einem anderen Verfahren durchgeführt werden, das, wenn irgend möglich, ohne Umrechnung ein diskutierbares Maß für den in der Platte vorhandenen Spannungszustand ergab. Es zeigte sich nun bei weiteren Messungen, daß die in einer kreisförmigen Platte vorhandene Spannung wenigstens in den äußeren Partien eine nahezu kreisförmige Verteilung besitzt, wenn die Platte bereits in dieser Kreisform gesenkt wurde. Es ergibt sich also folgendes:

Soll der Spannungszustand an irgend einer Stelle einer kreisförmig begrenzten Platte exakt bestimmt werden, so muß

1) Vgl. H. Schulz, Zeitschr. f. Instrumentenk. 33, p. 247—249 1913.

bei feststehendem Kompensator die Platte in ihrer Ebene um diesen Punkt gedreht werden und die größte sich ergebende Spannung bzw. die größte sich ergebende Kompensatorablesung gibt den Spannungsgrad, während die Achsenrichtung an der gemessenen Stelle parallel den Hauptschwingungsrichtungen des Kompensators bei größter Ablesung ist.

Da eine derartige Vorrichtung jedoch für größere Platten, wie sie bei der Ausmessung des Apparates wesentlich in Frage kommen, eine zu große Komplikation bedeutet und überdies die Messung sehr langwierig würde, so wurde für die Messung ein Näherungsverfahren benutzt, welches sich in folgender Weise charakterisieren läßt.

Da, wie bereits eben bemerkt, die Spannung in kreisförmig gesenkten Platten nahezu kreisförmige Verteilung zeigt, und die Schwingungsrichtungen an jeder Stelle der Platte infolgedessen nahezu radial und tangential liegen, so ergibt sich daraus, daß man wenigstens am Rande den richtigen Spannungswert erhält, wenn die Platte so orientiert wird, daß ihre Radien bzw. die Tangenten mit den Schwingungsrichtungen des Kompensators zusammenfallen, welche ihrerseits einen Winkel von 45° mit denen des Polarisators bzw. Analysators bilden. Es wurde also die Platte derartig angeordnet, daß die Messung stets längs eines Durchmessers ausgeführt wurde, wobei die Schwingungsrichtung des Kompensators horizontal bzw. vertikal gelegt war. Wie das nach dieser Methode erhaltene Spannungsbild ergibt, ist in der Tat die Verteilung der Spannung nahezu konzentrisch, jedoch zeigt sich bei fast jeder Platte in der Mitte eine merkliche Abweichung, so daß die nach dieser Methode auf Grund der Messungen konstruierten Spannungsbilder dem Interferenzbilde eines zweiachsigen Kristalles sehr ähnlich sind.

Am günstigsten ist die Darstellung in der Weise, daß längs zweier senkrechter Durchmesser gemessen wird, welche dadurch gekennzeichnet sind, daß sie der Achsenebene eines zweiachsigen Kristalles bzw. der dazu senkrechten Ebene entsprechen. In dieser Weise dargestellt, ergeben sich für eine Platte (5672) von 22 mm Durchmesser und 34 mm Dicke die zwei beifolgenden Kurven (Fig. 7) und aus ihnen die mittlere Spannungsverteilung längs eines Radius. Für eine weitere

Platte (5312) von 39 mm Dicke und 24 cm Durchmesser ergeben sich die in Fig. 8 dargestellten Kurven. Es zeigt sich, daß gegenüber der Platte 5672 ein merklicher Unterschied vorhanden ist, insofern, als letztere Platte eine Spannungsverteilung besitzt, bei der die Spannung von der Mitte zum Rande verhältnismäßig schnell und gleichmäßig zunimmt,

5672

Fig. 7.

während bei Platte 5312 eine mittlere Zone von ca. 20 cm Durchmesser als praktisch spannungsfrei zu betrachten ist,

5312

Fig. 8.

und nur die Randzone einen merkbaren Betrag aufweist. Um nun für die Platten einen vollkommen definierten Spannungswert geben zu können, sei derjenige Wert als *mittlere theoretische Doppelbrechung* der Platte definiert, der durch Gleichung

$$S_0 = \int \frac{S_v dr_v}{R}$$

dargestellt ist, wobei S_0 die zu dem Längenelement dr , des Radius gehörige Doppelbrechung bezeichnet.

Es folgt für diesen Wert bei Platte 5672:

$$S_0 = \frac{0,042}{6,727} \cdot \frac{0,000546}{34} = 1,0 \cdot 10^{-7},$$

während für die Platte 5312 folgt:

$$S_0 = \frac{0,017}{6,727} \cdot \frac{0,000546}{39} = 0,35 \cdot 10^{-7}.$$

Platte 5312 ist besonders gut gekühlt, Platte 5672 entspricht der normalen „Fernrohrkühlung“ und ist für die meisten Zwecke noch ohne Nachteil verwendbar.

9. Messungen an den Glasstäbchen.

Bei der Kleinheit der Versuchsstücke war es nicht möglich, in gleicher Weise vorzugehen und aus der Verteilung der Doppelbrechung, wie bei den großen Platten, einen Mittelwert der Spannung zu gewinnen, weil bei dieser Behandlungsweise die erforderliche Kleinheit der Blende S_3 schon zu störenden Beugungserscheinungen Veranlassung gab. Auf Grund der Verteilung der Doppelbrechung an großen Glasstücken wurde die Messung in folgender Weise ausgeführt:

Die Glasstäbchen $ABCD$ wurden in eine Rinne eingelegt (vgl. Fig. 9), vor der eine Blende $A'B'C'D'$ befestigt war. Es wurde auf diese Weise beim Einlegen in die Rinne stets dieselbe Partie ausgeblendet, und die Mittelwertbildung erfolgte durch die Messung selbst. Man erhielt auf diese Weise einen Wert der Doppelbrechung, den ich im Gegensatz zu dem oben definierten *theoretischen Mittelwert* der Doppelbrechung als *empirischen Mittelwert* der Doppelbrechung bezeichnen möchte. Die Größe der Blende betrug 1 mm, der Abstand der Blendenkante $A'B'$ von der Kante AB des Versuchsstückes 0,3 bis 0,4 mm.

Die Schwingungsrichtungen von Polarisator und Analysator waren parallel zu den Begrenzungskanten des Versuchsstückes,

Fig. 9.

die Hauptschwingungsrichtungen des Kompensators bildeten mit den Schwingungsrichtungen der Polarisationsprismen einen Winkel von 45° . Es wurden bei jedem Glasstücke in den Stellungen 1 bis 4 je sechs Messungen ausgeführt und nach je drei Messungen der Kompensator um 90° gedreht. War die Spannungsfigur zwischen gekreuzten Nicols symmetrisch, so ergaben auch die an den vier Stellen des Versuchsstückes gemessenen mittleren Doppelbrechungen merklich gleiche Werte. — Der Nullpunkt wurde vor und nach jeder Messung kontrolliert. Die Beobachtung gestaltete sich folgendermaßen

0,211 (5788)	$\lambda = 546,1$		
Nr. 113	Azimut d. Kompensators $\alpha_1 = 231,1$		
	$\alpha_2 = 321,1$		
Nullpunkt			
α_1	α_2	α_1	α_2
1,814	1,746	1,448	2,072
1,853	1,710	1,482	2,100
1,820	1,690	1,411	2,089
}			
1,834	1,723	1,468	2,158
1,857	1,748	1,412	2,054
1,820	1,719	1,449	2,100
}			
1,833	1,723	1,487	2,083
		1,469	2,000
		1,480	1,993
}			
		1,494	2,067
		1,525	2,067
		1,441	2,045
}			

Hieraus folgt für die Mittelwerte der Spannung in den Punkten 1 bis 4 für die verschiedenen Kompensatorazimute:

α_1	α_2	Mittel
0,386	0,364	0,375
0,390	0,381	0,386
0,354	0,302	0,328
0,346	0,337	0,341
		0,357

Der Wert 0,357, welcher direkt als Mittel der Kompensatorablesungen sich ergibt, ist nun noch zu reduzieren auf die Differenz der Brechungsindizes. Es ergeben sich auf diese Weise für die verschiedenen Glasarten die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte.

Glastyp (Schmelze)	Nr. des Ver- suchsstückes	Temperatur der Härtung	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
O 2994 (5770)	22	675,7	14,8
	21	629,3	11,39
	23	601,2	0,47
	20	563,3	0,53
O. 3453 (5903)	27	541,8	nicht meßbar
	25	499,8	4,84
	24	460,0	0,87
	26	406,1	0,29
O 3832 (6293)	35	581,9	20,6
	32	550,6	5,34
	33	513,3	1,12
	34	488,8	0,74
O 3439 (5591)	36	540,5	29,2
	37	506,0	16,0
	38	466,5	4,68
	39	403,7	0,56
O 2122 (5847)	41	697,2	—
	40	665,0	8,03
	42	634,4	2,43
	44	604,3	0,67
	43	559,3	0,41
U V 3199 (4668)	47	579,9	29,7
	45	531,3	6,71
	46	490,7	1,52
	48	456,9	0,69
O 203 (6335)	57	611,8	34,0
	56	591,5	25,0
	55	558,2	20,2?
	54	533,0	6,27
	58	513,8	4,03
O 2071 (5930)	86	700,5	57,1
	87	650,7	8,12
	88	602,1	1,43
O 722 (6255)	90	656,3	50,6
	89	620,2	19,3
	91	585,4	5,12
	92	534,5	1,19
O 463 (6536)	93	622,6	26,5
	94	585,8	5,99
	95	537,3	1,33
O 578 (6015)	96	621,5	32,6
	97	587,6	21,5
	98	536,8	4,68
	99	481,0	1,36

Glastyp (Schmelze)	Nr. des Versuchsstückes	Temperatur der Härtung	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
O 3269 (5597)	100	579,0	—
	101	544,2	21,8
	110	511,3	7,39
	111	461,5	2,60
O 748 (6427)	103	580,7	28,5
	104	548,7	20,4
	108	510,1	7,14
	109	461,2	1,31
O 211 (5788)	112	656,7	43,8
	105	620,7	15,8
	106	586,8	4,26
1447 ^{III} (6367)	115	615,6	52,6
	107	580,8	23,6
	114	544,6	6,99
	116	512,5	2,01
O 802 (5168)	120	651,9	37,7
	119	616,2	27,6
	118	580,2	8,40
	121	530,9	1,35
U V 3248 (6224)	130	615,6	45,9
	128	581,8	25,9
	129	546,9	7,88
	131	495,7	1,81
S 367 (S 433)	169	555,8	—
	167	521,5	19,1
	170	484,9	2,19
	166	451,5	0,49
S 386 (S 350)	169	514,9	—
	165	481,2	13,2
	163	451,2	12,4
	164	415,1	0,98
S 389 (S 389)	173	522,3	—
	172	486,1	27,5
	171	451,1	4,53
	174	416,2	1,03

Sämtliche hier angegebenen Versuchsstücke wurden zwischen gekreuzten Nicols photographiert; es war dies besonders deshalb erwünscht, weil bei der Messungsmethode bei stark gespannten Stücken nicht entschieden werden konnte, wieviel ganze Wellenlängen zu dem durch die Kompensatormessung ermittelten Bruchteil hinzugefügt werden müssen. Es sind in

der beifolgenden Taf. II¹⁾ die Spannungsbilder einer Reihe von Stäben angegeben, aus welchen schätzungsweise die Größen des Gangunterschiedes entnommen werden können.

Das allgemeine Bild der Abhängigkeit der erzeugten Spannung von der Kühltemperatur ist in Fig. 10 und 11 gegeben.

Fig. 10.

Fig. 11.

Als Ordinaten sind die gemessenen Spannungen, ausgedrückt durch die Differenz der Brechungsindizes, als Abszissen die Kühltemperaturen angegeben. Es zeigt sich, daß der Verlauf der Kurven im wesentlichen den Charakter einer Hyperbel trägt, deren Gleichung durch

$$(\tau_0 - \tau)(S + S_0) = C$$

gegeben ist, wo τ die Härtungstemperatur, S die zugehörige mittlere Spannung ist und wo τ_0 , S und C Konstanten sind. Über die physikalische Bedeutung der Konstanten werden die folgenden theoretischen Erwägungen Aufschluß geben.

1) Die Zahlen unter den Photogrammen bezeichnen die Nummern des Versuchsstückes.

10. Theoretische Betrachtungen.

Zur Erklärung des Verhaltens gekühlter Gläser ist die von Maxwell¹⁾ eingeführte Betrachtung, daß die Körper aus Molekülgruppen bestehen, welche verschiedenes optisches Verhalten zeigen, sehr geeignet. Die in der Vorveröffentlichung in der Physikalischen Zeitschrift gegebene Ableitung, welche hier in Kürze wiederholt sein mag, führt bereits auf das oben angegebene Gesetz, welches sich innerhalb bestimmter Temperaturgrenzen sehr gut den Beobachtungen anschließt. Setzt man die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes auch für die durch den Härtingsprozeß, also durch einen im letzten Grunde thermischen Einfluß hervorgerufene Spannung voraus, so muß sein:

$$S = E \cdot D,$$

wobei D die durch den Härtingsprozeß hervorgerufene Deformation, E den Elastizitätskoeffizienten und S die innere Spannung bedeutet, welche nach Neumann proportional der optischen Doppelbrechung, wenigstens für kleinere Spannungen zu setzen ist. Setzt man voraus, daß der Körper aus N_1 -Molekülgruppen besteht, deren Elastizitätsgrenze x_1 ist; N_2 -Molekülgruppen, deren Elastizitätsgrenze x_2 ist, wobei x_2 kleiner als x_1 ist, so wird die Konstitution der Gruppen N_2 geändert, wenn innere Kräfte auftreten, welche die Elastizitätsgrenze x_2 überschreiten. N_1 entspricht der Anzahl der permanenten Moleküle, N_2 derjenigen der deformierbaren. Die auftretende Deformation selbst wird dann gegeben sein durch das Verhältnis $N_2:N_1$, so daß also für die Doppelbrechung in erster Näherung

$$D = a \frac{N_2}{N_1}$$

gesetzt werden kann, solange während des Kühlprozesses selbst eine Umwandlung beider Molekülgruppen ineinander nicht stattfindet, solange also die Relaxationszeit so groß ist, daß die Abkühlungszeit ihr gegenüber als unendlich klein zu betrachten ist. Dies ist zweifellos erlaubt, solange das Glas merklich unterhalb seiner Erweichungstemperatur bleibt.

1) G. Butcher, Proc. of the Lond. Math. Soc. 8. p. 103—135. 1876.

Mit zunehmender Temperatur nimmt die Anzahl der variablen Moleküle zu, d. h. es findet eine Umwandlung der Molekülgruppen von der Elastizitätsgrenze x_1 in solche mit geringerer Elastizitätsgrenze x_2 statt, bis bei einer Temperatur T_0 , welche der Erweichungstemperatur entspricht, sämtliche Moleküle die Elastizitätsgrenze x_2 haben. Diese Elastizitätsgrenze x_2 ist als sehr klein anzunehmen, so daß die durch den Kühlungsprozeß auftretenden inneren Spannungen die Elastizitätsgrenze x_2 überschreiten. Immerhin ist diese Elastizitätsgrenze x_2 noch als endlich zu betrachten, während bei noch höheren Temperaturen für eine bestimmte Anzahl von Molekülgruppen die Elastizitätsgrenze 0 eintritt. Von der Verflüssigungstemperatur an endlich haben sämtliche Molekülgruppen die Elastizitätsgrenze 0, d. h. das Auftreten unendlich kleiner Kräfte genügt bereits, um in unendlich kleiner Zeit eine endliche Deformation hervorzurufen.

Dieser Übergang von Molekülgruppen mit großer Elastizitätsgrenze x_1 wird also in zwei oder mehreren Stufen erfolgen. Während bei niedriger Temperatur das Glas als fester Körper zu betrachten ist, wird oberhalb der Erweichungstemperatur bis zur Verflüssigungstemperatur ein Zustand eintreten, den man kurz als plastisch bezeichnen kann, in welchem also bei Einwirkung auch geringer Drucke in endlicher Zeit eine endliche Deformation erreicht wird, während oberhalb der Verflüssigungstemperatur das Glas als eine Flüssigkeit von geringer Zähigkeit zu betrachten ist.

Die Elastizitätsgrenze ist dabei in der Weise aufzufassen, daß nur Formveränderungen in Frage kommen, während Volumenänderungen auch im flüssigen Zustande einen endlichen bzw. unendlich großen Widerstand zeigen.

Nach den Beobachtungen von Reiger nun kann man für die Abhängigkeit der Molekülzahl N_2 von der Temperatur unterhalb der Erweichungstemperatur die Beziehung ableiten:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{C_1}{\tau_0 - \tau} + C_2,$$

woraus sich ergibt:

$$(S_0 + S)(\tau_0 - \tau) = C.$$

C ist als konstant zu betrachten, solange die Relaxationszeit

groß ist. Dagegen ist C eine Funktion der Temperatur, sobald die Nähe des Erweichungspunktes erreicht ist.

In erster Näherung genügt für die Darstellung des Verhaltens auch oberhalb des Erweichungspunktes ein Ausdruck von der Form

$$(S + S_0)(\tau_0 - \tau) = C \cdot e^{-\eta(\tau)}.$$

Diese abgeleitete Form gibt ihrer Natur gemäß zunächst nur für ein Volumelement, welches nur so groß zu wählen ist, daß innerhalb desselben das Verhältnis $N_2:N_1$ als merklich konstant zu betrachten ist. Da aber die hervorrufenden Ursachen für alle Volumelemente die gleichen sind, so ist der Konstante C für alle Volumelemente der gleiche Wert beizulegen. Wird nun an Stelle der von Ort zu Ort variierenden Drucke ein mittlerer Druck eingeführt, so muß die zugehörige mittlere Spannung durch die gleiche Beziehung gegeben sein.

Nach diesen Betrachtungen ist somit die Temperatur T_0 als diejenige zu betrachten, welche der Erweichungstemperatur entspricht. Die Konstante S_0 ergibt den Minimalwert der Spannung, während der Schnittpunkt mit der Abszissenachse diejenige Temperatur angibt, für welche Zug- und Druckspannung im Versuchsstück etwa in gleichem Maße vorhanden sind.

Wie bereits erwähnt, ist die Spannungsverteilung in einem durch schnelle Abkühlung gespannten Glase derart, daß in den äußeren Zonen Druckspannung, in den inneren Zugspannung vorherrscht. Ist der Temperatursturz während der Härtung sehr groß, so ist die Zone der Druckspannung überwiegend, und nur ein geringer Teil im Innern des Körpers besitzt Zugspannung. Bei der Messung der mittleren empirischen Spannung wird also bei großen Temperaturstürzen die Druckspannung, welche für den allgemeinen Fall auftritt, daß die Wellenfläche derjenigen eines optisch negativen Kristalls vergleichbar ist, in dem Resultat überwiegen. Wird diese als positiv angenommen, so wird sich demnach für den Wert der mittleren Doppelbrechung so lange ein positiver Wert ergeben, als die Druckspannung die Zugspannung überwiegt. Bei geringeren Härtungstemperaturen hingegen wird nur in den äußersten Schichten Druckspannung vorhanden sein, während

der überwiegende Teil des Versuchsstückes Zugspannung besitzt. Die Messung, welche das Mittel der Spannung ergibt, wird also bei geringen Härtungstemperaturen eine negative Ablesung bedingen können. Wenn auch nur bei einem Versuchsstück (Nr. 389, O 41) sich das überwiegende Auftreten von Zugspannung zeigte, so wird doch die oben ausgesprochene Ansicht durch weiter unten anzugebende Beobachtungen gestützt.

11. Verhalten bei höheren Temperaturen.

Einfluß der Relaxationszeit. — Wie bereits erwähnt, wird bei höheren Temperaturen eine Abweichung von dem Hyperbelgesetz sich zeigen, und zwar muß die Abweichung sich in dem Sinne bemerkbar machen, daß bei höheren Temperaturen die Spannung von der Temperatur nahezu unabhängig wird. Andeutungen dieses Verhaltens finden sich bei O 203, O 578, O 748, O 802 und S 386. Sehr charakteristisch war für dieses Verhalten O 608, für welches die Messungen folgen:

Glastyp (Schmelze)	Nr. des Ver- suchsstückes	Temperatur der Härtung	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
O 608 (6060)	127	650,6	25,8
	126	616,5	26,8
	124	581,3	26,7
	122	580,8	26,3
	125	547,5	24,4
	123	545,2	23,6

Es bleibt somit die Spannung fast konstant; bei den höchsten Temperaturen zeigt sich sogar eine geringe Abnahme der Spannung. Daß dieses Verhalten in der Tat reell ist, zeigen die Aufnahmen der Versuchsstücke zwischen gekreuzten Nicols; das Spannungsbild für sämtliche Versuchsstücke ist nahezu gleich (Fig. 12, Tafel II).

Bei nachträglich gespannten Stäbchen, deren Härtungstemperatur kleiner gewählt wurde, als die obigen Temperaturen, ergab sich als Fortsetzung der Spannungskurve für kleinere Temperaturen die Hyperbelfunktion. Die Werte für diese Proben waren:

Glastyp	Nr. des Ver- suchsstückes	Härtungs- temperatur	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
O 608	367	475,4	3,50
	366	501,1	7,92
	365	525,5	15,3

Das gleiche Verhalten zeigten die Bleigläser. Die Messungen für diese sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Glastyp (Schmelze)	Nr. des Ver- suchsstückes	Härtungs- temperatur	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
O 378 (5961)	72	551,7	—
	71	519,5	—
	381	500,1	10,9
	380	480,9	7,47
	73	473,1	5,03
	379	460,5	3,37
	378	440,5	2,44
	74	422,4	1,78
	377	410,4	1,17
	375	380,2	0,83
	376	350,2	0,63
O 340 (5476)	65	512,3	—
	402	500,6	20,8
	62	493,5	—
	401	470,2	10,4
	60	462,5	5,90
	400	440,6	3,53
	61	411,5	1,70
	399	410,0	1,67
	397	380,1	0,94
	63	379,0	0,89
	398	350,5	0,75
	64	305,0	0,40
O 118 (6280)	28	511,8	24,2
	29b	473,0	15,1
	29a	472,0	13,4
	30	427,0	3,53
	31	379,0	1,34
	66	301,5	0,54
	68	261,6	0,34
	67	243,4	0,22
	69	243,0	nicht meßbar
	70	202,4	zersprungen

Glastyp (Schmelze)	Nr. des Versuchsstückes	Härtungs-temperatur	$(n_o - n_e) \cdot 10^6$
O 102 (6209)	77	529,5	22,1
	76	500,4	17,4
	388	500,0	14,5
	387	480,9	10,1
	75	470,2	8,35
	386	460,3	5,52
	385	440,0	3,32
	384	410,7	1,62
	78	402,6	1,45
	383	380,6	0,67
	382	350,5	0,58
O 41 (5791)	82	528,9	—
	79	501,9	16,4
	395	500,5	14,2
	394	480,1	11,9
	393	460,0	8,55
	80	45,6	7,35
	392	440,0	4,43
	391	409,8	1,38
	81	402,6	1,20
	390	380,4	0,51
	389	350,2	-0,25
O 98 (4818)	83	501,2	5,05
	374	500,3	4,18
	373	481,1	4,06
	372	460,5	4,18
	84	450,8	3,47
	371	440,5	2,34
	370	410,4	0,73
	85	402,1	0,52
	369	380,3	0,27
	368	350,0	0,07

In beifolgender Fig. 13 sind die Spannungen für die Gläser O 198, O 41, O 102, O 118, O 378 und O 340 dargestellt.¹⁾ Während die maximal erreichte Spannung für O 198 eine Kompensatorablesung von etwa 1,2 ergab, war die maximal erreichte Spannung für die übrigen Gläser merklich höher. Welcher Maximalwert bei diesen Gläsern erreicht werden kann, ließ sich durch die bisher ausgeführten Versuche noch nicht definitiv ermitteln; das Maximum der erreichbaren Spannung dürfte nach der Figur für O 118 etwa zu suchen sein. Auf die Bedeutung dieses Maximums werde ich weiter unten noch einmal zurückkommen.

1) Ordinate ist die Kompensatorverstellung.

Fig. 13.

12. Die Spannungskonstanten.

Wie soeben ausgeführt, gilt die einfache Beziehung

$$(\tau_0 - \tau)(S + S_0) = C$$

zwischen Härtungstemperatur und erzeugter Spannung nur unterhalb einer bestimmten Temperatur, wo der Einfluß der Relaxationszeit zu vernachlässigen ist, wo also während der Zeit der Abkühlung kein Ausgleich der Spannungen mehr erfolgen kann. Zur Berechnung der Konstanten C , S_0 , T_0 dürfen also nur Werte benutzt werden, welche geringen Härtungstemperaturen entsprechen, wo ein Umbiegen der Kurve nach

rechts noch nicht zu bemerken ist. Mathematisch kann, wenn eine größere Anzahl von Beobachtungswerten vorliegt, diese Entscheidung in der Weise geschehen, daß die Berechnung der einzelnen Werte nach der Methode der kleinsten Quadrate erfolgt und dann sukzessive die den höheren Härtungstemperaturen entsprechenden Beobachtungswerte fortgelassen werden. Werden nur Werte unterhalb der Erweichungstemperatur zur Berechnung benutzt, so bleiben die Werte für C , S_0 und T_0 konstant, ein Beweis, daß von dieser Stelle ab die Voraussetzungen, welche zur Ableitung des einfachen Gesetzes gemacht wurden, die Erscheinungen im wesentlichen umfassen.¹⁾ Die auf diese Weise ermittelten Konstanten der Bleigläser sind nebst dem prozentischen Gehalt der Gläser an PbO , in folgender Tabelle angegeben:

Glastyp	Bleigehalt PbO %	T_0	S_0	C
O 198	70,0	469,4°	-0,181	23,5
O 41	61,0	473,3°	-0,480	58,3
O 102	50,5	494,2°	-0,291	66,3
O 118	43,0	490,4°	-0,205	73,8
O 340	33,5	485,06°	-0,142	45,6
O 378	25,7	497,59°	-0,146	45,0

Für die Temperaturen T_0 scheint mit wachsendem Bleigehalt eine Abnahme stattzufinden, jedoch ist diese nicht sehr stark ausgeprägt. Viel stärkere Änderung mit dem Bleigehalt zeigen die Konstanten Cb und S_0 , deren Werte in Fig. 14 dargestellt sind. Wie aus der Figur ersichtlich, steigen die Werte für C und S_0 (ihrem absoluten Werte nach) zunächst stark an. Ein Maximum wird überschritten zwischen 40 und 60 Proz. Gehalt an PbO . Das Maximum ist wahrscheinlich dadurch bedingt, daß sich bei einem entsprechenden Prozentgehalt von Bleioxyd eine neue Verbindung zwischen PbO und SiO_2 bildet, wodurch, wie aus anderen Messungen bereits bekannt, bestimmte Eigenschaften des Glases in einem der anfänglichen Wirkung des Oxydes entgegengesetztem Sinne beeinflusst werden können.

Verlängert man die Kurven nach der Seite höheren Bleigehaltes hin, so würde die Achse sowohl von der C -Kurve als

1) H. Schulz, Zeitschr. f. Instrumentenk. 33. p. 252. 1913.

auch von der S_0 -Kurve bei etwa 76 Proz. PbO geschnitten, um sodann eine Vorzeichenumkehr für die Konstanten C und S_0 anzudeuten.

Dieses Verhalten hat die physikalische Bedeutung, daß die Form der Wellenfläche bei höherem Bleigehalt sich ändert, daß somit bei höherem Bleigehalt positive Doppelbrechung eintritt. Es ist dies um so bemerkenswerter, als auch bei den Pockelsschen Messungen durch Extrapolation ein Bleigehalt von 75,7 Proz. als der Gehalt ermittelt wurde, für welchen dieses Glas vollkommen spannungsfrei für eine bestimmte Wellenlänge bleibt. Man würde also durch diese Beobachtungen auf dieselbe Zusammensetzung eines bei beliebigen äußeren Einflüssen spannungsfrei bleibenden Glases kommen, wie es Pockels bei seinen Messungen ableitete.

In Übereinstimmung damit stehen auch die bereits veröffentlichten Resultate für das Glas S 386. Dieses ergab, daß die Wellenfläche das entgegengesetzte Verhalten zeigt als bei den übrigen Gläsern, somit eine positive Doppelbrechung. Die

Übereinstimmung geht sogar noch weiter. Es konnten, nachdem für S 386 noch ein weiterer Punkt ermittelt worden war, dessen Härtungstemperatur ca. 428° betrug, also noch in dem Teil der Kurve gelegen war, für welchen das dreikonstantige Gesetz gilt, die Konstanten für dieses Glas ermittelt werden. Es ergab sich:

$$S_0 = + 0,2178,$$

$$T_0 = 456,6^\circ$$

$$C = - 21,13.$$

Fig. 14.

O 102

Fig. 15.

Fig. 16.

Trägt man diese Werte, welche einem Gehalt von 79 Proz. PbO entsprechen, in die Kurve ein, und ermittelt man den Schnittpunkt mit der Achse, so ergibt sich in diesem Falle etwa 74 Proz. PbO, also eine Änderung des Prozentgehaltes in demselben Sinne, wie ihn Pockels bei seinen Kontrollmessungen unter Verwendung eines Glases mit höherem Bleigehalt durch Interpolation fand. Der Einfluß des Bleigehaltes auf die Doppelbrechung dürfte also durch die Kurven in Fig. 14 festgelegt sein.

Wie gut sich die aus den Konstanten errechnete Kurve unterhalb der Erweichungstemperatur den Messungen anschließt,

Fig. 17.

möge durch die Figg. 15—17 gekennzeichnet sein, in denen die gemessenen Werte durch Kreise gekennzeichnet sind. Die ausgezogenen Kurven sind mit den oben angegebenen Konstanten errechnet. Die Ordinaten für die Figg. 15—17 sind die Kompensatorverstellungen.

13. Polare Doppelbrechung.

Während bei fast allen Versuchsstücken die Werte der Doppelbrechung an den vier Ecken des Versuchsstückes sich als gleich ergeben, zeigte sich bei dem Gelbglass 5899 eine besondere Erscheinung, die wir als polare Doppelbrechung bezeichnen möchten. Es ergab sich für sämtliche Stücke des Glases 5899 die Eigenschaft, daß gegenüberliegende Ecken gleiche Doppelbrechung aufwiesen, während anstoßende Ecken merklich verschiedene Werte für die Doppelbrechung zeigten.

Nebenstehende Fig. 18 zeigt die beiden Werte für die Doppelbrechung in den ausgezogenen Linien, während die gestrichelte Linie den Mittelwert angibt. Die Werte für die Versuchsstücke sind folgende:

Nr. des Versuchsstückes	Härtungstemperatur	Spannungswerte $\Delta n \cdot 10^5$		Mittel $\Delta n \cdot 10^5$
53	691,5	—	—	44
52	641,4	—	—	13,52
51	613,2	3,99	2,77	3,38
50	594,0	2,13	0,629	1,38
49	562,8	1,02	0,24	0,63

Die Spannungswerte sind hier bereits auf die Differenz der Brechungsindizes umgerechnet. Zur Kontrolle sind auch hier die Spannungsaufnahmen zwischen gekreuzten Nicols (Fig. 19, vgl. Taf. II) beigefügt.

Auch bei ihnen tritt die diagonale Symmetrie deutlich hervor, besonders bei den Stücken mit geringerer Spannung.

Auf welche Ursachen diese Erscheinung zurückzuführen ist, steht noch nicht fest; vielleicht ist sie bedingt durch die Anwesenheit des Schwefelcadmiums, welches als Farbstoff dient. Erfolgt die Ausscheidung bzw. Kristallisation der Farbstoffteilchen als Greenokit in bestimmter Orientierung, so könnte dadurch eine Erscheinung, wie sie beobachtet wurde, hervorgerufen werden.

14. Ausgleich der Doppelbrechung bei Zimmertemperatur.

Um den Einfluß der Zeit, welche zwischen dem Härungsprozeß und der Messung des Glasstückes verstreicht, gegebenenfalls mit berücksichtigen zu können, wurden bereits bei einigen Gläsern (O 118, O 198) die Proben mehrfach gemessen, wobei zwischen den einzelnen Messungen längere Zeiten lagen.

Für O 118 ergaben die Versuchsreihen:

Fig. 18.

Nr.	T	$\Delta n \cdot 10^6$, gemessen am 27./6. 1912	$\Delta n \cdot 10^6$, gemessen am 31./7. 1912	Differenz
28	511,8	24,6	21,4	+3,2
29b	473,0	15,2	12,2	+3,0
29a	472,0	13,5	11,1	+2,4
30	427,0	3,55	3,03	+0,52
31	379,0	1,34	1,31	+0,03
66	301,5	0,54	0,53	+0,01
68	261,6	0,34	0,37	-0,03
67	243,4	0,22	0,32	-0,10

Für O 198 ergab sich:

Nr.	T	$\Delta n \cdot 10^6$, gemessen am 16./7. 1912	$\Delta n \cdot 10^6$, gemessen am 23./12. 1912	Differenz
83	501,2	5,06	4,79	+0,27
84	450,8	3,46	3,27	+0,19
85	402,1	0,52	0,57	-0,05

Fig. 20.

Es zeigt sich also sowohl bei O 118, für welches die Zahlen in Fig. 20 dargestellt sind, als auch bei O 108 folgendes Verhalten: Bei den großen Spannungswerten findet eine merkliche Abnahme der Spannung auch bei Zimmertemperatur statt, während bei geringeren Spannungsgraden, entsprechend den tiefen Härtungstemperaturen, eine geringe aber noch deutlich nachweisbare Zunahme der Spannung sich ergibt.

Bei Gültigkeit des schon oben erwähnten Hooke'schen Gesetzes

$$S = E \cdot D$$

folgt durch Differentiation nach der Zeit:

$$\frac{dS}{dt} = E \cdot \frac{dD}{dt}$$

Bei einer endlichen inneren Reibung des Körpers wird nun die innere Spannung die Tendenz zeigen, sich auszugleichen. Setzt man mit Maxwell diese Abnahme proportional der vorhandenen Spannung bzw. Doppelbrechung S , so folgt

$$\frac{dS}{dt} = E \cdot \frac{dD}{dt} - \frac{S}{T}.$$

Setzt man die Deformation D als konstant voraus, so wird

$$(a) \quad S_t = E D \cdot e^{-\frac{t}{T}},$$

wo T die Relaxationszeit darstellt.

Da die Deformation sich innerhalb endlicher Zeiten, wie die obigen Zahlen zeigen, nur wenig ändert, so ist es im allgemeinen gestattet, die Deformation als konstant vorzusetzen und Gleichung (a) als gültig für den Prozeß des Abklingens der inneren Spannung anzunehmen, wobei für ED die Anfangsspannung S_a gesetzt werden darf, so daß die Gleichung lautet:

$$S_t = S_a e^{-\frac{t}{T}}$$

(der Index t soll die Zugehörigkeit zur Zeit t bezeichnen).

Auf Grund dieser Gleichung läßt sich wohl die Abnahme der Differenz der Doppelbrechung mit fallender Anfangsspannung erklären, nicht aber der Vorzeichenwechsel (die scheinbare Zunahme der Spannung) erklären. Denn bei beliebiger Verteilung der Spannung innerhalb des beobachteten Querschnittes lassen sich die zur Zeit Null bzw. t beobachteten mittleren Spannungswerte in der Form schreiben:

$$\bar{S}_a = \frac{1}{a b} \int_0^a \int_0^b S_{xy} dx dy,$$

wo a und b die Seiten des rechteckig gedachten anvisierten Querschnittes sind, bzw.

$$\begin{aligned} \bar{S}_t &= \frac{1}{a b} \int_0^a \int_0^b S'_{xy} dx dy = \frac{1}{a b} \int_0^a \int_0^b S_{xy} \cdot e^{-\frac{t}{T}} dx dy \\ &= \frac{e^{-\frac{t}{T}}}{a b} \int_0^a \int_0^b S_{xy} dx dy. \end{aligned}$$

Es ist also auf diese Weise ein Wechsel der Vorzeichen nicht zu erklären. Das Auftreten der scheinbaren Spannungszunahme kann durch zwei Ursachen bewirkt werden:

1. Ist bei kleinen Spannungen, wie sie hier stets infolge Überschreitens der neutralen Schicht im anvisierten Feld vorhanden sind, die Gültigkeit des Gesetzes nicht wahrscheinlich, weil bei kleinen Spannungen die Deformation D nicht als konstant vorausgesetzt werden darf.

2. Ändert sich die Achsenlage der Volumelemente des gespannten Körpers bei der Entspannung. Beim Zusammenwirken dieser beiden Einflüsse ist es sehr wohl möglich, daß eine scheinbare Zunahme der Spannung bei verhältnismäßig schwach gespannten Stücken auftritt.

Nach diesen Ausführungen kann also eine schätzungsweise Berechnung der Relaxationszeit bzw. des Koeffizienten der inneren Reibung nur erfolgen unter Benutzung von Versuchsergebnissen, welche an Stücken mit relativ großen Anfangswerten der Spannung gewonnen sind.

Sind S_1 bzw. S_2 die Anfangswerte der Doppelbrechung, S'_t und S''_t zugehörige Werte der Spannung nach Verlauf der Zeit t , so gilt

$$S'_t = S_1 \cdot e^{-\frac{t}{T}},$$

$$S''_t = S_2 \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

und

$$\frac{S'_t}{S''_t} = \frac{S_1}{S_2},$$

welche Gleichung als Kriterium für die Anwendungsfähigkeit dieses Gesetzes benutzt werden kann. Für die Berechnung von T folgt dann

$$\lg \frac{S'_t}{S''_t} = -\frac{t}{T} \cdot \lg e,$$

$$T = -\frac{t \lg e}{\lg \frac{S'_t}{S''_t} - \lg \frac{S_1}{S_2}}.$$

Für O 118 ist nun

Nr.	S'_t/S_1
28	0,87
29 b	0,80
29 a	0,82
30	0,85
31	0,98

Es ist also bis Nr. 30 das Verhältnis S'_i/S_1 nahezu konstant, also für diese Werte eine Anwendung des obigen Gesetzes zulässig. Benutzt man das Mittel der ersten vier Zahlen, so folgt für T

$$T = + \frac{34 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 0,43}{0,078} = 1,6 \cdot 10^7 \text{ sec.}$$

Entsprechend folgt für $O 198$

Nr.	S_i/S_1
83	0,947
84	0,945
85	1,097

Unter Benutzung der beiden ersten Werte

$$T' = \frac{160 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 0,43}{0,024} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ sec.}$$

Diese Zahlen ergeben für den Koeffizienten ϱ der inneren Reibung, wenn man für die Elastizitätskoeffizienten E und μ als Mittelwerte 5000 bzw. 0,25 annimmt, die Werte

$$\varrho = 3,2 \cdot 10^{10} \text{ für } O 118,$$

$$\varrho = 5,0 \cdot 11^{11} \text{ „ } O 198,$$

welche Werte mit den von Reiger¹⁾ zitierten Werten in der Größenordnung gut übereinstimmen.

Beobachter	Substanz	Temp.	ϱ
O. E. Meyer	Messing	ca. 15°	$3 \cdot 10^8$
Barus	Stahl (indirekt)	—	$25 \cdot 10^{15}$
	harter Stahl (direkt)	—	$1 \cdot 10^{17} - 6 \cdot 10^{17}$
	weicher Stahl	—	$6 \cdot 10^{17} - 6 \cdot 10^{18}$
Voigt	Kupfer	—	$3,7 \cdot 10^8$
	Nickel	—	$12,5 \cdot 10^8$

Es sind diese eben für $O 118$ und $O 198$ berechneten Werte nur als Anhaltspunkte für die Größenordnung der

1) R. Reiger, Inaug.-Diss. Erlangen 1901. p. 9.

inneren Reibung aufzufassen. Exaktere Werte können erst erwartet werden, wenn die Gültigkeitsgrenzen der Maxwell'schen Annahme auf Grund neuer Versuche festgestellt worden sind. Immerhin ist bemerkenswert, daß auch hier für das weichere Glas O 198 ein höherer Wert für ρ sich ergibt als für das härtere Glas O 118, in Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Barus an Stahl.

15. Abhängigkeit der Härtungsspannung von der Form.

Um die Abhängigkeit der erzeugten Härtungsspannung von der Form festzustellen, was aus den oben erwähnten Gründen auf experimentellem Wege geschehen mußte, wurden

Fig. 21.

zwei Reihen von Versuchsstücken hergestellt, welche bei nahezu gleichen Temperaturen gespannt wurden. Die erste Versuchsreihe umfaßt die Versuchsstücke 13—19, für welche die in Betracht kommenden Werte in der folgenden Tabelle angegeben sind:

Glastyp (Schmelze)	Versuchsnummer	Größe	Spannung (Kompensatorverstellung)
O 2994 (O 5770)	13	5 × 5 × 5 mm	0,095
	14	4 × 4 × 4 „	0,050
	15	4 × 4 × 8 „	1,170
	16	4 × 4 × 12 „	1,778
	17	4 × 4 × 16 „	2,353
	18	4 × 4 × 20 „	2,798
	19	4 × 4 × 24 „	2,877

Die auftretenden Spannungen sind in vorstehender Fig. 21 aufgetragen, in Abhängigkeit von der Länge des Versuchsstückes. Wie aus der Figur ersichtlich, sind die mittleren vier Punkte nahezu auf einer Geraden gelegen, welche durch den Nullpunkt geht. Die Werte von den Versuchsstücken 14 und 19 fallen weit heraus.

Ein ähnliches Verhalten ergibt sich nach den Messungen an einer zweiten, umfangreicheren Versuchsreihe [O 3832 (6293)].

Für diese ergab sich:

Nr. des Versuchsstückes	Größe	Spannung (Kompensatorverstellung)	Mittel
265	4 × 4 × 24 mm	0,385	0,416
266	4 × 4 × 24 „	0,464	
267	4 × 4 × 24 „	0,398	
268	4 × 4 × 20 „	0,400	0,370
269	4 × 4 × 20 „	0,294	
270	4 × 4 × 20 „	0,415	
271	4 × 4 × 16 „	0,322	0,322
272	4 × 4 × 16 „	0,328	
273	4 × 4 × 16 „	0,315	
274	4 × 4 × 12 „	0,261	0,245
275	4 × 4 × 12 „	0,244	
276	4 × 4 × 12 „	0,230	
277	4 × 4 × 8 „	0,145	0,180
278	4 × 4 × 8 „	0,183	
279	4 × 4 × 8 „	0,212	

Nr. des Versuchsstückes	Größe	Spannung (Kompensator- ablesung)	Mittel
286	4 × 4 × 4 mm	0,087	0,088
287	4 × 4 × 4 „	0,088	
280	6 × 6 × 6 „	0,166	0,146
281	6 × 6 × 6 „	0,121	
282	6 × 6 × 6 „	0,150	
283	5 × 5 × 5 „	0,121	0,127
284	5 × 5 × 5 „	0,119	
285	5 × 5 × 5 „	0,142	

Aus den obigen Messungen geht hervor, daß geringe Schwankungen in der Vorbehandlung schon verhältnismäßig große Änderungen der Spannung zur Folge haben können, so daß die Abweichung für das Versuchsstück Nr. 14 eventuell

Fig. 22.

auf derartige Abweichungen zurückzuführen ist. Dagegen scheint die Abweichung des Versuchsstückes 19 von geradlinigem Verlauf den gleichen Gesetzen zu folgen, wie sie in Fig. 22 angedeutet sind. Es zeigt sich hier deutlich die Tendenz, daß bei größeren Stücken die erzeugten Spannungen kleiner sind, als es einem linearen Gesetze zufolge sein müßte. Bei der oben beschriebenen Meßanordnung (Ausblendung gleich

großer Teile bei allen Versuchsstücken) scheint bei Vergrößerung des Volumens nur die Vergrößerung der linearen Abmessung einen Einfluß (des durchlaufenen Glasweges) auf die Spannung zu haben. Es ergibt sich nämlich

bei Größe	$6 \times 6 \times 6$ mm	für die mittl. Spannung pro Längeneinheit	0,024,
„ „	$5 \times 5 \times 5$ „ „ „ „	„ „ „	0,025,
„ „	$4 \times 4 \times 4$ „ „ „ „	„ „ „	0,022,

also eine verhältnismäßig gute Übereinstimmung der Werte. Um die Frage noch exakter beantworten zu können, muß noch umfangreicheres Material zur Untersuchung gelangen.

Zusammenfassung.

Wird die durch die Kühlung im optischen Glase erzeugte Spannung durch den Mittelwert des Gangunterschiedes gemessen, so ist ihre Abhängigkeit von der Härtungstemperatur τ gegeben durch

$$(\tau_0 - \tau)(S + S_0) = C.$$

Diese Gleichung ist nur innerhalb eines Bereiches gültig, in dem der Einfluß der inneren Reibung zu vernachlässigen ist. Oberhalb der Erweichungstemperatur τ_0 bleibt die erzeugte Spannung nahezu unabhängig von der Kühltemperatur (0 608, 0 198). Die maximal erreichbare Spannung ist nicht nur eine Funktion der Form, sondern hängt auch von der chemischen Zusammensetzung des Glases ab.

Die Abhängigkeit der Konstanten C , S_0 und τ_0 von der chemischen Zusammensetzung wurde für die Bleigläser ermittelt und für die Konstanten C und S_0 ein ausgeprägter Extremwert zwischen 40 und 60 Proz. Gehalt an PbO gefunden. Die Extrapolation der Kurven ergibt für ein Glas von etwa 76 Proz. PbO die Eigenschaft, daß dieses Glas für $\lambda = 546,1 \mu\mu$ bei jeder beliebigen Kühlweise keine Doppelbrechung zeigen dürfte. Der von Pockels ermittelte Gehalt an PbO für ein Glas, welches bei beliebiger mechanischer Deformation spannungsfrei bleibt, ergab 75,7 Proz. Unter Berücksichtigung der Spannungskonstante für S_{386} folgt an Stelle von 76 Proz. etwa 74 Proz., also eine Abweichung im gleichen Sinne, wie sie von Pockels für mechanisch indifferentes Glas gefunden wurde.

Die Einlagerung von Schwefelcadmium scheint eine eigentümliche Art polarer Doppelbrechung hervorrufen zu können. Die Messungen und Spannungsbilder für das Jenaer Gelbglass *F* 5899 scheinen darauf hinzuweisen.

Auch bei Zimmertemperatur findet ein zeitlicher Ausgleich der Spannung statt; bei schwach gespannten Stücken tritt dagegen eine geringe Zunahme auf. Die Relaxationszeit ist infolgedessen nur der Größenordnung nach zu ermitteln.

Die Abhängigkeit der Härtungsspannung von der Form wurde innerhalb enger Grenzen zu bestimmen versucht. Es ist noch nicht gelungen, das Gesetz eindeutig zu bestimmen.

Jena und Friedenau, Mai 1913.

(Eingegangen 22. Mai 1913.)