11. *Ueber die Berechnung und Messung kleiner Selbstpotentiale; von Max Wien.*

Für Untersuchungen mit schnell variirenden Strömen, besonders für solche mit Hertz'schen Schwingungen, ist die Bestimmung kleiner Selbstpotentiale von hoher Bedeutung. In der nachstehenden Arbeit sollen die Methoden für Berechnung und Messung kleiner Selbstpotentiale weiter ausgebildet, und eine Reihe von Beispielen dafür durchgeführt werden.

I. Berechnung.

Das Princip des „mittleren geometrischen Abstandes“¹⁾ kann man für Berechnung des Selbstpotentials jedes geraden Leiters mit beliebigem Querschnitt benutzen, indem man sagt: Das Selbstpotential eines geraden, linearen²⁾ Leiters mit beliebigem, überall gleichem Querschnitt ist gleich dem gegenseitigen Inductionscoefficienten zweier gerader, unendlich dünner Leiter, deren Abstand gleich dem mittleren geometrischen Abstand seines Querschnittes von sich selbst ist.

Der gegenseitigen Inductionscoefficient von zwei geraden, parallelen Linien von der Länge L und dem Abstand m ist:

$$M = L \log \frac{\sqrt{L^2 + m^2} + L}{\sqrt{L^2 + m^2} - L} - 2 \sqrt{L^2 + m^2} + 2m.$$

Ist m klein gegen L , so wird:

$$M = 2L \left\{ \log \frac{2L}{m} - 1 \right\} = P.$$

Dies ist also das Selbstpotential eines geraden, linearen Leiters, dessen Querschnitt den mittleren geometrischen Abstand von sich selbst m hat. m ist von Maxwell³⁾ für eine Anzahl von einfachen Fällen berechnet.

1) Maxwell, Electr. and Magn. 2. §§ 691—692.

2) Unter „linear“ ist zu verstehen, dass die Länge des Leiters gross ist gegen die Wurzel aus seinem Querschnitt.

3) Maxwell, l. c.

Ist der Querschnitt eine *Kreisfläche* von dem Radius ϱ , so ist $m = 0,7788 \varrho$, also

$$P = 2 L \left\{ \log \frac{2 L}{\varrho} - 0,75 \right\}.$$

Für eine *Kreislinie* ist $m = \varrho$ und

$$P = 2 L \left\{ \log \frac{2 L}{\varrho} - 1 \right\}.$$

Es sind dies die bekannten Werthe für das Selbstpotential eines geraden Drahtes für langsame Stromänderung und für sehr schnelle Schwingungen, wo die Stromlinien alle an der Oberfläche verlaufen.¹⁾

Für einen *Kreisring* mit dem äusseren Radius ϱ_1 und dem inneren ϱ_2 ist:

$$\log m = \log \varrho_1 - \frac{\varrho_2^4}{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)^2} \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2} + \frac{1}{4} \frac{3 \varrho_2^2 - \varrho_1^2}{\varrho_1^2 - \varrho_2^2},$$

also das Selbstpotential einer *geraden Röhre* mit endlicher Wandstärke:

$$P = 2 L \left\{ \log \frac{2 L}{\varrho_1} + \frac{\varrho_2^4}{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)^2} \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \frac{1}{4} \frac{3 \varrho_2^2 - \varrho_1^2}{\varrho_1^2 - \varrho_2^2} - 1 \right\}.$$

Für einen rechteckigen Querschnitt mit den Leitern a und b ist:

$$\begin{aligned} \log m = \log \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{1}{6} \frac{a^2}{b^2} \log \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{6} \frac{b^2}{a^2} \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}} \\ + \frac{2}{3} \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \frac{2}{3} \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - \frac{25}{12}. \end{aligned}$$

Ist b gross gegen a , so wird merklich:

$$\log m = \log b + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a}{b} - \frac{3}{2}.$$

Also das Selbstpotential eines *geraden Bandes* (Blechstreifens) von der Breite b und der Dicke a

$$P = 2 L \left\{ \log \frac{2 L}{b} - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \right\}.$$

Demnach ist das Selbstpotential eines Bandes sehr wenig von der Dicke abhängig.

Ist der lineare Leiter, dessen Selbstpotential berechnet werden soll, nicht eine einfache gerade Linie, sondern eine *beliebige, ebene, aus geraden Linien zusammengesetzte Figur*, so

1) Poincaré, Electr. und Opt. § 72.

wird sein Selbstpotential wieder in der Weise bestimmt, dass man die gegenseitige Induction zweier gleicher Leiterfiguren in der Entfernung m berechnet. Und zwar berechnet man die gegenseitige Induction jedes Zweiges mit jedem Zweig der congruenten Figur.

Für ein *Rechteck* mit den Seiten a und b folgt in dieser Weise:

$$M = P = 4 \left\{ a \log \frac{2ab}{m(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + b \log \frac{2ab}{m(b + \sqrt{a^2 + b^2})} + 2(\sqrt{a^2 + b^2} - a - b) \right\}.$$

Ist der Querschnitt ein Kreis, so ist für langsame Stromänderung $m = 0,7788 \rho$ zu setzen, für sehr schnelle $m = \rho$. Der Ausdruck ist derselbe, zu dem kürzlich Hr. Mascart¹⁾ auf anderem Wege gelangt ist.

Das Princip des mittleren geometrischen Abstandes ist von Maxwell eigentlich nur für gerade, parallele Leiter aufgestellt. Er selbst hat es jedoch auf weite, kreisförmige Rollen angewandt. Ich will daher im Folgenden das Princip für Berechnung des Selbstpotentials *kreisförmiger* linearer Leiter mit beliebigem Querschnitt benutzen. Wie gross dabei der von der Krümmung des Leiters herrührende Fehler ist, soll weiter unten erörtert werden.

Der gegenseitige Inductionscoefficient zweier gleicher coaxialer Kreise im Abstände m ist²⁾:

$$M = 4 \pi R \left\{ 1 + \frac{3m^2}{16R^2} + \dots \right\} \log \frac{8R}{m} + 4 \pi R \left\{ -2 - \frac{1}{16} \frac{m^2}{R^2} + \dots \right\}.$$

$(m/R)^2$ sei gegen 1 zu vernachlässigen:

$$M = 4 \pi R \left\{ \log \frac{8R}{m} - 2 \right\}.$$

Um hieraus das Selbstpotential eines kreisförmigen Leiters mit beliebigem Querschnitt zu erhalten, ist wieder für m der mittlere geometrische Abstand des betreffenden Querschnittes von sich selbst einzusetzen.

1) Mascart, Compt. rend. 118. p. 227. 1894.

2) Maxwell, l. c. 1. § 705.

Für eine Kreisfläche ist $m = 0,7788 \rho$, also ist das Selbstpotential eines Kreisringes mit kreisförmigem Querschnitt¹⁾:

$$P = 4 \pi R \left\{ \log \frac{8R}{\rho} - 1,75 \right\} = 4 \pi R \left\{ \log \frac{R}{\rho} + 0,333 \right\}.$$

Für eine Kreislinie ist $m = \rho$; also

$$P = 4 \pi R \left\{ \log \frac{8R}{\rho} - 2 \right\}.$$

Dies würde das Selbstpotential einer unendlich dünnen, kreisförmigen Röhre sein, und gleichzeitig das eines kreisförmigen Volldrahtes für Hertz'sche Schwingungen.

Für eine Linie von der Länge b ist $m = 0,2231 \cdot b$

$$P = 4 \pi R \left\{ \log \frac{R}{b} + 1,583 \right\}.$$

Es ist dies das Selbstpotential einer sehr dünnen Röhre von der Länge b , die $\perp$ zur Axe von Kreisströmen durchflossen ist, oder das einer sehr dünnen runden Scheibe, deren innerer Radius $R - (b/2)$, deren äusserer $R + (b/2)$ beträgt.

Für eine Ellipse²⁾ ist

$$m = \frac{a+b}{2} \cdot 0,7788.$$

Demnach ist das Selbstpotential eines Kreisringes mit elliptischem Querschnitt

$$P = 4 \pi R \left\{ \log \frac{16R}{a+b} - 1,75 \right\} = 4 \pi R \left\{ \log \frac{R}{\frac{a+b}{2}} + 0,333 \right\}.$$

Bei mässiger Excentricität (e) ist das Selbstpotential eines Ringes mit elliptischem Querschnitt ausserordentlich wenig verschieden von dem eines Ringes, dessen Querschnitt ein Kreis von gleichem Flächeninhalt ist. Denn es ist dann

$$\frac{a+b}{2} = \rho \left(1 + \frac{1}{32} e^4 \dots \right)$$

$$4 \pi R \left\{ \log \frac{R}{\frac{a+b}{2}} + 0,333 \right\} = 4 \pi R \left\{ \log \frac{R}{\rho} + 0,332 - \frac{1}{32} e^4 \dots \right\}.$$

Kleinere Deformationen und Abweichungen des Querschnittes

1) H. F. Weber (Berl. Ber. p. 511. 1886) gibt denselben Ausdruck ohne Angabe der Ableitung.

2) J. J. Thomson in einem Briefe an Rayleigh (Phil. Mag. 23. p. 384. 1886.

von der Kreisform dürften daher ohne merklichen Einfluss auf das Selbstpotential sein.

Das Maxwell'sche Princip gilt, wie gesagt, streng nur für gerade Leiter. Die Anwendung auf Kreise bedingt Fehler in den Ausdrücken für das Selbstpotential, die um so kleiner sind, je kleiner m/R ist. Um einen Anhalt dafür zu erhalten, wie gross diese Fehler sind, soll das Selbstpotential eines Ringes mit kreisförmigem Querschnitt streng berechnet und das Resultat mit dem Ausdruck verglichen werden, der sich mittels des Principes des mittleren geometrischen Abstandes ergibt.¹⁾

Denkt man sich den Ring in lauter Elementarringe zerlegt, so erhält man das Selbstpotential des ganzen Ringes, indem man die gegenseitige Induction jedes dieser Elementarringe mit jedem anderen summirt, d. h. über den ganzen Querschnitt des Ringes zweimal integrirt.

Es sei ϱ_1 der Abstand irgend eines Elementarringes von der Mittellinie (vgl. Fig. 1), φ_1 der Winkel, den ϱ_1 mit der Ringebene macht. ϱ_2 und φ_2 die entsprechenden Grössen für einen anderen Elementarring, M_{12} ihr gegenseitiger Inductionscoefficient, R der Radius der Mittellinie. Ist die Stromintensität im ganzen

Fig. 1.

Ring = 1, so ist die Intensität in den Elementarringen, wenn die Intensität über den ganzen Querschnitt gleichmässig vertheilt ist, gleich ihrem Querschnitt, also

$$= \frac{\varrho_1 d\varphi_1 d\varphi_1}{\varrho^2 \pi}, \text{ resp. } \frac{\varrho_2 d\varphi_2 d\varphi_2}{\varrho^2 \pi}.$$

1) Hr. Blathy (Electrician 24. p. 630. 1890) gibt für das Selbstpotential eines Ringes die Formel;

$$P = 4\pi R \left\{ 0,579 + \log \frac{R}{\varrho} - \frac{2\varrho}{R} - \frac{\varrho^2}{24R^2} \dots \right\}.$$

Hr. Minchin (Phil. Mag. (5) 37. p. 300. 1894):

$$P = 4\pi R \left\{ \left(1 + \frac{\varrho}{2R} - \frac{\varrho^2}{32R^2} \dots \right) \log \frac{8R}{\varrho} - 2 - \frac{5}{8} \frac{\varrho}{R} - \frac{19}{64} \frac{\varrho^2}{R^2} \dots \right\}.$$

Die Formeln stimmen nicht untereinander überein und auch nicht mit den nachstehenden Versuchen (p. 942), Eine Neuberechnung ist somit nothwendig.

Dann ist nach Obigem das Selbstpotential des Ringes:

$$P = \frac{1}{\pi^2 \varrho^4} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{\varrho} \varrho_1 d\varrho_2 \int_0^{\varrho} \varrho_2 d\varrho_2 \cdot M_{12}.$$

Für den gegenseitigen Inductionscoefficienten von zwei coaxialen Kreisströmen gibt Maxwell¹⁾ einen Ausdruck, der denselben mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen gestattet:

$$M_{12} = 4\pi a \left\{ 1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2 + 3y^2}{16a^2} \mp \dots \right\} \log \frac{8a}{r} \\ + 4\pi a \left\{ -2 - \frac{x}{2a} + \frac{3x^2 - y^2}{16a^2} \mp \dots \right\}.$$

Hierin sind a und $a+x$ die Radien der beiden Kreise und y der Abstand ihrer Mittelpunkte.

In unserem Falle ist (vgl. Fig. 1):

$$y = \varrho_1 \sin \varphi_1 - \varrho_2 \sin \varphi_2, \quad a = R + \varrho_1 \cos \varphi_1, \\ x = \varrho_2 \cos \varphi_2 - \varrho_1 \cos \varphi_1, \quad r^2 = x^2 + y^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1 \varrho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Dies in die Maxwell'sche Formel eingesetzt gibt:

$$M_{12} = 4\pi (R + \varrho_1 \cos \varphi_1) \left\{ 1 + \frac{\varrho_2 \cos \varphi_2 - \varrho_1 \cos \varphi_1}{2(R + \varrho_1 \cos \varphi_1)} \right. \\ + \frac{(\varrho_2 \cos \varphi_2 - \varrho_1 \cos \varphi_1)^2 + 3(\varrho_1 \sin \varphi_1 - \varrho_2 \sin \varphi_2)^2}{16(R + \varrho_1 \cos \varphi_1)^2} \mp \dots \left. \right\} \log \frac{8(R + \varrho_1 \cos \varphi_1)}{r} \\ + 4\pi (R + \varrho_1 \cos \varphi_1) \left\{ -2 - \frac{\varrho_2 \cos \varphi_2 - \varrho_1 \cos \varphi_1}{2(R + \varrho_1 \cos \varphi_1)} \right. \\ + \frac{3(\varrho_2 \cos \varphi_2 - \varrho_1 \cos \varphi_1)^2 - (\varrho_1 \sin \varphi_1 - \varrho_2 \sin \varphi_2)^2}{16(R + \varrho_1 \cos \varphi_1)^2} \mp \dots \left. \right\}.$$

$4\pi R$ wird herausgezogen und der Ausdruck nach Potenzen von ϱ/R entwickelt; gleichzeitig wird:

$$\log \left(\frac{8R + \varrho_1 \cos \varphi_1}{r} \right) = \log \frac{8R}{r} + \frac{\varrho_1 \cos \varphi_1}{R} - \frac{\varrho_1^2 \cos^2 \varphi_1}{2R^2} + \frac{\varrho_1^3 \cos^3 \varphi_1}{3R^3} \dots$$

gesetzt, was, da ϱ_1 kleiner als R , gestattet ist.

1) Maxwell, l. c. § 705.

$$\begin{aligned}
M_{12} = & 4\pi R \left\{ 1 + \frac{\varrho_1 \cos \varphi_1 + \varrho_2 \cos \varphi_2}{2R} + \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + 2\varrho_1^2 \sin^2 \varphi_1 + 2\varrho_2^2 \sin^2 \varphi_2}{16R^2} \right. \\
& - \frac{2\varrho_1 \varrho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 4\varrho_1 \varrho_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{16R^2} \mp \dots \left. \right\} \log \frac{8R}{r} \\
& + 4\pi R \left\{ -2 - \frac{\varrho_1 \cos \varphi_1 + \varrho_2 \cos \varphi_2}{2R} \right. \\
& + \frac{3(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) - 4(\varrho_1^2 \sin^2 \varphi_1 + \varrho_2^2 \sin^2 \varphi_2) + 2\varrho_1 \varrho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{16R^2} \mp \dots \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist für M_{12} in unser Integral

$$P = \frac{1}{\varrho^4 \pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{\varrho} \varrho_1 d\varrho_1 \int_0^{\varrho} \varrho_2 d\varrho_2 M_{12}$$

einsetzen.

Setzen wir

$$\log \frac{8R}{r} = \log 8R - \log r,$$

so ist derjenige Theil des Integrals, welcher $\log r$ nicht enthält, ohne weiteres auszuwerthen und gibt:

$$(A) \quad 4\pi R \log 8R \left\{ 1 + \frac{\varrho^2}{8R^2} + \dots \right\} + 4\pi R \left\{ -2 + \frac{\varrho^2}{16R^2} \mp \dots \right\}.$$

Es bleibt also noch die Integration von:

$$- \frac{4R\pi}{\varrho^4 \pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{\varrho} \varrho_2 d\varrho_1 \int_0^{\varrho} d\varrho_2 \varrho_2 \log r \left\{ 1 + \frac{\varrho_1 \cos \varphi_1 + \varrho_2 \cos \varphi_2}{2} \pm \dots \right\}.$$

Hierfür erhalten wir unter Berücksichtigung davon, dass

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + p^2 - 2p \cos x) dx = 0$$

für $p \leq 1$:

$$(B) \quad -4R\pi \left\{ \log \varrho - \frac{1}{4} + \frac{\varrho^2}{8R^2} \log \varrho + \frac{\varrho^2}{R^2} 0,0707 \dots \right\}.$$

Demnach ergibt sich als Selbstpotential eines Ringes mit kreisförmigem Querschnitt bis auf Glieder von höherer als zweiter Ordnung:

$$P = (A) + (B) = 4R\pi \left[\left\{ 1 + \frac{\varrho^2}{8R^2} \dots \right\} \log \frac{8R}{\varrho} - 1,75 - 0,0083 \frac{\varrho^2}{R^2} \right].$$

Die mit Hülfe des Maxwell'schen Princip's berechnete Formel lautet mit den quadratischen Gliedern:

$$P = 4 R \pi \left[\left\{ 1 + \frac{3 m^2}{16 R^2} \right\} \log \frac{8 R}{m} - 2 - \frac{m^2}{16 R^2} \right].$$

Für $m = 0,7788 \varrho$

$$P = 4 R \pi \left[\left\{ 1 + \frac{0,91}{8} \frac{\varrho^2}{R^2} \right\} \log \frac{8 R}{\varrho} - 1,75 - 0,0095 \frac{\varrho^2}{R^2} \right].$$

Die Differenz zwischen den beiden Formeln ist sehr gering: für $(\varrho/R) = \frac{1}{4}$ noch nicht 1 pro Mille. Demnach ist die Anwendung des Maxwell'schen Princip's in allen praktischen Fällen auch zur Berechnung des Selbstpotentials von Kreisen gestattet, und darf wohl auf alle linearen Leiter mit mässiger Krümmung ausgedehnt werden.

Es ist bei allen Berechnungen vorausgesetzt, dass die Stromdichte über den ganzen Querschnitt gleichmässig vertheilt sei. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall¹⁾, vor allem auch nicht, wenn der Strom in dem Leiter durch Induction entsteht. Um zu sehen, wie gross der Einfluss der ungleichmässigen Vertheilung des Stromes ist, soll als Beispiel das Selbstpotential eines Ringes mit kreisförmigem Querschnitt für einen Strom, der durch ein *homogenes magnetisches Feld* in dem Ringe erzeugt ist, berechnet werden.

Die Stromintensität in dem ganzen Ringe sei = 1. Die electromotorische Kraft für den Elementarring ϱ_1 (vgl. p. 932) ist für ein homogenes Feld

$$= \frac{(R + \varrho_1 \cos \varphi_1)^2}{R^2},$$

der Widerstand

$$= \frac{(R + \varrho_1 \cos \varphi_1)}{R} \cdot \frac{\varrho^2 \pi}{\varrho_1 d \varrho_1 d \varphi_1},$$

also die Intensität

$$= \frac{\varrho_1 d \varrho_1 d \varphi_1 (R + \varrho_1 \cos \varphi_1)}{R \cdot \varrho^2 \pi}.$$

1) Von der ungleichen Stromdichte, welche bei schnellen Schwingungen dadurch hervorgerufen wird, dass durch die Selbstinduction die Stromlinien nach aussen gedrängt werden, ist hier abgesehen, also langsame Stromänderung vorausgesetzt.

Dadurch wird das Selbstpotential des ganzen Ringes:

$$P = \frac{1}{\pi^2} q^4 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^c \varrho_1 d\varrho_1 \int_0^c \varrho_2 d\varrho_2 \frac{(R + \varrho_1 \cos \varphi_1)(R + \varrho_2 \cos \varphi_2)}{R^2} \cdot M_{12}.$$

Die Integration ist ganz analog der vorigen auszuführen und ergibt:

$$P = 4 R \pi \left[\left\{ 1 + \frac{3}{8} \frac{q^2}{R^2} \right\} \log \frac{8 R}{q} - 1,75 - 0,092 \frac{q^2}{R^2} \right].$$

Die Differenz betrifft auch nur die quadratischen Glieder, sie ist also für dünnere Leiter nicht merklich. Bei grösserem q/R und genaueren Untersuchungen ist jedoch der Einfluss des Feldes eventuell zu berücksichtigen.

Nach dem vorstehenden lässt sich das Selbstpotential für lineare nicht magnetische Leiter, welche einen Kreis oder eine geradlinige Figur bilden, mit Hülfe des Principes des mittleren geometrischen Abstandes mit genügender Genauigkeit berechnen. In den meisten anderen Fällen besonders auch, wenn die Figuren nicht in einer Ebene liegen oder die Leiter aus ferromagnetischen Metallen bestehen, ist eine Berechnung nicht möglich, und wir sind auf die Messung angewiesen.

II. Messung.

Im Folgenden soll eine Anzahl kleinerer Selbstpotentiale gemessen werden. Zum Theil beziehen sich diese Messungen auf einfache Figuren, deren Selbstpotential sich mit Hülfe der der oben abgeleiteten Formeln berechnen lässt. Die Differenzen zwischen Theorie und Versuch rühren davon her, dass die Bedingungen der Rechnung bei dem Versuch nicht vollständig eingehalten wurden, und zeigen, ob solche Abweichungen von der Theorie vernachlässigt werden dürfen oder nicht. Die Methode, nach der die Messungen ausgeführt wurden, ist dieselbe, welche Hr. Prerauer¹⁾ vor kurzem beschrieben und zur Bestimmung des Selbstpotentials gerader, runder Drähte benutzt hat. Sie beruht kurz darauf, das in der Wheatstone'schen Brücke das zu messenden Selbstpotential mit dem etwa 10—100 mal grösseren, bekannten Selbstpotential von kleinen

1) O. Prerauer, Inaug.-Dissert. Leipzig 1894; Wied. Ann. **53**. p. 772. 1894.

Rollen verglichen wurde. Als Stromquelle diente ein Inductorium, dessen primäre Leitung durch eine Saite 256 mal in der Secunde geschlossen und unterbrochen wurde, als Messinstrument das optische Telephon. In Bezug auf alle Einzelheiten muss ich auf die genannte Arbeit verweisen.

Bei geraden Leitern war die Anordnung der Brücke genau die von Hrn. Prerauer angewandte. Bei Leitern, die eine geschlossene Figur bilden (Rechteck, Kreis) lag die Sache insofern günstiger, als alle vier Eckpunkte der Brückencombination ($A B C D$ Fig. 2) dicht zusammengelegt werden konnten (Fig. 3). Infolgedessen war es möglich, die Zweige 2, 3, 4

Fig. 2.

Fig. 3.

der Brücke, die Stromzuführung und die Ableitung zum optischen Telephon bifilar zu führen, also alle Brückenzweige mit Ausnahme des Zweiges 1, in welchem sich ausschliesslich der Leiter, deren Selbstpotential gemessen werden sollte, befand. Die Hauptfehlerquelle¹⁾ bei der Messung kleiner Selbstpotentiale, die gegenseitige Induction der verschiedenen Brückenzweige fiel somit fort. Dagegen lag darin ein Uebelstand, dass die Figuren, welche eigentlich ganz geschlossen sein sollten, an einer Stelle offen waren (z. B. in Fig. 3 der Kreis zwischen A und C); ich komme hierauf noch zurück.

Jede Messung geschah in der Weise, dass das gesuchte Selbstpotential mit zwei verschiedenen Rollen verglichen und das Mittel aus den beiden hierbei erhaltenen Werthen ge-

1) Vgl. O. Prerauer, l. c. p. 782.

nommen wurde. Der Fehler des Resultates konnte nur unter besonders ungünstigen Verhältnissen 1 Proc. erreichen.¹⁾

1. Röhren. Formel:

$$P = 2 L \left\{ \log \frac{2 L}{\varrho_1} + \frac{\varrho_2^4}{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)^2} \ln \frac{\varrho_1}{\varrho_2} - \frac{1}{4} \frac{3 \varrho_2^2 - \varrho_1^2}{\varrho_1^2 - \varrho_2^2} - 1 \right\}.$$

Zu den Versuchen wurden Messingröhren von verschiedenen Durchmessern und Wandstärken benutzt. Die Länge betrug, wie bei den geraden Drähten, 50 cm. In der folgenden Tabelle bedeutet ϱ_1 den äusseren Radius der Röhre, ϱ_2 den inneren, P_1 das gemessene Selbstpotential, P_2 das berechnete.

ϱ_1	ϱ_2	P_1	P_2
3,5 mm	1,5 mm	481,4 cm	483,5 cm
5,5 „	4,5 „	426,2 „	427,1 „
10,0 „	9,5 „	361,7 „	362,9 „

Die Werthe können nur zwischen dem für Volldrähte

$$2 L \left(\log \frac{2 L}{\varrho_1} - 0,75 \right)$$

und dem für unendlich dünne Röhren

$$2 L \left(\log \frac{2 L}{\varrho_1} - 1 \right)$$

liegen. Die erste Röhre verhält sich noch ungefähr wie ein Volldraht (490,5 cm), während das Selbstpotential der letzteren sich schon dem einer unendlich dünnen Röhre nähert (360,5 cm).

2. Bänder. Formel:

$$P = 2 L \left\{ \log \frac{2 L}{b} - \frac{\pi a}{3 b} + \frac{1}{2} \right\}.$$

Die Versuche wurden mit Zinkblechstreifen von 0,7 mm Dicke (a) gemacht und ergaben:

Breite (b)	Messung	Berechnung	Runder Draht
11,5 mm	483,8 cm	488,9 cm	568,9 cm
21,5	428,5	430,2	535,5

Die letzte Spalte enthält das berechnete Selbstpotential eines runden Drahtes von gleichem Querschnitt. Das des Blechstreifens ist an und für sich erheblich kleiner und sinkt auch schneller mit zunehmendem Querschnitt, wie das des runden Drahtes.

1) Vgl. O. Prerauer l. c. p. 778.

8. *Rechtecke.* Das Selbstpotential von Rechtecken aus Draht mit kreisförmigem Querschnitt ist von Interesse, weil die Resonatoren für Hertz'sche Schwingungen meist in dieser Form angewandt wurden.

Bei der Berechnung kann man entweder in der Weise verfahren, dass man, wie Hr. Blondlot¹⁾ jede Seite für sich berechnet und die gegenseitige Induction der gegenüberliegenden Seite abzieht, oder man kann direct die Formel:

$$P = 4 \left\{ a \log \frac{2ab}{m(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + b \log \frac{2ab}{m(b + \sqrt{a^2 + b^2})} + 2(\sqrt{a^2 + b^2} - a - b) \right\}$$

benutzen. m ist für langsame Schwingungen $= 0,7788 \rho$. Die Messungen sind, wie oben erwähnt, für geschlossene Figuren sehr sicher und die Fehler dürfen nicht mehr als $\frac{1}{2}$ Proc. betragen. Hingegen ist es nicht möglich, genau den Annahmen der Theorie Folge zu leisten; erstens muss ein Theil des Rechtecks offen bleiben und ferner sind die Ecken des Rechtecks, wenn man es, wie ich, durch Biegen herstellt, abgerundet. Beides muss das Resultat verkleinern. Die Oeffnung war 2 bis 3 mm weit, betrug also nur wenige Promille der ganzen Länge des Drahtes, demnach konnte ihr Einfluss auch nur wenige Promille betragen. Schlimmer ist die Abrundung der Ecken; wie gross der dadurch bedingte Fehler ist, kann nur aus dem Vergleich von Rechnung und Messung hervorgehen.

In der folgenden Tabelle bedeuten a und b die Seitenlängen des Rechteckes, ρ den Radius des Drahtes, I und II die Messungsergebnisse mit zwei verschiedenen Vergleichsrollen, M das Mittel aus beiden, B den berechneten Werth und A die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung in Procenten.

a cm	b cm	ρ mm	I cm	II cm	M cm	B cm	A
25	25	1,215	947,1	948,9	948,0	960,3	$-1,3\%$
35	15	1,215	920,6	916,1	918,4	928,0	$-1,1\%$
48	2	1,35	567,8	564,6	566,2	579,1	$-2,1\%$

Die Differenzen gehen über die Fehlergrenzen der Beobachtung hinaus und beruhen, wie gesagt, vor allem auf der

1) Blondlot, Journ. de Phys. 10. p. 522. 1891.

Krümmung der Ecken, die nicht bei der Berechnung berücksichtigt ist. Wegen dieser Fehlerquelle dürfte es im allgemeinen anzurathen sein, *Drahtkreise* als Resonatoren für Hertz'sche Schwingungen anzuwenden.

Wie aus obigen Zahlen ersichtlich, nimmt das Selbstpotential für dieselbe Drahtlänge erheblich mit der Fläche des Rechteckes ab. Macht man dieselbe so klein wie möglich, so muss man zwei gegenüberliegende Seiten des Rechtecks zur Berührung bringen, d. h. man erhält einen *bifilaren Draht*. Für einen solchen ist $P = L \cdot 1,886^1$), worin L die Länge des ganzen Drahtes ist. Für einen 100 cm langen Draht von dem Radius 1,215 mm, dessen Hälften durch ca. 0,07 mm dickes Papier getrennt waren, erhielt ich $P = 193,25$, bei unmittelbares Berührung hätte $P = 188,6$ sein müssen. Die Differenz entspricht einem mittleren Abstand von 0,1 mm.

Bifilares Band. Durch Anwendung breiter, flacher, bifilar gelegter Metallstreifen kann die Selbstinduction auf jede beliebig kleine Grösse reducirt werden. Die Messungen wurden mit 2 cm breitem Zinkblech ausgeführt, das in verschiedenem Abstand bifilar gelegt wurde. Die ganze Länge betrug wieder 100 cm. Ich erhielt bei 0,5 cm Abstand $P = 97,2$ cm, bei 0,25 cm Abstand P zwischen 30 und 40 cm; als nur Papier zwischen die Blechstreifen gelegt wurde, war eine merkliche Selbstinduction überhaupt nicht mehr nachweisbar.

4. *Kreise.* Es wurden kreisförmige Ringe aus Kupferdraht mit kreisförmigem Querschnitt in der Weise hergestellt, dass mit dem Zirkel auf einem Brett der Kreis vorgezeichnet und der Draht, der Zeichnung möglichst angepasst, auf dem Brett befestigt wurde. Der Radius des Ringes wurde bestimmt, indem an verschiedenen Stellen der Durchmesser mit dem Comparator gemessen wurde.

Die Messung des Selbstpotentials geschah wie bei den Rechtecken. Auch hier bestand der Vortheil, dass die gegenseitige Induction durch bifilare Führung sämmtlicher anderer Brückenzeige vermieden werden konnte. Die Krümmung der Ecken, welche bei den Rechtecken Fehler verursacht hatte, fiel hier naturgemäss fort, und es blieb als Fehlerquelle nur

1) Maxwell, l. c. II. § 686.

der Umstand übrig, dass der Kreis nicht vollständig geschlossen werden konnte. Dadurch, dass die Oeffnung möglichst klein gemacht wurde, erreichte der Einfluss hiervon auch bei dem kleineren der gemessenen Ringe höchstens 3—4 pro Mille.

Ich erhielt bei je 2 Messungen für 2 verschiedene Ringe:

R cm	ϱ mm	I	II	Mittel
25,01	1,35	1752,3	1744,0	1748,2 cm
12,43	1,35	749,1	753,8	751,5

Die Resultate zeigten grosse Differenzen mit den Formeln, welche von Blathy und von Minchin für das Selbstpotential eines Ringes aufgestellt sind.¹⁾

Deshalb und um gleichzeitig den Einfluss der Oeffnung experimentell festzustellen, wurde das Selbstpotential eines *geschlossenen Ringes* mittelst einer durchaus anderen Methode, nämlich mit Hülfe der Inductionswaage bestimmt. In einer früheren Arbeit²⁾ habe ich gezeigt, wie mittelst der Inductionswaage die Zeitconstante von Rollen, Ringen und beliebig geformten Metallstücken gemessen werden kann. Um aus der Zeitconstante $\tau = (P/W)$ das Selbstpotential P zu erhalten, muss noch der Widerstand W bestimmt werden.

Der zu untersuchende geschlossene Ring wurde aus Ring II hergestellt, indem die Enden schräg abgesägt und zusammengeköthet wurden. Dadurch wurde der Ring etwas kleiner ($R = 12,12$ cm).

Die Zeitconstante wurde zu $3,135 \cdot 10^{-4}$ sec gefunden. W wurde in der Weise bestimmt, dass der Ring auseinander gesägt und nun der Widerstand nach der Hopkin'schen Methode und mit dem Differentialgalvanometer gemessen wurde. Zu diesem Zwecke wurden die Ableitungen zum Galvanometer je 1 cm von den Enden des Ringes punktförmig angebracht und zum Resultat der Messung der Widerstand der 2 cm als

$$\frac{2}{\pi \cdot 2 \cdot 12,12 - 2}$$

des ganzen hinzuaddirt.

1) Vgl. p. 932, nach den Formeln ergibt sich für Ring I $P = 1820$ cm bez. 1671 cm, für Ring II $P = 793,6$ bez. 723,2 cm.

2) M. Wien, Wied. Ann. **49**. p. 806. 1893.

W ergab sich nach der Hopkin'schen Methode 0,002362 mit dem Differentialgalvanometer zu 0,002360, also im Mittel 0,002361 . cm sec⁻¹ bei 17° C.

Hieraus

$$P = W \cdot \tau = 737,2 \text{ cm.}$$

Die Resultate sind, wie schon oben erwähnt, in guter Uebereinstimmung mit der Formel:

$$P = 4 \pi R \left\{ \log \frac{R}{\varrho} + 0,333 \right\},$$

wie aus folgender Tabelle hervorgeht:

	Messung	Berechnung	Δ
Ring I	1748,2	1746,1	+ 0,12%
„ II	751,5	757,8	- 0,8 %
„ III	737,2	735,0	+ 0,28%

Die Differenz bei II, welche etwas grösser ist, als die Beobachtungsfehler sie erklären würden, stammt zum Theil aus dem Einfluss der Oeffnung, der bei dem kleineren Ring verhältnissmässig gross ist.

Ellipse. Der Ring II wurde zu einer Ellipse gebogen, deren Axen sich wie 2:3 verhielten. Die Messung ergab für das Selbstpotential 730,4 cm also einen um noch nicht 3 Proc. kleineren Werth. Kleinere Abweichungen von der Kreisform dürften demnach keinen merklichen Einfluss auf das Selbstpotential haben.

5. *Spirale.* Bei irgend complicirteren Leiterformen ist eine Berechnung des Selbstpotentials nicht möglich, dasselbe kann also nur durch Messung gefunden werden. Als Beispiel sei hier die Bestimmung der Inductionscoefficienten eines Teslatransformators durchgeführt, und zwar soll das Selbstpotential der primären Spule (p), das der secundären (P) und ihr gegenseitiger Inductionscoefficient (M) gleichzeitig gemessen werden.

Nach Maxwell¹⁾ ist, wenn der secundäre Kreis mit dem Widerstand W geschlossen ist, das wirksame Selbstpotential des primären:

$$p' = p - \frac{n^2 M^2}{W^2 + n^2 P^2} P,$$

1) Maxwell, Phil. Tr 155. p. 474. 1865.

worin n die Schwingungszahl des Wechselstroms in 2π Sekunden ist. Misst man p' für $W = \infty$ und zwei bekannte W , so erhält man drei Gleichungen für die drei Unbekannten p , P und M .

Die primäre Spirale bestand aus 3,3 cm dickem Kupferdraht, war 11 cm lang und hatte 20 Windungen von 3 cm mittlerem Durchmesser. Die secundäre Spirale bestand aus 0,5 mm dickem Kupferdraht, war 12 cm lang und hatte 230 Windungen von 4,8 cm mittlerem Durchmesser.

Ich erhielt für

$$W = \infty \quad p' = p = 2956,7 \text{ cm}$$

$$W = 9,70 \text{ S. E.} \quad p' = 2935,6 \text{ ,,}$$

$$W = 6,10 \text{ S. E.} \quad p' = 2906,9 \text{ ,,}$$

Hieraus $p = 2956,7$, $P = 1,250,10^6$, $M = 2,38 \cdot 10^4$ cm. Für $W = 4,76$ S. E. erhielt ich $p' = 2877,8$ cm, während sich durch Rechnung aus den Werthen für p , P und M , $p' = 2878,5$ cm ergibt. Die geringe Differenz ist ein Beweis für Sicherheit der Messungen.

Aus diesen Werthen erhält man die für sehr schnelle Schwingungen, indem man von p und P die halbe Länge des ganzen Drahtes abzieht, während M ungeändert bleibt, also in unserem Falle:

$$p_{\infty} = p - 120 \text{ cm} = 2836,7 \text{ cm}^1)$$

$$P_{\infty} = P - 1670 \text{ cm} = 1,248 \cdot 10^6 \text{ cm.}$$

Ferromagnetische Drähte.

Für das Selbstpotential und den Widerstand ferromagnetischer gerader Drähte mit kreisförmigen Querschnitt, die von einem Sinusstrom durchflossen werden, gibt Rayleigh²⁾ folgende Formeln:

$$P' = 2L \left\{ \log \frac{2L}{\rho} - 1 \right\} + L\mu \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \frac{n^2 L^2 \mu^2}{W} + \dots \right\}$$

$$W' = W \left\{ 1 + \frac{1}{12} \frac{n^2 L^2 \mu^2}{W^2} - \frac{1}{180} \frac{n^4 L^4 \mu^4}{W^4} + \dots \right\}.$$

1) Die Capacität der mit der primären Spirale verbundenen Leydener Flasche war $= 1,3 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^2$, sodass sich die Schwingungszahl des Systems 2,6 Millionen in der Secunde ergibt.

2) Rayleigh, Phil. Mag. p. 387. Mai 1886.

Hierin ist L die Länge und ρ der Radius des Drahtes, μ die Permeabilität, W der Widerstand für constanten Strom, n die Schwingungszahl des Wechselstromes in 2π Secunden.

Wegen der hohen Permeabilität ist bei ferromagnetischen Drähten das Selbstpotential an und für sich grösser und daher leichter zu messen. Schwierigkeiten bereiten jedoch erstens die starke Abhängigkeit des Widerstandes und des Selbstpotentials von der Frequenz des Wechselstromes, zweitens die Aenderung der Permeabilität¹⁾ mit der Stromstärke, drittens der Einfluss der Hysterese.

Für sehr schwache Ströme (z. B. für Telephonströme) ist die Permeabilität merklich constant und die Hysterese verschwindend. Kennt man den Widerstand des Drahtes für constanten Strom, so kann man aus einer Messung für eine bestimmte Schwingungszahl mit Hilfe der Rayleigh'schen Formeln Widerstand und Selbstpotential für jede andere Schwingungszahl berechnen.

Bei starkem Strom nimmt jedoch die Permeabilität schnell zu.²⁾ Ein Schluss aus einer Messung auf das Selbstpotential und den Widerstand des Drahtes für irgend eine andere Schwingungszahl oder Stromstärke ist nicht mehr möglich, da die Abhängigkeit der Magnetisirung von der magnetisirenden Kraft bei Wechselstrom nicht bekannt ist. Eine Untersuchung hierüber durch Messung des Selbstpotentials von Drähten bei verschiedenen Stromstärken erscheint nicht zweckmässig, weil die magnetisirende Kraft innerhalb des Drahtes nicht gleichförmig vertheilt, sondern dem Abstand von der Axe des Drahtes proportional ist. Man erhält deshalb immer nur Mittelwerthe für die Permeabilität.

Ich hoffe jedoch in nächster Zeit in etwas anderer Weise dem Gegenstand näher treten zu können.

Die nachstehenden Zahlen sollen somit nur dazu dienen,

1) Es ist hier immer unter Permeabilität der Differentialwerth erster Art von $\mu = d B / d H$ verstanden. Vgl. Drude, Physik des Aethers. p. 143.

2) I. Klemenčič (Wien. Ber. 1. März 1894) hat gefunden, dass für sehr schnelle Schwingungen die Permeabilität auch bei hoher Intensität auf ihrem niedrigen Anfangswerth bleibt. Bei langsamerem Wechselstrom nimmt sie zu, also muss μ auch eine Function der Schwingungszahl sein.

ein ungefähres Bild von der Grösse der Selbstinduction ferromagnetischer Drähte und ihrer Aenderung mit der Stromstärke zu geben.

Die Stromstärke wurde dadurch verändert, dass in dem primären Kreis der Stromzuführung ein Rheostat eingeschaltet war und verschiedene Widerstände gezogen wurden. Die Stromstärken in dem Brückensysteme, welche diesen verschiedenen Widerständen entsprechen, wurden durch die Ausschläge des optischen Telephons miteinander verglichen. Die Zahlen unter J (0—100) im Folgenden geben demnach nur die relativen Stromstärken an. Um einen Anhalt für die absolute Stromstärke zu erhalten, wurde die grösste angewandte Stromstärke ($J = 100$) mit Hilfe eines selbstgefertigten Cardew'schen Strommessers bestimmt, der vorher mittelst constanten Stromes geeicht war. Es fand sich die Stromamplitude für $J = 100$ zu 2,3 Ampère. Diese Zahl kann jedoch nur die Grössenordnung angeben; sie ist zu gross, da sie aus der Erwärmung durch den genannten Wechselstrom gewonnen ist, während es hier nur auf die Stärke des Sinusstromes der Grundperiode ankommt.¹⁾ Wegen der geringen Sicherheit ihrer Messung ist die Stromstärke (J) im Folgenden nur in runden Zahlen angegeben; um den Verlauf der Erscheinung zu charakterisiren, genügen sie jedoch völlig.

Die Messungen beziehen sich sämmtlich, falls keine anderen Angaben gemacht sind, auf eine Schwingungszahl von 256 in der Secunde und auf eine Drahtlänge von 50 cm.

3 mm dicker Draht aus hartem Eisen.

J	P	J	P
100	3590 cm	12	2580 cm
60	3195 „	7	2495 „
25	2850 „	3	2452 „

Dem niedrigsten Werth 2452 entspricht, mit Hilfe der Rayleigh'schen Formel berechnet, $\mu = 78,5$ dem grössten Werth 3590 cm $\mu = 129,2$. Die Zunahme ist annähernd linear.

1) Die Ströme höherer Perioden waren in dem verwandten Wechselstrom verhältnissmässig schwach, weil stets mit einem Nebenschluss (zur Unterbrechungsstelle des primären Stromes) von geringem Widerstand gearbeitet wurde. Da bei Strommessung durch Erwärmung das Quadrat der Intensität in Betracht kommt, so war der Einfluss dieser schwachen Ströme höherer Periode sehr gering.

Für grössere Stromstärken dürfte P noch erheblich weiter steigen. Hingegen strebt P mit abnehmender Stromstärke einem constanten Werth zu, der etwa bei 2400 cm ($\mu = 76,5$) liegt. Es entspricht dies dem Verhalten des Eisens gegen constante magnetisirende Kräfte, wobei μ , wie Baur¹⁾ und Rayleigh²⁾ nachgewiesen haben, mit abnehmender magnetisirender Kraft sich einem constanten Werth nähert, den es bis zu den schwächsten magnetisirenden Kräften beibehält.

Um dies Verhalten auch für Wechselstrom mit Sicherheit zu beweisen, wurden die Versuche mit einem bedeutend längeren Stück (ca. 10 m) desselben Drahtes wiederholt. Der Draht besass jetzt etwa dasselbe Selbstpotential, wie die Vergleichsrolle, sodass in allen vier Zweigen der Brücke sich annähernd gleiche (scheinbare) Widerstände befanden. Dadurch wurde die Brückeneinstellung bedeutend empfindlicher, sodass noch bei viel schwächeren Strömen Messungen gemacht werden konnten. Der Eisendraht war zickzackförmig ausgespannt; ich gebe nur die Einstellungen (B. E.) auf dem Messdraht der Wheatstone'schen Brücke, da wegen der complicirten Form des Drahtes die absoluten Werte des Selbstpotentials ohne Interesse sind:

J	30	15	10	4	1,5	1,0	0,7
BE	47,9	46,6	45,3	44,85	44,65	44,7	44,6

Bei noch schwächeren Strömen wurde die Empfindlichkeit zu gering, um genaue Einstellungen machen zu können. Jedoch sanken die Werthe nicht unter 44,5.

Nach diesen Versuchen dürfen die magnetisirenden Kräfte, für welche bei Wechselstrom von der Periode 256 die Permeabilität von hartem Eisen als constant betrachtet werden darf, höchstens von der Grössenordnung des Erdfeldes sein.

Weiches Eisen und Stahl verhalten sich im ganzen ähnlich wie hartes Eisen; nur dass bei weichem Eisen das Selbstpotential von vornherein viel grösser ist und schneller ansteigt. Bei Stahl ist das Selbstpotential verhältnissmässig klein und der Anstieg sehr langsam. Zur Erläuterung diene folgende Tabelle: Die Drahtdicke ist bei allen Drähten = 2 mm.

1) Baur, Wied. Ann. 11. p. 394. 1880.

2) Rayleigh, Phil. Mag. 23. p. 225. 1887.

J	Weiches Eisen	Hartes Eisen	Stahl
100	5850	4375	2311 cm
30	4081	3205	2216 „
10	3432	2553	2164 „

Die constanten Werthe des Selbstpotentials dürften etwa bei 3050 cm ($\mu = 101$), 2300 cm ($\mu = 72$), 2050 cm ($\mu = 58$) erreicht werden.

Von der Drahtdicke ist das Selbstpotential ferromagnetischer Drähte abgesehen von dem formalen Theil

$$2 L \left\{ \log \frac{2 L}{\varrho} - 1 \right\}$$

noch insofern abhängig, als bei dünnerem Draht für den gleichen Strom die magnetisirende Kraft grösser ist (an der Drahtoberfläche = $2 J/\varrho$). Für Stahldrähte von verschiedener Dicke erhielt ich:

J	3 mm	2 mm	1 mm
100	2194	2311	2873 cm
30	2125	2216	2728 „
10	2072	2164	2573 „

Die Differenzen, besonders die hohen Werthe bei dem 1 mm Draht, dürften zum Theil auch von einer Verschiedenheit des Materials herrühren.

Der Widerstand ferromagnetischer Drähte ändert sich für verschiedene Schwingungszahlen, so lange μ constant ist, gemäss der Rayleigh'schen Formel. Bei stärkerer Magnetisirung ist die Widerstandsvermehrung jedoch grösser, als sie der Permeabilität entspricht. Es ist dies eine Folge der Hysteresis.¹⁾

Bei dem 3 mm dicken Draht aus hartem Eisen erhielt ich für constanten Strom $w = 0,00796 \Omega$, für Wechselstrom ($J = 100$, $n = 256.2 \pi$): $w' = 0,00936 \Omega$. Wir hatten oben für $J = 100$, $p = 3590$ cm gefunden, also $\mu = 129,2$. Daraus ergibt sich w' nach der Rayleigh'schen Formel berechnet, zu $0,00894 \Omega$: also 5 Proc. kleiner als das Resultat der Messung.

Würzburg, Physik. Institut der Univ. August 1874.

1) Vgl. hierüber Rayleigh, Phil. Mag. p. 240. March 1887.