Die Plücker'schen Zahlen der Abweichungscurve*).

Von

W. BOUWMAN in Schiedam (Holland).

1. Die Form einer Curve C^* in der Nähe eines Punktes A wird durch den Krümmungskreis bestimmt. Die Untersuchung dieser Form erhält eine Ausdehnung durch die Betrachtung der vier- und fünfpunktig berührenden Kegelschnitte und der Abweichungsaxen**). Ebenso schliesst sich an die Entwundene der Curve C^* der Ort der Mittelpunkte dieser fünfpunktig berührenden Kegelschnitte, die wir *Abweichungskegelschnitte* nennen, an. In den folgenden Zeilen werden wir die Plücker'schen Zahlen dieser „*Abweichungscurve*“ zu bestimmen versuchen, zuerst auf geometrischem Wege. Nachher werden die erhaltenen Formeln auf analytischem Wege sich als völlig richtig bewähren.

Für die geometrischen Betrachtungen setzen wir die Aufgabe also in projective Form:

Die Plücker'schen Zahlen des Ortes Δ der Pole einer Geraden l in Bezug auf die Abweichungskegelschnitte der gegebenen Curve C^* zu bestimmen.

Der Ort Δ wird die Abweichungscurve, wenn die Gerade l ins Unendliche rückt.

Zuerst bemerken wir, dass die Curven C^* und Δ dasselbe Geschlecht haben, weil sie sich eindeutig entsprechen. Denn in jedem Punkte der Curve C^* ist ein Abweichungskegelschnitt bestimmt und somit ein Pol der Geraden l und umgekehrt.

2. Wie die Normalen einer Curve die Entwundene einhüllen, ebenso ist Δ die Enveloppe der Geraden, welche die Punkte der Curve C^* mit den zugehörigen Polen verbinden. Dies zu beweisen ist

*) W. Bouwman, Dissert. Groningen 1896.

**) Salmon: Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven, § 386. Zweite Auflage.

leicht. Sei a (Fig. 1) die Tangente der Curve in A , und ziehen wir durch den Durchschnittspunkt der geraden Linien a und l eine unendlich wenig von a abweichende Gerade a_1 , welche mit der Curve C^n unter andern die zwei in der Nähe von A liegenden Punkte 1 und 4 gemein hat. Zwei Durchschnittspunkte 2 und 3 von a und C^n sind in A zusammengefallen. Die vier Punkte 1, 2, 3, 4 dürfen als vier auf einander folgende Punkte der Curve C^n betrachtet werden; die Abweichungskegelschnitte (01234) und (12345) haben dieselben gemein. Wenn nun P' der vierte harmonische Punkt ist zu P in Bezug auf die Punkte 1 und 4, so ist die Gerade $\overline{AP'}$ oder l' die Polargerade von

Fig. 1.

P in Bezug auf die Kegelschnitte (01234) und (12345). Weil P auf l liegt, liegen die zwei Pole der Geraden l auf l' , m. a. W. die Tangente der Curve Δ geht durch den zugehörigen Punkt A der Curve C^n .

Wir dürfen somit auch sagen, dass Δ die Enveloppe ist der Polargeraden der Punkte P von l in Bezug auf die betreffenden Abweichungskegelschnitte. Diese Geraden sind auch die reciproken Polargeraden von l in Bezug auf die Schaaren, welche durch zwei auf einander folgende als Büschel zweiter Classe betrachtete Kegelschnitte bestimmt werden. Es leuchtet ein, dass der Dualismus nicht ein völliger ist.

3. Fassen wir jetzt die Singularitäten der Curve Δ und zwar die Spitzen und Inflexionen ins Auge. Diese können nicht anders entstehen als:

1) aus den Punkten der Curve C^n , in denen sechspunktige Berührung mit einem Abweichungskegelschnitt stattfindet, also aus den sextactischen Punkten*);

*) Halphen, Recherche etc. *Journal de Math. pures et appliquées*, Série III, Tome II, p. 257.

II) aus den singulären Punkten von C^n , wo die Abweichungskegelschnitte zerfallen;

III) aus den Durchschnittspunkten von l und C^n .

In einem gewöhnlichen Doppelpunkte der Curve C^n z. B. verhält jeder Ast sich als ob der andere nicht da wäre.

A. Nicht auf l liegende Punkte von C^n .

4. *Sextactischer Punkt S.* Der Kegelschnitt (12345) hat auch den Punkt 6 mit C^n gemein, der Kegelschnitt (23456) geht auch durch den Punkt 1. Die Kegelschnitte (12345, 6) und (1, 23456) fallen zusammen. Die zwei Pole von l fallen deshalb auch unbedingt zusammen: es entsteht eine Spitze der Curve Δ .

Die drei Kegelschnitte (12345, 6), (1, 23456) und (34567) haben die vier Punkte 3, 4, 5, 6 gemein, folglich liegen die drei Pole der Geraden l auf der Rückkehrtangente von Δ .

Diese Spitze zeigt also keine höhere Singularität.

5. *Inflexion B.* (Fig. 2). Auf der Inflexionstangente b liegen drei auf einander folgende Punkte 3, 4, 5 der Curve C^n . Die drei

Fig. 2.

Kegelschnitte (12345), (23456) und (34567) zerfallen respective in
 b und die Gerade $\overline{12}$,
 b und die Gerade $\overline{26}$,
 b und die Gerade $\overline{67}$.

Dies sind jedesmal zwei unendlich wenig verschiedene Geraden, deren Durchschnittspunkt auf l liegt und dem Punkte B unendlich nahe ist. Diese drei Durchschnittspunkte sind die drei Pole von l , so dass Δ eine mit B zusammenfallende Inflexion erhält, welche b als Inflexionstangente hat.

6. *Spitze K.* Wir fassen vollkommen umgekehrt wie bei der Inflexion den Abweichungskegelschnitt als einen Büschel zweiter Classe auf, der fünf auf einander folgende Tangenten mit der Curve C^n gemein hat. Es gehen durch K drei auf einander folgende Tangenten $3', 4', 5'$ der Curve C^n . Die drei Büschel $(1' 2' 3' 4' 5')$, $(2' 3' 4' 5' 6')$, $(3' 4' 5' 6' 7')$ zerfallen respective in

den Büschel erster Classe K und den Büschel erster Classe $1' 2'$,

den Büschel erster Classe K und den Büschel erster Classe $2' 6'$,

den Büschel erster Classe K und den Büschel erster Classe $6' 7'$.

Die drei Polargeraden der drei betreffenden auf den Geraden l liegenden Punkte in Bezug auf diese drei degenerirten Büschel sind die drei Geraden, welche K verbinden mit den drei Durchschnittspunkten $1' 2'$, $2' 6'$, $6' 7'$. Diese drei Verbindungsgeraden weichen unendlich wenig von der Rückkehrtangente k der Classe C^n ab. Folglich erhält Δ eine Spitze, die mit K zusammenfällt und k als Tangente hat.

B. Punkte auf der Geraden l .

7. Sei A (Fig. 3) ein gewöhnlicher Durchschnittspunkt von l und C^n . Wir ziehen in A die Tangente a . Zwei Durchschnittspunkte 3, 4 von a und C^n sind in A zusammengefallen. Durch den folgenden Punkt 5 der Curve C^n ziehen wir die Gerade a' so, dass die in der Nähe von A liegenden Durchschnittspunkte 5 und 2 von a' und C^n harmonisch getrennt sind von den Durchschnittspunkten M' und M von a' mit l und a . Dies ist leicht auszuführen mit Hilfe der Geraden $\overline{A2}$. Es ist dann einleuchtend, dass die Pole der zwei Kegelschnitte (12345) und (23456) in M unbedingt zusammenfallen. Also ist M eine Spitze von Δ .

Fig. 3.

Die vier Kegelschnitte (01234), (12345), (23456), (34567) haben die Punkte 3, 4 gemein, d. h. eine Tangente und den Contactpunkt. Folglich liegen die vier betreffenden Pole auf der Tangente a dem Punkte M unendlich nahe. Deshalb schneidet die Rückkehrtangente a die Curve Δ in M in vier auf einander folgenden Punkten, von denen zwei unbedingt zusammenfallen. Folglich ist M eine Knotenspitze und somit einer Spitze, einer Inflexion, einem Doppelpunkt und einer Doppeltangente äquivalent (Fig. 5).

Die nachstehende Beweisführung gewährt denselben Erfolg. Die

Fig. 4.

vier Geraden, welche die vier Punkte $M(M_2, M_3, M_4, M_5)$ mit den vier Punkten 2, 3, 4, 5 (Fig. 4) verbinden, wo die vier betreffenden Kegelschnitte die Curve C^n berühren, sind vier auf einander folgende

Fig. 5.

Tangenten der Curve Δ . Man darf sie als durch M gehend betrachten, weil die Abweichungen davon höherer Ordnung sind. Deshalb hat M

vier auf einander folgende Tangenten mit Δ gemein, von denen zwei, die Verbindungsgeraden des Punktes M mit 3 und 4, unbedingt zusammenfallen. Also zeigt M die Kennzeichen einer Knotenspitze.

8. *Sextactischer Punkt* S auf l . Der Kegelschnitt (12345) geht auch durch den Punkt 6, und der Kegelschnitt (23456) geht auch durch den Punkt 1. Die drei Kegelschnitte (12345, 6), (1, 23456), (34567) haben die vier Punkte 3, 4, 5, 6 gemein. Folglich fallen die drei auf einander folgenden Pole $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ unbedingt zusammen.

Fig. 6a.

Der Zusammenfall der Punkte Σ_1 und Σ_2 deutet auf eine Spitze, der Zusammenfall von Σ_2 und Σ_3 auf eine zweite Spitze, der Zusammenfall von Σ_1 und Σ_3 auf einen Knoten.

Die fünf Kegelschnitte (12345, 6), (1, 23456), (34567), (45678), (56789) haben die zwei Punkte 5, 6 gemein, d. h. die Tangente s und den Contactpunkt S . Hieraus ergibt sich, dass die Tangente s in Σ fünf Durchschnittspunkte mit Δ gemein hat.

Fig. 6b.

Die fünf Geraden, welche die fünf Punkte mit den Berührungspunkten der fünf betreffenden Kegelschnitte verbinden, sind fünf aufeinander folgende Tangenten, die Σ mit der Curve Δ gemein hat. Zwei von diesen fallen unbedingt zusammen. Also gilt Σ für eine Inflexion und für wenigstens eine Doppeltangente.

Die Anzahl der Spitzen und Inflexionen in Σ ist auch durch folgende Auseinandersetzung zu bestimmen. Vorausgesetzt l geht zuerst nicht durch den sextactischen Punkt und jetzt bewegen wir l , bis dies der Fall sei. Der Punkt Σ aus S ist jetzt entstanden aus einer gewöhnlichen Spitze und einer Knotenspitze, enthält also zwei Spitzen und eine Inflexion. (Fig. 6a und 6b, s. Seite 29).

9. *Gewöhnlicher Contactpunkt* von l und C^* . Von Secante werde l zur Tangente. Aus jedem der zwei zusammenfallenden Durchschnittspunkte von l und C^* entstand vorher eine Knotenspitze. Sobald l Tangente ist, ist der Durchschnittspunkt von l mit der in R an C^* gezogenen Tangente unbestimmt. Die ganze Gerade l vertritt diesen Durchschnittspunkt; die Polargerade in Bezug auf den Abweichungskegelschnitt wird gleichfalls unbestimmt und entartet in den Strahlenbüschel erster Classe R . Dieser Büschel trennt sich von Δ und die Classe wird um eins verringert.

Ordnung und Geschlecht bleiben unverändert. Mit Hilfe der Plücker'schen Formeln schliessen wir, dass die Zahl der Spitzen um eins wächst und die Zahl der Inflexionen um zwei abnimmt. Aus zwei Knotenspitzen erhalten wir also einen Punkt, der drei Spitzen und keine Inflexion enthält.

Die nachstehende Auseinandersetzung ergibt denselben Erfolg. Vier auf einander folgende Kegelschnitte haben zwei Punkte oder die Tangente l und den Contactpunkt R gemein. Die vier betreffenden Pole fallen in R unbedingt zusammen. Durch den Zusammenfall von

Fig. 7a.

Fig. 7b.

R_1 und R_2 , R_2 und R_3 , R_3 und R_4 enthält dieser Punkt drei Spitzen; durch den Zusammenfall von R_1 und R_3 , R_4 und R_4 , R_2 und R_4 enthält derselbe drei Knoten.

Fünf auf einander folgende Kegelschnitte berühren die Gerade l . Die fünf Pole sind fünf auf einander folgende auf l liegende Punkte. R hat die fünf Geraden, welche diese fünf Pole mit den betreffenden Berührungspunkten verbinden, als auf einander folgende Tangenten mit

Δ gemein. Weil R diesen fünf Punkten unendlich nahe liegt, fallen nicht zwei dieser Tangenten unbedingt zusammen. Also enthält R keine Inflexion. Eine geometrische Darstellung geben Fig. 7a und 7b (s. Seite 30).

10. Die Gerade l sei *Tangente* in einem *sextactischen* Punkte Q von C^* .

Wir setzen voraus, dass l Tangente in einem andern Punkte von C^* sei, und bewegen l jetzt, bis Q der Contactpunkt ist. Der in § 9 betrachtete Punkt fällt dann mit einer einfachen Spitze zusammen. Der entstandene Punkt enthält also vier Spitzen und keine Inflexion.

Der Beweisführung in § 9 analog dürfen wir auch sagen: Sechs Kegelschnitte haben die Tangente l gemein. Folglich liegen auf der Tangente l sechs auf einander folgende Punkte von Δ , von denen fünf unbedingt zusammenfallen. Deshalb gilt Q für vier Spitzen und sechs

Fig. 8.

Knoten. Q hat sechs auf einander folgende Tangenten mit Δ gemein, von denen keine zwei gänzlich zusammenfallen. Folglich enthält Q keine Inflexion. (Fig. 8).

11. *Inflexion* B auf l , mit b als Inflexionstangente.

Die Gerade l hat hier bloss einen Durchschnittspunkt mit C^* . In diesem Punkte degenerirt der Abweichungskegelschnitt in zwei unendlich wenig verschiedene Geraden b und b_1 , die sich in dem genannten Durchschnittspunkte schneiden. Der Pol von l wird unbestimmt und degenerirt in c , die vierte harmonische Gerade zu l in Bezug auf b und b_1 . Man darf c als mit b zusammenfallende betrachten. Folglich trennt sich die Gerade b von Δ .

Wenn wir alle Punkte des in die Gerade b degenerirten Poles nach einander mit dem betreffenden Punkt B der Curve C^* verbinden, finden wir stets die Gerade b . Wenn wir aber B von b mit B verbinden, wird die Verbindungsgerade unbestimmt und degenerirt in den Büschel erster Classe B . Dieser Büschel trennt sich folglich von Δ .

Wenn wir deshalb die Gerade l aus einer anderen Lage bewegen,

bis sie durch B geht, so werden Ordnung und Classe beide um eins reducirt.

Mit Hilfe der Plücker'schen Formeln finden wir leicht, dass die Zahl der Inflexionen wie die der Spitzen eins weniger wird.

Bei der genannten Bewegung von l fällt eine Knotenspitze von Δ mit einer Inflexion zusammen, und es entsteht ein Punkt, der bloss für eine Inflexion gilt, m. a. W. eine einfache Inflexion. Weil die Knotenspitze und nicht die Inflexion aus B die Lage ändert, erhellt, dass auch wenn l durch B geht, die Inflexion mit B zusammenfällt und b als Tangente hat.

12. Wir setzen nun voraus, dass die Gerade l aus einer willkürlichen Lage zur *Inflexionstangente* im Punkte T wird. Jeder der Abweichungskegelschnitte in den drei auf einander folgenden Durchschnittspunkten von C^* und l degenerirt in l und eine unendlich wenig von l verschiedene Gerade. Die drei Pole werden unbestimmt und degeneriren alle drei in die Gerade l , die sich folglich dreimal von Δ trennt.

Als Verbindungsgeraden der drei Pole mit den betreffenden Berührungspunkten erhalten wir dreimal die Gerade l und drei Büschel erster Classe. Der Büschel erster Classe T trennt sich somit dreimal von Δ .

Bei der genannten Bewegung von l werden Ordnung und Classe also um drei herabgesetzt; folglich wird auch die Zahl der Spitzen und die der Inflexionen drei weniger. Drei Knotenspitzen und eine einfache Inflexion fallen zusammen; es bleibt bloss eine gewöhnliche Inflexion übrig, die in T liegt und l als Tangente hat.

13. *Spitze K auf l .* Die Gerade k sei Rückkehrtangente. Die Gerade l schneidet C^* in K in zwei zusammenfallenden Punkten. Die zwei denselben entsprechenden Kegelschnitte degeneriren beide in die doppelt gezählte Rückkehrtangente. Man muss bei diesen Kegelschnitten K betrachten als den Durchschnittspunkt dieser zwei nicht gänzlich zusammenfallenden Geraden. Die zwei Pole von l degeneriren beide in die Gerade k , die sich folglich zweimal von Δ trennt.

Wenn wir nach einander alle Punkte des degenerirten Poles k mit dem Berührungspunkt K verbinden, erhalten wir die Gerade k und den Büschel erster Classe K . Dieser Büschel trennt sich deshalb zweimal von Δ .

Also werden Ordnung und Classe von Δ um zwei herabgesetzt, wenn eine Spitze auf l liegt und daraus ergiebt sich mit Hilfe der Plücker'schen Formeln, dass die Zahl der Spitzen wie die der Inflexionen um zwei weniger wird.

Wenn wir die Gerade l also aus einer anderen Lage bewegen, bis sie durch K geht, so fallen zwei Knotenspitzen mit einer gewöhnlichen

Spitze zusammen, und eine einfache Spitze entsteht in K mit k als Rückkehrtangente.

14. Sei l zum Schluss *Rückkehrtangente* in L . Mit den drei Durchschnittspunkten in L correspondiren drei degenerirte Kegelschnitte. Der in l degenerirte Pol trennt sich dreimal von Δ .

Die drei betreffenden Verbindungsgeraden werden gleichfalls unbestimmt, und der Büschel erster Classe L trennt sich dreimal von Δ .

Ordnung und Classe werden um drei reducirt. Die Zahl der Spitzen und die der Inflexionen wird um drei weniger; anstatt einer einfachen Spitze und drei Knotenspitzen erhalten wir bloss eine gewöhnliche Spitze in L , die l als Tangente hat.

Hiermit sind alle Fälle der Curven ohne höhere Singularitäten erschöpft. Die geometrische Behandlung dieser höheren Singularitäten bietet leider zu grosse Schwierigkeiten.

Wir wollen jetzt noch kurz darauf hinweisen, wie wir zu den erhaltenen Ergebnissen auch auf analytischem Wege gelangen können, und wie die analytische Behandlungsweise leicht auf jede höhere Singularität ausgedehnt wird.

15. F. J. van den Berg*) giebt die folgenden Formeln

$$(1) \quad x' = x + \frac{3y_2y_3}{5y_3^2 - 3y_2y_4}, \quad y' = y - \frac{3y_2(3y_2^2 - y_1y_3)}{5y_3^2 - 3y_2y_4}.$$

Hierin sind x', y' die Coordinaten des Abweichungsmittelpunktes, d. h. des Mittelpunktes des Abweichungskegelschnitts, x, y die Coordinaten des Berührungspunktes, y_1, y_2 u. s. w., die mit Hilfe der Gleichung von C^* abgeleiteten Differentialquotienten von y nach x u. s. w.

Es ist leicht die Tangentialcoordinaten u', v' der Geraden, welche diesen Mittelpunkt mit dem betreffenden Contactpunkt verbindet, zu bestimmen. Man findet

$$(2) \quad u' = -\frac{3y_2^2 - y_1y_3}{(3y_2^2 - y_1y_3)x + yy_3}, \quad v' = -\frac{y_3}{(3y_2^2 - y_1y_3)x + yy_3}.$$

Wie bekannt ist, sind die Bedingungen für eine Spitze $\frac{dy'}{dx}$ entweder $= \frac{0}{0}$ oder $= \frac{\infty}{\infty}$ und $\frac{d^2y'}{dx^2} = \infty$; für eine Inflexion sind dieselben $\frac{dv'}{du}$ entweder $= \frac{0}{0}$ oder $= \frac{\infty}{\infty}$ und $\frac{d^2v'}{du^2} = \infty$.

Den ersten Bedingungen genügen die Punkte, welche durch die Differentialgleichung

$$(3) \quad 9y_2^2y_5 - 45y_2y_3y_4 + 40y_3^3 = 0$$

bestimmt werden, d. h. die sextactischen Punkte.

*) F. J. v. d. Berg. Over Krommingskegelsneden van vlakke kromme lijnen. *Verslagen en Mededeelingen der Kon. Acad. van Wetensch., Afd. Natuurkunde, 3de reeks, Dl IX.*

Letzteren Bedingungen genügen die durch die Differentialgleichung $y_2 = 0$ bestimmten Inflectionen von C^* .

Hinsichtlich beider Arten von Singularitäten bedürfen die singulären Punkte und die unendlich weit entfernten Punkte von C^* einer Untersuchung.

16. Wir setzen voraus, die Gleichung der Curve C^* sei in einer solchen Form gegeben, dass die zu untersuchenden Punkte mit Beziehung zu den Coordinatenaxen keine besondere Lage haben, und wir brauchen daher auf $y_1 = 0$ und $y_1 = \infty$ nicht zu achten.

Für die Untersuchung wollen wir die Coordinaten der Curve in der Nähe des betrachteten Punktes mit Hilfe eines Parameters t darstellen.

Nehmen wir zuerst einen nicht unendlich weit liegenden *linearen* Ast. Sei (ξ_1, η_1) der feste Punkt auf C^* , (x, y) der sich bewegende Punkt in der Nähe von (ξ_1, η_1) . Wir haben

$$(4) \quad x - \xi_1 = t, \quad y - \eta_1 = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4 + \varepsilon t^5 + \dots$$

Hieraus ergibt sich

$$y_1 = \alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2 + \dots$$

u. s. w., und mit Hilfe der Formeln (1)

$$(5) \quad \begin{cases} x' - \xi_1 = \frac{T_1}{N_1}, & y' - \eta_1 = \frac{T_1'}{N_1}, \\ T_1 = \beta\gamma + 8\gamma^2 t + (-10\beta\varepsilon + 46\gamma\delta)t^2 + \dots, \\ T_1' = \alpha\beta\gamma - 2\beta^3 + (8\alpha\gamma^2 + 16\beta^2\gamma)t + \dots, \\ N_1 = 5\gamma^2 - 4\beta\delta + (-20\beta\varepsilon + 28\gamma\delta)t + \dots. \end{cases}$$

Wenn zwischen α, β, γ u. s. w. keine Beziehung besteht, zeigt die Abweichungcurve D nichts besonderes.

17. Die Differentialgleichung eines sextactischen Punktes wird

$$\beta^2\varepsilon - 3\beta\gamma\delta + 2\gamma^3 = 0$$

und unter dieser Bedingung kann man die Formeln (5) unter die folgende Form bringen

$$(6) \quad \begin{cases} x' - \xi_1 - \frac{\beta\gamma}{5\gamma^2 - 4\beta\delta} = \frac{1}{5\gamma^2 - 4\beta\delta} \cdot \frac{v_1 t^2 + v_2 t^3 + \dots}{N_1}, \\ y' - \eta_1 - \frac{\alpha\beta\gamma - 2\beta^3}{5\gamma^2 - 4\beta\delta} = \frac{1}{5\gamma^2 - 4\beta\delta} \cdot \frac{\mu_1 t^2 + \mu_2 t^3 + \dots}{N_1}. \end{cases}$$

Dies ist eine Spitze.

Substituiren wir den Werth von x' und y' in die Gleichung

$$\frac{X - \xi_1}{\beta\gamma} = \frac{Y - \eta_1}{\alpha\beta\gamma - 2\beta^3}$$

der Tangente, so finden wir, dass diese Tangente die Curve D in drei auf einander folgenden Punkten schneidet. Aus einem sextactischen Punkte erhalten wir folglich eine einfache Spitze.

18. Der betrachtete Ast zeigt eine Inflexion, wenn $\beta = 0$. Die Formeln (6) werden

$$(7) \quad \begin{cases} x' - \xi_1 = \frac{8\gamma^2 t + 46\gamma\delta t^2 + (80\gamma\epsilon + 80\delta^2)t^3 + \dots}{5\gamma^2 + 28\gamma\delta t + \dots}, \\ y' - \eta_1 = \frac{8\alpha\gamma^2 t + 46\alpha\gamma\delta t^2 + (80\alpha\gamma\epsilon + 80\alpha\delta^2 + 40\gamma^3)t^3 + \dots}{5\gamma^2 + 28\gamma\delta t + \dots}. \end{cases}$$

Dies ist eine Inflexion, die mit der Inflexion von C^n zusammenfällt und dieselbe Tangente hat.

Eine Spitze von C^n wird vorgestellt durch

$$\begin{aligned} x - \xi_1 &= t^2, \\ y - \eta_1 &= \alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \dots \end{aligned}$$

Hieraus geht wieder eine Spitze hervor.

19. Einen unendlich weit entfernten linearen Ast kann man darstellen durch

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{t}, \\ y &= \frac{\alpha}{t} + \beta + \gamma t + \delta t^2 + \epsilon t^3 + \dots, \end{aligned}$$

Hieraus findet man

$$(8) \quad \begin{cases} x' - \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{(-10\gamma^2\epsilon + 30\gamma\delta\epsilon - 20\delta^3)t^2 + (-40\gamma^2\eta + 60\gamma\delta\zeta + 80\gamma\epsilon^2 - 100\delta^2\epsilon)t^3 + \dots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + (16\gamma\epsilon + 20\delta^2)t^2 + \dots}, \\ y' - \beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{\alpha(-10\gamma^2\epsilon + 30\gamma\delta\epsilon - 20\delta^3)t^2 + \dots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + (16\gamma\epsilon + 20\delta^2)t^2 + \dots}. \end{cases}$$

Dies ist eine Spitze.

Aus der Gleichung der Rückkehrtangente

$$\frac{(-5\gamma^2\epsilon + 15\gamma\delta\epsilon - 10\delta^3)t^4 + \dots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + \dots} = 0$$

erhält, dass diese Tangente die Curve D in vier auf einander folgenden Punkten schneidet.

Aus den Formeln (2) finden wir

$$(9) \quad \begin{cases} u' - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{(\beta\gamma^2 + \alpha\gamma\delta)t^2 + \dots}{\beta\gamma + 4\beta\delta t + \dots}, \\ v' + \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{\beta} \cdot \frac{\gamma\delta t^2 + \dots}{\beta\gamma + 4\beta\delta t + \dots}. \end{cases}$$

Zwei auf einander folgende Tangenten fallen gänzlich zusammen. Aus der Gleichung des Contactpunktes geht hervor, dass dieser Punkt vier auf einander folgende Tangenten mit der Curve D gemein hat.

Der entstandene Punkt ist also eine Knotenspitze.

20. Der betrachtete unendlich weit entfernte Punkt ist ein sextactischer Punkt unter der Bedingung

$$-\gamma^2\xi + 3\gamma\delta\varepsilon - 2\delta^3 = 0.$$

Unter dieser Bedingung werden die erhaltenen Formeln (8) reducirt in

$$(10) \quad \begin{cases} x' - \frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\lambda_1 t^3 + \dots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + \dots}, \\ y' - \beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\alpha\lambda_1 t^3 + \dots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + \dots}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Tangente wird

$$\frac{\alpha_1 t^5 + \dots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + \dots}.$$

Die Formeln (9) bleiben unverändert. Der Contactpunkt hat fünf auf einander folgende Tangenten mit der Curve D gemein. Aus diesen Formeln ergibt sich, dass der entstandene Punkt zwei Spitzen, zwei Knoten, einer Inflexion und einer Doppeltangente äquivalent ist.

Der betrachtete unendlich weit entfernte Punkt ist eine Inflexion wenn $\gamma = 0$

$$x' = \frac{1}{t} \cdot \frac{8\delta^2 + 46\delta\varepsilon t + (80\delta\xi + 180\varepsilon^2)t^2 + (95\delta\eta + 340\varepsilon\xi)t^3 + \dots}{20\delta^2 + 100\delta\varepsilon t + \dots},$$

$$y' - \beta = \frac{1}{t} \cdot \frac{8\alpha\delta^2 + 46\alpha\delta\varepsilon t + (80\alpha\delta\xi + 180\alpha\varepsilon^2)t^2 + (95\alpha\delta\eta + 340\alpha\varepsilon\xi - 10\delta^3)t^3 + \dots}{20\delta^2 + 100\delta\varepsilon t + \dots}.$$

Dies ist wieder eine Inflexion an derselben Stelle und mit derselben Tangente.

21. Einen Ast, welcher die unendlich weit entfernte Gerade in einem Punkte berührt, kann man darstellen durch

$$x = \frac{1}{t^2},$$

$$y = \frac{\alpha}{t^2} + \frac{\beta}{t} + \delta t + \varepsilon t^2 + \dots$$

Hieraus geht ein vierfacher Punkt hervor, der drei Spitzen und drei Knoten äquivalent ist.

Dieser Contactpunkt ist sextactischer Punkt unter der Bedingung $\varepsilon = 0$. Es entsteht ein fünffacher Punkt, der für vier Spitzen und sechs Knoten gilt.

Eine unendlich weit entfernte Spitze kann man darstellen durch

$$x = \frac{1}{t^2},$$

$$y = \frac{\alpha}{t^2} + \gamma + \delta t + \varepsilon t^2 + \dots$$

Die unendlich weit entfernte Gerade ist Inflexionstangente:

$$x = \frac{1}{t^3},$$

$$y = \frac{\alpha}{t^3} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\gamma}{t} + \delta + \varepsilon t + \dots$$

Diese Gerade ist Rückkehrtangente:

$$x = \frac{1}{t^3},$$

$$y = \frac{\alpha}{t^3} + \frac{\gamma}{t} + \delta + \varepsilon t + \dots$$

Auch in diesen Fällen werden sich die auf geometrischem Wege erhaltenen Ergebnisse als richtig erweisen.

22. Fassen wir jetzt das Resultat zusammen:

Jede Inflexion von C^n veranlasst eine Inflexion der Curve D , an demselben Ort und mit derselben Tangente.

Aus jeder Spitze von C^n geht eine Spitze von D hervor an demselben Ort und mit derselben Tangente.

Jeder nicht auf l_∞ liegende sextactische Punkt von C^n verursacht eine Spitze von D .

Jeder gewöhnliche Durchschnittspunkt von l_∞ und C_n veranlasst eine Knotenspitze.

Aus einem sextactischen Durchschnittspunkt entsteht ein dreifacher Punkt, der zwei Spitzen, zwei Knoten, eine Inflexion und eine Doppeltangente enthält.

Aus einem gewöhnlichen Contactpunkt von C^n und l_∞ geht ein einfacher Punkt hervor, der für drei Spitzen und drei Knoten gilt. Er fällt mit dem Contactpunkt zusammen und hat l_∞ als Tangente.

Aus einem sextactischen Contactpunkt entsteht ein fünffacher Punkt, der vier Spitzen und sechs Knoten äquivalent ist.

23. Aus unseren Betrachtungen werden die nachstehenden Formeln leicht abgeleitet

$$(11) \quad \begin{cases} G = g, \\ K = 2(m + 3n + 10g - 10) - (\beta - \varrho + 2\kappa + 3\beta' + 3\kappa'), \\ B = 2(m + g - 1) - (\beta + 2\varrho + 2\kappa + 3\beta' + 3\kappa'), \\ N = 2(m + 2n + 6g - 6) - (\beta + 2k + 3\beta' + 3\kappa'), \\ M = 2(m + 2n + 3g - 3) - (\beta + \varrho + 2\kappa + 3\beta' + 3\kappa'). \end{cases}$$

Durch n, m, g, k, b stellen wir respective Ordnung, Classe, Geschlecht, Zahl der Spitzen, Zahl der Inflexionen der Curve C^n dar. Durch N, M, G, K, B bezeichnen wir die betreffenden Zahlen bei der Abweichungcurve.

Es liegen β Inflexionen und κ Spitzen auf l_∞ , für welche l_∞ nicht Tangente ist; l_∞ ist Tangente von C^n in β' Inflexionen, κ' Spitzen und ϱ anderen Punkten.

24. Es ist einleuchtend, dass wir auch im Falle höherer Singularitäten die Curve in der Nähe eines jeden zu untersuchenden Punktes mit Hilfe eines Parameters darstellen können. Man substituirt den

hieraus abgeleiteten Werth von y_1, y_2 u. s. w. in die Formeln (1) und (2), und sieht, wieviel auf einander folgende Punkte, respective Tangenten, unbedingt zusammenfallen. Die Zahl der enthaltenen Spitzen, respective Inflexionen ist jedesmal eins weniger.

Aus der Zahl der Spitzen und Inflexionen und dem Geschlecht von D können die anderen Plücker'schen Zahlen abgeleitet werden.

Endlich weise ich noch darauf hin, dass der von Herrn Halphen*) zur Bestimmung der Zahl der Punkte, welche einer Differentialgleichung genügen, benutzte Weg unserem Zwecke völlig entspricht, so lange die unendlich weit entfernten Aeste nichts Besonderes darbieten.

Wir sehen aus den Formeln (1) leicht, dass die unendlich weit entfernten Punkte der Abweichungcurve der Differentialgleichung

$$5y_3^2 - 3y_2y_4 = 0$$

genügen müssen; aus den Formeln (2) finden wir, dass die Punkte der Curve C^n , welche die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Tangenten veranlassen, durch die Gleichung

$$(3y_2^2 - y_1y_3)x + yy_3 = 0$$

bestimmt werden.

Der ersten dieser zwei Gleichungen genügen $8m - 8n + 6k$ Punkte, der zweiten Gleichung genügen $5m - 4n + 3k$ Punkte.

So lange also die unendlich weit entfernten Gerade in Bezug auf C^n keine besondere Lage hat, ist die Ordnung von D

$$N = 8m - 8n + 6k$$

und die Classe von D

$$M = 5m - 4n + 3k.$$

Mit Hilfe der Plücker'schen Formeln ergibt sich, dass dieses Resultat mit den Formeln (11) in Einklang ist.

*) Halphen l. c.