Ueber zwei geometrische Probleme.

(Von Herrn C. F. Geiser in Zürich.)

Der bekannte Satz: „dass von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades der neunte im Allgemeinen durch die acht übrigen eindeutig bestimmt ist,“ kann nach zwei Seiten hin zu einer weiteren Ausführung Anlass geben. Man kann sich nämlich 1., die Aufgabe stellen: wenn acht der neun Punkte gegeben sind, den neunten linear zu construiren, welche Aufgabe wohl zuerst von Herrn *Chasles* *) in seiner „Construction de la courbe du troisième ordre“ (Comptes rendus 1853) gelöst worden ist. Es bietet sich aber 2., die Frage nach der Abhängigkeit der neun Punkte unter sich dar. Die zur Lösung dieser Frage nöthigen analytischen Hülfsmittel finden sich vorerst in den Abhandlungen des Herrn *Hesse* „über Curven dritten Grades“ (dieses Journal, Bd. 23—38) und dann in der Abhandlung des Herrn *Aronhold* „über die Doppeltangenten der Curven vierten Grades“ (Monatsberichte der Berliner Akademie von 1864). Die synthetische Lösung, welche die nachfolgenden Entwicklungen geben, schliesst sich insofern an die letztcitirte Abhandlung an, als beiderorts die Schaaren von Curven dritten Grades durch sieben feste Punkte zu Grunde gelegt werden.

Aufgabe.

Wenn von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades sieben fest bleiben, während der achte nach einem bestimmten Gesetze sich bewegt, nach welchem Gesetze ändert dann der neunte seine Lage?

I.

Wir setzen zunächst voraus, dass die sieben festen Punkte voneinander unabhängig seien, dann hat man sofort die beiden bekannten Sätze:

1. *Bewegt sich der achte Punkt auf der Verbindungsgeraden zweier Grundpunkte, so beschreibt der neunte Punkt den Kegelschnitt, welcher durch die übrigen fünf Grundpunkte gelegt werden kann.*

2. *Bewegt sich der achte Punkt auf dem Kegelschnitt durch fünf*

*) Erst während des Druckes dieses Aufsatzes habe ich gesehen, dass die angeführte Construction zuerst von Herrn *Hart* (Cambridge and Dublin Math. Journ.) gegeben worden ist.

der Grundpunkte, so durchläuft der neunte Punkt die Verbindungsgerade der beiden übrigen.

Einem achten Punkte entspricht, wie im Eingange bemerkt worden, im Allgemeinen nur *ein* neunter, denn gäbe es deren zwei, so existirten zwei Curven dritten Grades, welche zehn Punkte gemein hätten. Diess ist unmöglich, wenn die Curven dritten Grades nicht zerfallen und einen Theil gemein haben, was durch die Annahme der Unabhängigkeit der sieben Grundpunkte von einander ausgeschlossen ist; denn die einzigen Curven dritten Grades welche durch die sieben Grundpunkte gehen und zerfallen, sind diejenigen, welche je aus einem Kegelschnitt durch fünf der Grundpunkte und der Verbindungsgeraden der beiden übrigen bestehen. Dass diese niemals einen Theil gemeinschaftlich haben können, ist klar.

Wenn aber die ausgesprochene Eindeutigkeit keine Ausnahme zulassen würde, so müssten (8) und (9) linear von einander abhängen, d. h. wenn (8) eine Gerade beschreiben würde, so müsste (9) ebenfalls in einer Geraden sich bewegen, was durch die obigen Sätze 1. und 2. widerlegt ist. Dass die Grundpunkte selbst diese Ausnahmefälle ergeben, ist leicht abzusehen. In der That: Betrachtet man die Curve C_3 , welche durch die Punkte (2)–(7) geht und in (1) einen Doppelpunkt besitzt, so hat dieselbe mit irgend einer anderen der Curven dritten Grades durch (1)–(7) neun Punkte gemein nämlich (2)–(7) einfach, (1) doppelt (als (1) und (8) gezählt) und noch einen Punkt (9) welcher nothwendig auf C_3 liegen muss. Alle Curven nun durch (1) bis (7) und (9) haben also in (1) zwei Punkte gemein, d. h. sie berühren sich dort. Da nun aber umgekehrt (9) auf unserer speciellen C_3 beliebig gewählt werden kann, und dann stets (8) mit (1) zusammenfallen muss, so folgt:

3. *Fällt von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades, von denen sieben fest sind, der achte mit einem der festen, z. B. mit (1) zusammen, so liegt der neunte auf der Curve dritten Grades, welche durch (2)–(7) geht und (1) zum Doppelpunkte hat.*

Der Satz ist auch in der Umkehrung richtig, was sich in der obigen Betrachtung von selbst versteht.

II.

Man ist nun in den Stand gesetzt, die gestellte Aufgabe zu lösen, denn diess ist geschehen, sobald man angeben kann, in welcher Curve C_x sich (9) bewegt, wenn (8) eine beliebige Gerade G durchläuft. Die Gerade G schneidet

die C_3 , welche durch (2) — (7) geht, und (1) zum Doppelpunkte hat, in drei Punkten, und jedem derselben entspricht (1), also ist dieser ein dreifacher Punkt von C_x ; dasselbe gilt für jeden der Punkte (2) bis (7). Bewegt sich nun (9) auf einer zweiten Geraden G' , so erhält man eine zweite Curve C'_x , welche C_x in x^2 Punkten schneidet. Einer davon ist derjenige Punkt, welcher dem Durchschnittspunkte von G und G' entspricht, die andern fallen mit den Grundpunkten zusammen. Jeder derselben ist sowohl dreifacher Punkt von C_x als von C'_x , also sind in ihm neun Durchschnittspunkte der beiden Curven vereinigt, und es ist

$$x^2 = 1 + 7 \cdot 9 \quad \text{oder}$$

$$x = 8; \quad \text{d. h. :}$$

4. *Bleiben von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades sieben fest, während der achte eine Gerade G beschreibt, so durchläuft der neunte eine Curve achten Grades C_8 , welche die sieben festen zu dreifachen Punkten hat.*

Man kann ohne Weiteres die folgenden speciellen Sätze hinzufügen:

Geht G durch einen der Grundpunkte, z. B. durch (1), so zerfällt die C_8 in die C_3 , welche durch (2) — (7) geht und (1) zum Doppelpunkte hat, und eine C_5 , welche (2) bis (7) zu Doppelpunkten hat und durch (1) geht, und ferner was den Satz 1) ergänzt:

Geht G durch zwei der Grundpunkte, z. B. (1) und (2), so zerfällt C_8 in zwei leicht zu bestimmende Curven dritten Grades, welche je (1) oder (2) zu Doppelpunkten haben, und einen Kegelschnitt durch die Punkte (3) — (7).

III.

Das Hauptresultat des vorigen Paragraphen hätte man auch wie folgt erhalten können: durch die festgestellte Beziehung entspricht jedem beliebigen Punkte der Ebene als (8) aufgefasst nur ein einziger Punkt (9), mit Ausnahme der Grundpunkte, deren jedem eine Curve C_y von noch unbestimmten Grade y entspricht. Jeder Geraden in der Ebene wird dann eine Curve C_x vom Grade x zugehören, also auch einer Geraden, welche zwei der Grundpunkte enthält. Die zugehörige C_x muss aber zerfallen, und zwar in die zwei den angenommenen zwei Grundpunkten entsprechenden C_y und den Kegelschnitt der fünf übrigen Grundpunkte. Es ist also:

$$(\alpha.) \quad x = 2y + 2.$$

Da einer Geraden eine Curve vom x^{ten} Grade entspricht, so wird einer Curve vom n^{ten} Grade, wie leicht zu beweisen ist, eine Curve vom $n \cdot x^{\text{ten}}$

Grade entsprechen, also speciell einem Kegelschnitte eine Curve $2x^{\text{ten}}$ Grades. Geht nun der Kegelschnitt durch fünf der Grundpunkte, so entspricht ihm eine C_{2x} , welche zerfällt, und zwar in die fünf C_y der angenommenen Grundpunkte, und die Gerade der beiden übrigen. Es ist also:

$$(\beta.) \quad 2x = 5y + 1.$$

Aus den beiden Gleichungen $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ zieht man $x = 8$ und $y = 3$, was mit den beiden bereits gefundenen Resultaten übereinstimmt. Man kann übrigens jetzt aus der Formel $(\beta.)$ folgenden Satz herleiten, welcher in gewisser Beziehung den Satz 2. ergänzt:

5. *Wenn von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades sieben fest bleiben, während der achte einen Kegelschnitt beschreibt, so durchläuft der neunte eine Curve sechzehnten Grades, C_{16} , welche die sieben festen Punkte zu sechsfachen Punkten hat. Wenn insbesondere der Kegelschnitt durch fünf der Grundpunkte geht, so zerfällt die C_{16} in fünf leicht zu bestimmende Curven dritten Grades und die Gerade der beiden übrigen Grundpunkte.*

Unter Anwendung des Satzes 4. und mittelst einiger bekannter Principien lässt sich nun die gestellte Aufgabe für jedes beliebige Gesetz der Bewegung des Punktes (8) vollständig lösen, worauf aber des geringen Interesses wegen hier nicht eingegangen werden soll.

IV.

Wir wollen noch die Frage beantworten: Giebt es Punkte (8), welche mit ihrem entsprechenden Punkte (9) zusammenfallen? Die Betrachtungen, welche den Satz 3. in §. II. zur Folge hatten, geben hierüber vollständige Auskunft. Fallen nämlich die Punkte (8) und (9) zusammen, so construirt man die C_3 , welche durch (1) bis (6) geht und (8) zum Doppelpunkte hat. Diese hat mit irgend einer anderen Curve der Schaar (1)–(9) zunächst die acht Punkte (1)–(6), (8) und (9) gemein und gehört also selbst dieser Schaar an, d. h. sie geht auch durch (7). Wenn also (8) und (9) zusammenfallen sollen, so muss (8) ein Doppelpunkt irgend einer Curve dritten Grades durch (1)–(7) sein. Das Umgekehrte versteht sich von selbst.

Unter Zuhülfenahme des Steinerschen Satzes: *Soll eine Curve dritten Grades durch gegebene sieben Punkte gehen, und einen Doppelpunkt haben, so ist der Ort dieses Doppelpunktes eine Curve sechsten Grades, welche die sieben Punkte zu Doppelpunkten hat,*“ folgt nun:

6. *Sollen von den neun Durchschnittspunkten zweier Curven dritten Grades, von denen sieben fest sind, die beiden übrigen zusammenfallen, so ist*

der Ort dieser zusammenfallenden Punkte eine Curve sechsten Grades, welche die sieben Grundpunkte zu Doppelpunkten hat.

Von der Curve sechsten Grades lassen sich übrigens sofort noch eine Reihe von Punkten angeben. Man lege nämlich durch je fünf Grundpunkte einen Kegelschnitt, und durch die beiden übrigen eine Gerade, so haben Kegelschnitt und Gerade zwei Punkte gemein, welche der Curve sechsten Grades angehören; da eine solche Zusammenstellung auf 21 verschiedene Arten möglich ist, so erhält man zu den sieben Doppelpunkten noch 42 einfache Punkte.

V.

Es ist stets angenommen worden, dass die sieben Grundpunkte von einander unabhängig seien. Einzelne Ausnahmen sollen hier noch behandelt werden.

a. Drei der Grundpunkte z. B. (1), (2), (3) liegen auf einer Geraden. Die drei Curven dritten Grades, welche dann diesen drei Punkten entsprechen, zerfallen je in einen Kegelschnitt und eine Gerade, die leicht zu bestimmen sind. Liegt nun ein Punkt (8) auf der Geraden (123), so entspricht ihm nothwendigerweise diese ganze Gerade. Daraus folgt auch, dass die einer beliebigen Geraden entsprechende C_8 in eine Gerade und eine Curve siebenten Grades zerfällt. Einem beliebigen Kegelschnitte durch (4) (5) (6) (7) entspricht eine C_{16} , welche aus vier leicht zu bestimmenden Curven dritten Grades, der doppelt gelegten Geraden (123) und dem Kegelschnitte selbst besteht. Die C_6 , welche der Ort der sich selbst entsprechenden Punkte ist, zerfällt in die Gerade (123) und eine C_5 etc.

b. Die sechs Grundpunkte (1) – (6) sollen auf einem Kegelschnitte liegen. Einem Grundpunkte des Kegelschnitts entspricht dann eine C_3 , welche in den Kegelschnitt selbst und eine Gerade zerfällt. Einem Punkte auf dem Kegelschnitt entspricht der ganze Kegelschnitt; zu einer beliebigen Geraden gehört eine C_8 , welche in den doppelt gelegten Kegelschnitt und eine C_4 zerfällt. Einer der Geraden durch (7) gehört eine C_8 zu, welche aus einer C_3 , dem doppelt gelegten Kegelschnitt und einer Geraden besteht. — Die C_6 zerfällt in $C_4 + C_2$.

c. Die sieben Grundpunkte mögen folgendermassen vertheilt sein: (1), (2), (3) bilden die Ecken eines Dreiecks in der Weise, dass (6) auf der Seite (23), (5) auf (31), (4) auf (12) liegt, während (7) der Durchschnitt ist von (16), (25) und (34). Den Grundpunkten selbst entsprechen jeweiligen drei

Gerade. Irgend einem Punkte auf einer der sechs Geraden, welche je drei der Grundpunkte enthalten, entspricht die zugehörige Gerade selbst. Die Curve der sich selbst entsprechenden Punkte besteht aus diesen sechs Geraden. Die C_8 einer beliebigen Geraden besteht aus denselben sechs Geraden und einem Kegelschnitt durch (4), (5), (6); einem Kegelschnitt durch (1237) entspricht eine C_{16} , welche zerfällt in die sechs Geraden, jede doppelt gezählt, und eine C_4 mit (456) als Doppelpunkten.

d. Ebenso leicht discutirt man den Fall, wo (123456) auf einem Kegelschnitte liegen, während die Geraden (14), (25), (36) sich in dem Punkte (7) treffen *).

Ein der behandelten Aufgabe analoges Problem bieten die Flächen zweiten Grades. Wenn von den acht Durchschnittspunkten dreier Flächen zweiten Grades sieben gegeben sind, so ist durch sie der achte im Allgemeinen eindeutig bestimmt, und durch Herrn Hesse ist im 26^{ten} Bande dieses Journals gezeigt worden, wie derselbe linear construirt werden kann. Die gegenseitige Abhängigkeit von acht solchen Punkten ist ebenfalls von Herrn Hesse in seinen „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes“ (16^{te} Vorlesung) untersucht worden. Eine neue Behandlung des Gegenstandes giebt die nachfolgende Lösung unserer zweiten

Aufgabe:

Von den acht Durchschnittspunkten dreier Flächen zweiten Grades sind sechs von einander unabhängige fest, während der siebente nach einem bestimmten Gesetze sich bewegt. Wie verändert der achte seine Lage?

Es genügt. übrigens vollständig, wenn man die Aufgabe löst unter der Voraussetzung 1., der siebente Punkt beschreibt eine willkürliche Gerade, 2., der siebente Punkt beschreibt eine willkürliche Ebene, weil dann nach bekannten Principien die Bewegung des achten Punktes für jede beliebige Veränderung des siebenten bestimmt werden kann.

VI.

Bevor wir auf die Beantwortung dieser Frage näher eingehen, untersuchen wir, in welchen verschiedenen Weisen sich drei Flächen zweiten Grades schneiden können. Zunächst sind die folgenden Fälle zu erwähnen:

*) Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Fälle c. und d. gewissermassen als geometrische Verwandtschaften zweiten und ersten Grades aufgefasst werden können.

1. Die Flächen zweiten Grades fallen ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammen.

2. Sie haben eine Raumcurve vierten Grades (die auch in bekannter Weise in Theile zerfallen kann) gemein, d. h. sie gehören zu demselben Büschel.

3. Sie haben nur acht Punkte gemein. —

Es kann nun auch eintreten, dass die drei Flächen je in zwei Ebenen zerfallen, und zwar so, dass sie eine derselben gemein haben; dann besteht der Durchschnitt aus dieser Ebene und einem Punkte oder einer Geraden, je nachdem die drei zweiten Ebenen einen Punkt oder eine Gerade gemein haben. Dieser Fall tritt übrigens bei der gestellten Aufgabe nicht ein, da wir die Unabhängigkeit der sechs Grundpunkte voneinander voraussetzen. — Aber es kann vorkommen, dass die drei Flächen eine Raumcurve von niederem Grade als dem vierten gemein haben, und diesen Fall müssen wir hier noch berücksichtigen.

4. Haben drei Flächen zweiten Grades, die nicht demselben Büschel angehören, eine irreductible Raumcurve dritten Grades gemein, so schneiden sie sich ausserhalb derselben in keinem weiteren Punkte mehr. Denn wäre ein solcher vorhanden, so könnte man durch ihn eine doppelt-schneidende Gerade der Raumcurve dritten Grades legen, welche dann allen Flächen angehören müsste, so dass diese demselben Büschel entnommen wären, was ausgeschlossen ist.

5. Die Flächen haben einen Kegelschnitt K_2 und eine Gerade G , welche K_2 in einem Punkte trifft, gemein: alsdann schneiden sie sich aus demselben Grunde wie vorhin in keinem weiteren Punkte mehr. Dies hat auch seine Gültigkeit, wenn K_2 in zwei sich schneidende Gerade zerfällt.

6. Die Flächen haben einen Kegelschnitt gemein, (der auch in zwei sich schneidende Gerade zerfallen kann), dann schneiden sie sich ausserdem noch in zwei Punkten, weil zwei Kegelschnitte, die derselben Fläche zweiten Grades angehören, stets zwei Punkte gemein haben.

7. Drei Flächen zweiten Grades treffen sich in zwei sich nicht schneidenden Geraden, dann ist kein Schnittpunkt ausserhalb derselben vorhanden. In der That: denn sonst könnte man aus ihm eine Gerade ziehen, welche die beiden ersten trifft, und diese würde dann allen dreien gemein sein, was auf den Specialfall in 5. führt.

8. Die Flächen haben eine Gerade gemein. Je zwei von ihnen

schneiden sich ausserdem noch in einer Raumcurve dritten Grades. Da nun dieselben nach einem Satze von *Chasles* *) vier Punkte gemein haben, so folgt, dass sich die drei Flächen zweiten Grades ausser der Geraden noch in vier Punkten schneiden.

VII.

Es ist jetzt festzustellen, ob und welche Ausnahmefälle die eindeutige Beziehung zwischen dem siebenten und dem achten Punkte erleiden könne. Man sieht sofort ein, dass *zunächst einem der sechs Grundpunkte, wenn der siebente Punkt mit ihm zusammenfällt, nicht bloss ein einziger achter Punkt, sondern eine ganze Fläche zugehört.* Es giebt nun auch Punkte, denen Curven entsprechen, und zwar ergeben sich dieselben aus folgenden Sätzen:

1. Hat eine irreductible Raumcurve dritten Grades mit einer Fläche zweiten Grades sieben Punkte gemein, so gehört sie ihrer ganzen Ausdehnung nach dieser Fläche an.

2. Hat eine Gerade mit einer Fläche zweiten Grades drei Punkte gemein, so ist sie eine Gerade dieser Fläche.

Wählt man also zunächst (7) auf der irreductiblen Raumcurve dritten Grades C_3 , welche durch die sechs Grundpunkte (1) bis (6) gelegt werden kann, so haben alle Flächen zweiten Grades durch die sieben Punkte die C_3 gemein, und zwar nach VI, 4 keinen weiteren Punkt, d. h.:

Liegt von den acht Durchschnittspunkten dreier Flächen zweiten Grades der siebene auf der Raumcurve dritten Grades, welche durch die sechs ersten gelegt werden kann, so erfüllt der achte diese Raumcurve ganz.

Liegt ferner (7) auf der Verbindungsgeraden G zweier Grundpunkte, z. B. (1) und (2), so haben alle Flächen zweiten Grades durch (1)–(7) die Gerade (12) gemein, und können sich ausserdem nach VI, 8. nur noch in den Punkten (3), (4), (5), (6) schneiden, d. h.

Liegt von den acht Durchschnittspunkten dreier Flächen zweiten Grades

*) Der citirte Satz lautet: Zwei Raumcurven dritten Grades C_3 und C'_3 , welche auf demselben Hyperboloid H liegen, haben vier oder fünf Punkte gemein, je nachdem sie von derselben Schaar oder von verschiedenen Schaaren der Geraden des Hyperboloids doppelt geschnitten werden. Der Beweis kann wie folgt geführt werden: Man lege durch C_3 irgend ein zweites Hyperboloid H' , welches H ausser in C_3 noch in einer Geraden G schneidet. H' wird nun von C'_3 in sechs Punkten getroffen, welche offenbar auf G und C_3 liegen. G schneidet C_3 in zwei, und C'_3 in zwei oder einem Punkte, je nachdem der erste oder der zweite der angeführten Fälle eintritt, so dass wirklich für die Schnittpunkte der beiden Raumcurven vier oder fünf Punkte übrig bleiben. Unser Fall erledigt sich dadurch leicht.

der siebente auf der Verbindungsgeraden von zweien der sechs ersten, so erfüllt der achte diese Verbindungsgerade ganz.

Da aber fünfzehn Verbindungsgeraden der sechs Grundpunkte möglich sind, so folgt, dass die Ausnahmepunkte der eindeutigen Beziehung bestehen

1. aus den sechs Grundpunkten, deren jedem eine Fläche F_y von noch unbestimmtem Grade y entspricht;
2. aus den Punkten der C_3 deren jedem die C_3 zugehört;
3. aus den Punkten der fünfzehn G , deren jedem die zugehörige Gerade entspricht.

Die Betrachtungen in VI. lehren zudem, dass keine weiteren Ausnahmefälle möglich sind.

VIII.

Wir fügen zu den Ergebnissen in VII. noch folgenden Satz:

Bewegt sich (7) in der Ebene, welche durch drei der Grundpunkte, z. B. (1), (2), (3) geht, so durchläuft (8) die Ebene der drei anderen (4), (5), (6).

Dem Flächensystem zweiten Grades durch (1)–(6) gehört nämlich auch die Fläche an, welche aus den beiden Ebenen (123) und (456) besteht, also muss (8) in einer dieser beiden liegen. Wäre aber (8) in der Ebene (1237) gelegen, so hätten die sämtlichen Flächen den Kegelschnitt durch (12378) und die Punkte (456) gemein (resp. einen durch dieselben bestimmten zweiten Kegelschnitt), was nach VI, 6 ausgeschlossen ist, folglich liegt (8) in der Ebene (456). Eine Vervollständigung dieses Satzes wird übrigens in IX. gegeben werden.

Lässt man jetzt (7) auf der Schnittgeraden G' der Ebenen (123) und (456) sich bewegen, so wird (8) auf eben dieser Geraden bleiben, und zwar wird (7) stets sich selbst entsprechen, d. h. mit (8) zusammenfallen, was nach dem vorigen Beweise an sich klar ist.

Für jede der zwanzig Ebenen also, welche drei der Grundpunkte enthalten, und für jede der zehn Geraden G' (ausser den fünfzehn G), in welchen zwei solche Ebenen sich schneiden, ist die gestellte Aufgabe gelöst.

IX.

Wenn (7) eine beliebige Ebene e durchläuft, so beschreibt (8) eine Fläche F_x von noch unbekanntem Grade x . Da e und C_3 sich in drei Punkten schneiden, so hat F_x die C_3 zur dreifachen Curve. Ferner schneidet e jede der Geraden G in einem Punkte, dem G entspricht, also liegen sämtliche

fünfzehn Geraden G auf F_x . Da jeder Ebene eine F_x entspricht, so wird das auch der Fall sein müssen, für diejenigen, welche drei der Grundpunkte enthalten. Tritt dies ein, so zerfällt F_x in eine Ebene (die Ebene der drei anderen Grundpunkte) und drei F_y (die den ersten drei Grundpunkten entsprechen). Es ist also

$$x = 3y + 1. —$$

Einer beliebigen Geraden g entspreche eine Raumcurve C_z von noch zu bestimmendem Grade z . Da g jede F_y in y Punkten schneidet, so ist jeder der Grundpunkte ein y facher Punkt der C_z . Jeder beliebigen Geraden entspricht eine C_z , also auch einer der Geraden G' ; es ist aber klar, dass dann C_z zerfällt, und zwar 1. in G' selbst, und da G' sechs der Geraden G trifft, 2. in sechs der Geraden G , so dass also C_z als eine Raumcurve siebenten Grades erscheint.

Zwei beliebigen Ebenen entsprechen zwei F_x und diese schneiden sich, wenn sie irreductibel sind (was offenbar der Fall ist, wenn die beiden Ebenen keinen der Grundpunkte gemeinsam enthalten), in einer Raumcurve vom $x^{2^{ten}}$ Grade. Diese Raumcurve zerfällt aber, denn die beiden F_x haben gemein:

1. Die C_3 , welche für jede der beiden F_x eine dreifache Curve ist, und die also in der Schnittcurve neunfach auftritt, d. h. als Raumcurve vom siebenundzwanzigsten Grade.

2. Die fünfzehn G einfach gezählt,

3. die C_7 , welche der Schnittgeraden der beiden Ebenen entspricht, so dass also

$$x^2 = 27 + 15 + 7 = 49$$

und

$$x = 7$$

ist. Da aber

$$x = 3y + 1,$$

so findet man

$$y = 2.$$

Was nun noch die Flächen zweiten Grades anbetrifft, welche einem der Grundpunkte entsprechen, z. B. diejenige, welche von (1) abhängt, so erkennt man leicht, dass ihr die Geraden (12), (13), (14), (15), (16) ganz angehören (ebenso die C_3), so dass dieselbe offenbar nichts anderes ist als der Kegel, welcher (1) zum Mittelpunkte hat, und durch die übrigen Grundpunkte geht, wodurch er vollständig bestimmt ist.

X.

Alles zusammengefasst (wobei einzelne der früheren Sätze wiederholt werden) ergeben sich folgende Resultate:

1. *Bleiben von den acht Durchschnittspunkten dreier Flächen zweiten Grades (durch welche eine doppelt unendliche Schaar solcher Flächen gelegt werden kann) sechs, welche von einander unabhängig sind, fest, so ist der achte im Allgemeinen eindeutig bestimmt, sobald der siebente gegeben wird. Dies erleidet folgende Ausnahmen:*

a. *Fällt der siebente Punkt mit einem der sechs Grundpunkte zusammen, so kann der achte beliebig auf demjenigen Kegel zweiten Grades angenommen werden, welcher diesen Grundpunkt zum Mittelpunkt hat, und durch die fünf übrigen geht.*

b. *Liegt der siebente Punkt auf der irreductiblen Raumcurve dritten Grades, welche durch die sechs Grundpunkte geht, so kann der achte Punkt auf dieser Raumcurve willkürlich gewählt werden.*

c. *Wird der siebente Punkt auf irgend einer der fünfzehn Verbindungsgeraden der sechs Punkte zu zweien angenommen, so kann der achte auf dieser Verbindungsgeraden willkürlich gewählt werden.*

2. *Beschreibt der siebente Punkt irgend eine Ebene, so durchläuft der achte eine Fläche vom siebenten Grade, welche die Raumcurve dritten Grades durch die sechs Grundpunkte zur dreifachen Curve hat, und zudem die fünfzehn Verbindungsgeraden dieser Punkte einfach enthält.*

3. *Bewegt sich der siebente Punkt auf einer beliebigen Geraden, welche keinen der Grundpunkte enthält, so durchläuft der achte eine Raumcurve siebenten Grades, welche die sechs Grundpunkte zu Doppelpunkten hat.*

XI.

Man kann auch nach den Punkten (7) fragen, welche mit ihren entsprechenden Punkten (8.) zusammenfallen. Zur Beantwortung nehme man an, dass für einen Punkt (7) das Verlangte eintreffe, dann kann man durch (2), (3), (4), (5), (6) einen Kegel zweiten Grades mit dem Mittelpunkt (7) legen. Dieser hat nun mit der doppelt unendlichen Schaar von Flächen zweiten Grades durch (1) bis (8) sieben der gemeinschaftlichen Punkte gemein, nämlich (2) bis (8), also auch den achten (1)*). Die Frage, welche wir uns

*) Diese Betrachtung ergibt unmittelbar und unabhängig von den früheren Entwicklungen, dass einem der Grundpunkte der Kegel zweiten Grades entspricht, welcher ihn zum Mittelpunkt hat und durch die fünf übrigen geht. Die Gleichung $x=3y+1$ führt dann sofort auf einen der beiden gesuchten Hauptsätze in IX.

gestellt haben, ist also gleichbedeutend mit der anderen: Welches ist der Ort der Mittelpunkte der Kegelflächen zweiten Grades, welche durch sechs voneinander unabhängige Punkte im Raume gelegt werden können? Eine synthetische Lösung derselben findet sich in der zürcherischen Vierteljahrsschrift, Bd. X; ihr entnehmen wir einige der nachfolgenden Angaben: Der gesuchte Ort ist eine Fläche vierten Grades F_4 , welche enthält: 1. die irreductible Raumcurve dritten Grades durch die sechs Grundpunkte, 2. die fünfzehn Verbindungsgeraden, welche dieselben zu je zweien verbinden, 3. die zehn Geraden, in denen sich je zwei Ebenen schneiden, welche zusammen alle sechs Grundpunkte enthalten. Zufolge des Satzes: „Enthält eine Fläche drei durch einen Punkt gehende Gerade, welche nicht in derselben Ebene liegen, so ist ihr Schnittpunkt ein Doppelpunkt der Fläche“, sind die Grundpunkte Doppelpunkte der betrachteten Fläche F_4 . — Wenn nun F_7 die einer Ebene e entsprechende Fläche nach obiger Beziehung ist, so schneidet sie die F_4 in einer Raumcurve vom achtundzwanzigsten Grade. Diese besteht aus der dreifachen Raumcurve dritten Grades C_3 , den fünfzehn Verbindungsgeraden G der Grundpunkte, einfach gezählt, und der ebenen Curve vierten Grades, in welcher sich e und F_4 treffen. F_7 hat aber ausser dieser Curve noch eine Curve dritten Grades mit e gemein, die, wie man leicht erkennt, aus den drei Geraden besteht, welche die drei Durchschnittspunkte von e mit C_3 untereinander verbinden.

Eine Reihe von interessanten speciellen Fällen, welche die durchgeführte allgemeine Entwicklung gewährt, kann hier des Raumes wegen nicht näher erörtert werden.

Zürich, den 20. October 1866.