Über die Formeln der sphärischen Trigonometrie. Von P. Harzer.

Die folgende kurze Herleitung der gebräuchlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie findet vielleicht als Lückenbüßer ein Plätzchen in den Astronom. Nachrichten.

Auf einer Kugel K vom Halbmesser 1 liegt das von größten Kreisen (grK) gebildete Dreieck ABC mit den in der gleichen Reihenfolge bezeichneten Winkeln $\alpha\beta\gamma$ und den gegenüberliegenden Seiten $a\beta c$. Die Punkte A, C und die Größen b, γ werden ungeändert festgehalten; die Seite a aber erhält in B einen differentiellen Zuwachs da ; die entsprechenden Zuwächse der übrigen Größen sollen zunächst bestimmt werden. Für die Projektionen von da auf AB und senkrecht zu AB findet man einerseits mit Rücksicht darauf, daß die erste Projektion den Zuwachs der Seite c darstellt und daß die zweite Projektion der dem Zuwachse des Winkels α zugehörige Bogen eines Kreises vom Halbmesser $\sin c$ ist, die Werte dc , $\sin c da$, und andererseits, da β der Projektionswinkel gegen AB ist, die Werte $\cos \beta da$, $\sin \beta da$.

$$\sec c (d^2 \cos c / da^2) + 1 = -\sec c (d \sin c \cos \beta / da) + 1 = \operatorname{tg} c \sin \beta (d\beta / da) + \sin^2 \beta = 0.$$

Zusammengefaßt bestehen also für die Änderungen des Dreiecks die folgenden Differentialformeln (Df)

$$da/da = 1 \quad db/da = 0 \quad dc/da = \cos \beta \quad d\alpha/da = \sin \beta / \sin c \quad d\beta/da = -\sin \beta / \operatorname{tg} c \quad d\gamma/da = 0.$$

Anstatt nun die hierzu gehörenden Integralformeln (If) einzeln aufzusuchen, stellt man die folgenden vier Ausdrücke auf

$$\begin{aligned} F_1 &= \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{a+b}{2} - \sin \frac{c}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} & F_3 &= \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{a-b}{2} - \sin \frac{c}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \\ F_2 &= \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{a+b}{2} - \cos \frac{c}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} & F_4 &= \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{c}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2}. \end{aligned}$$

Die mit Rücksicht auf die Df gebildeten Ableitungen dieser Ausdrücke ergeben die Formeln

$$2 \frac{dF_1}{da} = +F_2 \quad 2 \frac{dF_2}{da} = -F_1 \quad 2 \frac{dF_3}{da} = +F_4 \quad 2 \frac{dF_4}{da} = -F_3 \quad \frac{d}{da} \left(\sum_1^4 F_a^2 \right) = 0$$

Der Wert der Summe $\sum_1^4 F_a^2$ hängt also nicht von der Länge a der gL ab. Nun werden die Werte der vier Ausdrücke

F_a für $a = 0$ identisch gleich Null, da dann $\alpha = 0$, $\beta = \pi - \gamma$, $c = b$ wird. Der Wert der Summe verschwindet also gleichfalls für $a = 0$ und, da er von a nicht abhängt, so verschwindet er auch für $a \neq 0$. Da die Ausdrücke F_a reell sind, so verschwindet auch der Wert eines jeden einzelnen Ausdruckes F_a ; es gelten also die If

$$F_a = 0 \quad \alpha = 1, \dots, 4$$

die mit den Namen *Delambre*, *Mollweide*, *Gauß* verbunden werden. Aus ihnen sind die übrigen gebräuchlichen If in der folgenden Weise abzuleiten. Jeder der vier Ausdrücke F_a besteht aus zwei Teilen, die in der angegebenen Reihenfolge durch die Formel

$$F_a = F'_a - F''_a \quad \alpha = 1, \dots, 4$$

bezeichnet werden. Dann gelten auch die Formeln

$$F_{\alpha, \beta} = 4(F'_\alpha F'_\beta - F''_\alpha F''_\beta) = 0 \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 4.$$

Die hiernach gebildeten zehn Ausdrücke $F_{\alpha, \beta}$ lassen sich nun als Summen und Differenzen der folgenden neun Ausdrücke darstellen:

$$\begin{aligned} F_5 &= +\sin a \sin b + \cos a \cos b \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos c & F_8 &= -\sin c \cos \alpha + \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma \\ F_6 &= +\cos c & F_9 &= -\sin c \cos \beta + \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos \gamma \\ F_7 &= -\cos \gamma & F_{10} &= +\cos a \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \cos c \\ & & F_{11} &= +\cos b \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \cos c \\ F_{12} &= +\sin b \sin \gamma - \sin \beta \sin c \\ F_{13} &= +\sin a \sin \gamma - \sin \alpha \sin c \end{aligned}$$

Es wird nämlich

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= +F_5 + F_6 + F_7 & F_{1,2} &= +F_8 + F_9 & F_{2,4} &= +F_{10} + F_{11} \\ F_{2,2} &= -F_5 - F_6 + F_7 & F_{3,4} &= -F_8 + F_9 & F_{1,3} &= -F_{10} + F_{11} \\ F_{3,3} &= -F_5 + F_6 - F_7 & & & F_{1,4} &= +F_{12} + F_{13} \\ F_{4,4} &= +F_5 - F_6 - F_7 & & & F_{2,3} &= -F_{12} + F_{13} \end{aligned}$$

Das Verschwinden der Ausdrücke $F_{\alpha,\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 4$) zieht aber das Verschwinden auch der Ausdrücke F_{α} ($\alpha = 5, \dots, 13$) nach sich. Es gelten also insgesamt die If

$$F_{\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, 13$$

die alle gebräuchlichen Formeln einschließen.

Die Df für ein in allen Stücken veränderliches Dreieck erhält man durch die vollständige Differentiation der Formeln F_{α} ($\alpha = 1, \dots, 4$). Die Anführung der so entstehenden Df kann bei ihrer Einfachheit hier unterbleiben. Man multipliziere nun diese vier Df erst mit ihren Koeffizienten von $d\alpha$, sodann mit denen von $d\alpha$, beachte die doppelte Gestalt, die diese Koeffizienten nach den Formeln $F_{\alpha} = 0$ ($\alpha = 1, \dots, 4$) annehmen, und summiere die vier Produkte in den beiden Fällen. Dann ergeben sich die Df

$$d\alpha - \cos \gamma d\beta - \cos \beta d\epsilon - \sin \epsilon \sin \beta d\alpha = 0$$

$$d\alpha + \cos \epsilon d\beta + \cos \beta d\gamma - \sin \gamma \sin \beta d\alpha = 0$$

Die Multiplikation mit den übrigen Koeffizienten ergibt keine neuen, sondern in Buchstabenvertauschung nur dieselben Formeln. Vertauscht man aber in den angegebenen

Sternwarte Kiel, 1919 Juli.

zwei Df a mit c und α mit γ , so erlangt man die Df

$$d\epsilon - \cos \alpha d\beta - \cos \beta d\alpha - \sin \alpha \sin \beta d\gamma = 0$$

$$d\gamma + \cos \alpha d\beta + \cos \beta d\alpha - \sin \alpha \sin \beta d\epsilon = 0$$

die, mit den früheren nach dem Schema 1) $\cdot 1/\sin \beta + 3) \cdot \cos \beta / \sin \beta$ und 2) $\cdot 1/\sin \beta - 4) \cdot \cos \beta / \sin \beta$ verbunden, die neuen Df

$$\sin \beta d\alpha - \sin \alpha \cos \epsilon d\beta - \sin \epsilon d\alpha - \sin \alpha \cos \beta d\gamma = 0$$

$$\sin \beta d\alpha + \sin \alpha \cos \gamma d\beta - \sin \gamma d\alpha + \sin \alpha \cos \beta d\epsilon = 0$$

liefern. Hiermit sind auch für die Df alle gebräuchlichen Formeln gewonnen worden.

In ganz ähnlicher Weise habe ich die geodätischen Dreiecke auch auf beliebigen Flächen konstanter positiver und negativer Krümmung (kpKr, knKr), und zwar für beide Arten der Flächen (mit und ohne Spitzen) für alle Flächen gemeinsam, behandelt. Wählt man für das absolute Krümmungsmaß den Wert 1, so gelten bekanntlich die für K gefundenen Formeln unverändert für alle Flächen kpKr; für alle Flächen knKr aber bleiben die cos und sin zwar für alle Winkel unverändert; für alle Seiten aber tritt zu den Argumenten von cos und sin der Faktor $i = \sqrt{-1}$ hinzu.

Paul Harzer.

Nova Aquilae 3.

Beobachtungsort: Altona. Instrument: Galileischer Feldstecher von 40 mm Öffnung und 4-maliger Vergrößerung. Die Größen der Vergleichsterne sind der R. H. P. entnommen. Die Extinktion ist nur bis Juni 21 einschl. berücksichtigt worden.

1918	M.Z.Gr.	Jul. Datum	Schätzungen	Gr. Bm.
		2421...		
Juni 11	10 ^h 0	756.417	α Lyr. 4 N 2 α Aql.	0 ^m 56
15	10.0	760.417	¹⁾	1.52
18	9.5	763.396	²⁾	2.24
18	10.25	763.427	α Oph. 1 N 1 γ Cygn.	2.07
21	10.5	766.438	γ Cygn. 2 N 1 γ Aql.	2.56 1
30	11.0	775.458	³⁾	3.44 2
Juli 4	11.0	779.458	γ Aql. 3 N 3 η Serp.	3.11
8	9.7	783.403	⁴⁾	3.52 3
Aug. 1	9.8	807.410	β Scuti 2 N 4 γ Aql.	4.66
1	11.25	807.469	i Aql. 2 N 4 γ Aql.	4.45
9	10.25	815.427	δ Aql. 3 N 2 θ Serp.	3.84
9	11.0	815.458	δ Aql. 3 N 3 β Scuti	3.96
11	8.75	817.365	δ Aql. 4 N 2 β Scuti	4.13
15	9.25	821.385	β Scuti 3 N 2 γ Aql.	4.81
25	8.0	831.333	β Scuti 4 N 2 γ Aql.	4.85
Sept. 1	8.6	838.358	N 0 γ Aql.	5.04
6	7.33	843.306	θ Serp. 3 N 4 γ Aql.	4.50
6	9.0	843.375	θ Serp. 3 N 5 γ Aql.	4.45
9	8.5	846.354	θ Serp. 4 N 3 γ Aql.	4.64
24	8.0	861.333	N 1 γ Aql.	4.91 4
28	7.5	865.313	β Scuti 4 N 2 γ Aql.	4.85
Okt. 2	7.0	869.292	⁵⁾	4.88
2	7.5	869.313	β Scuti 4 N 2 γ Aql.	4.85
8	8.0	875.333	N 0 γ Aql.	5.04 5

¹⁾ α Cygn. 2 N 3 α Oph.; α Aql. 3 N 3 α Oph.; α Cygn. 2 N 2 γ Cygn.

²⁾ N 0 γ Cygn.; α Oph. 2 N 2 β Oph.

³⁾ η Serp. 1 N 1 δ Aql.; γ Aql. 3 N 3 θ Serp.

⁴⁾ η Serp. 2 N 3 β Aql.; N 0 δ Aql.

⁵⁾ β Scuti 5 N 2 γ Aql.; β Scuti 4 N 1 $\frac{1}{2}$ γ Aql.

Altona, 1919 Juni.

1918	M.Z.Gr.	Jul. Datum	Schätzungen	Gr. Bm.
		2421...		
Okt. 9	9 ^h 0	876.375	γ Aql. 4 N 2 5 Aql.	5 ^m 47: 6
11	9.12	878.380	θ Serp. 6 N 2 γ Aql.	4.80 7
24	6.5	891.271	θ Serp. 5 N 1 $\frac{1}{2}$ γ Aql.	4.82 8
27	7.6	894.317	N 0 γ Aql.	5.04

Bemerkungen. 1. Rote Farbe der Nova und Mond stören! — 2. Doppelstern θ Serp. Gesamthelligkeit = 4^m10. — 3. Farbe rötlich-gelb. Ich sehe η Serpentis 0^m2 heller als δ Aquilae! — 4. Stufe = 0^m13. — 5. Im Sucher von 36 mm Öffnung erscheint die Nova schwächer! — 6. Im Sucher geschätzt. — 7. Wieder im Feldstecher geschätzt (im Sucher $N = 4$ Aql.). — 8. Feldstecher.

Mit dem Okular-Sternspektroskop des 5-Zöllers zählte ich 1918 Sept. und Okt. im Fadenspektrum — ohne Benutzung der Zylinderlinse — folgende Emissionsknoten:

Rot: 1 (H_{α});

Gelb: 2, mitunter 3, dicht nebeneinander; der hellste lag in der Mitte, der schwächere nach Rot, der zuweilen gesehene schwächste nach Blau hin;

Grün: zwischen Gelb und H_{β} glaubte ich manchmal 1 oder 2 helle Knoten aufblitzen zu sehen, unsicher;

Blaugrün: 1 (oder 2?) H_{β} , zeitweilig doppelt?; ferner

1 zwischen H_{β} und H_{γ} , nahe dem ersten;

Blau: 1 breit (H_{γ});

Violett: 1 breit (H_{δ}).

Neben H_{β} , nach Rot hin, hat das Fadenspektrum anscheinend eine breite Absorptionslücke, desgl. von H_{γ} nach Rot hin. Zwischen H_{β} und dem blaugrünen Knoten, sowie zwischen H_{γ} und H_{δ} , war das kontinuierliche Spektrum zuletzt (z. B. Okt. 11) sehr kräftig. Wenn das Fadenspektrum mit der Zylinderlinse verbreitert wurde, so verschwand in der letzten Zeit das Rot mit dem Emissionsknoten infolge des Purkinje-Phänomens völlig.

W. Voss.