Ableitung hinreichender Bedingungen des Maximums oder Minimums einfacher Integrale aus der Theorie der zweiten Variation.

Von

ADOLF KNESER in Dorpat.

Um zu entscheiden, ob das Integral

$$J = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

durch eine gewisse Bestimmung der unbekannten Functionen y_v zu einem Extremum, d. h. zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird, wenn diese Functionen beliebigen Bedingungsdifferentialgleichungen unterworfen und ihre Werthe für $x = a$ und $x = b$ vorgeschrieben sind, hat man zu untersuchen, ob die Grösse

$$\Delta = \int_a^b \{ f(x, y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n, y_1' + \delta y_1', \dots, y_n' + \delta y_n') - f(x, y_1, \dots, y_n) \} dx$$

bei hinreichend kleinen mit den festgesetzten Bedingungen verträglichen Variationen δy_v , $\delta y_v'$ ein constantes Vorzeichen besitzt. Entwickelt man den Integranden in diesem Ausdruck nach Potenzen der Variationen, und nennt das Integral der Glieder k^{ter} Dimension die k^{te} Variation von J , so muss, damit J ein Extremum werde, die erste Variation verschwinden, woraus sich die Differentialgleichungen des Problems ergeben. Man hat, wenn diese erfüllt sind, lange Zeit hindurch als selbstverständlich angesehen, dass das Vorzeichen der Grösse Δ mit dem der zweiten Variation übereinstimme, und eine Reihe von Forschern hat sich in siegreichem Kampf mit grossen analytischen Schwierigkeiten bemüht, die zweite Variation so umzuformen, dass ihr Vorzeichen möglichst leicht erkennbar sei. Dabei wurde nach dem Vorgang von Legendre stets die unter dem Integralzeichen stehende quadratische Form, welche die $2n$ Argumente δy_v , $\delta y_v'$ enthält, durch eine andere ersetzt, welche von weniger als $2n$, im Allgemeinen n linearen Verbindungen der Variationen abhängt.

Aber gerade diese Transformation macht den Schluss vom Vorzeichen der zweiten Variation auf das der Grösse Δ anfechtbar. Die allgemeinen Untersuchungen von Scheeffer über das Extremum der Functionen von mehreren Variablen und die von seinen Vorgängern auf diesem Gebiet gegebenen Beispiele haben nämlich auf die leicht ersichtliche, aber oft übersehene Thatsache hingewiesen, dass in einer Function von mehreren Variablen, welche kleine Werthe haben, die Glieder höherer Dimension nur dann gegen die quadratischen sicher vernachlässigt werden können, wenn die von diesen gebildete quadratische Form nicht auf weniger Quadrate linearer Ausdrücke reducirbar ist, als die Anzahl der ursprünglichen Variablen beträgt. So hat nach der Bemerkung von Peano der Ausdruck

$$(x - y^2)(x - 2y^2) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4$$

für beliebig kleine nicht verschwindende Werthe von x und y sowohl positive wie negative Werthe, obwohl das quadratische Glied beständig positiv ist. Hat man also die zweite Variation in das Integral einer Form von weniger als $2n$ linearen Verbindungen von δy , $\delta y'$, transformirt, so ist das Vorzeichen des Integranden in dem Ausdruck Δ durchaus zweifelhaft, noch mehr das der Grösse Δ selbst. Ein besonders helles Licht fällt auf diese Verhältnisse durch ein von Scheeffer gegebenes Beispiel*), in welchem die Grösse Δ positiv und negativ werden kann, während die zweite Variation ein festes Vorzeichen besitzt; allerdings kann letztere nicht für das ganze Integrationsintervall in die Legendre'sche Form übergeführt werden.

Wenn nun auch diese Erwägungen geeignet sind, den Credit der ganzen Theorie der zweiten Variation von Grund aus zu erschüttern, so braucht doch die gewaltige Arbeit, welche hervorragende Mathematiker an den Ausbau derselben gewandt haben, keineswegs als vergeblich und verloren zu gelten. Man kann vielmehr, wie ich auf den folgenden Blättern zu zeigen hoffe, die Theorie der zweiten Variation so ergänzen, dass sie ihren eigentlichen Beruf erfüllt und zu einer strengen Ableitung hinreichender Bedingungen des Extremums führt. Dieses Ziel dürfte für das oben formulirte allgemeine Problem der Variationsrechnung hiermit überhaupt zum ersten Male erreicht sein.

Eine angenehme Pflicht ist es mir zu erwähnen, dass ich einem während der Vollendung dieser Abhandlung geführten Briefwechsel mit Mayer mannigfache Förderung sowie einige Berichtigungen verdanke.

*) Ueber die Bedeutung der Begriffe „Maximum und Minimum“ in der Variationsrechnung, Bd. XXVI dieser Annalen S. 201.

§ 1.

Ableitung einer Determinantenformel.

Es seien n und r feste Anzahlen, $n > r$, μ irgend eine Zahl der Reihe $1, 2, \dots, 2n$, und es werde gesetzt

$$D_\mu = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1\mu} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{r\mu} \\ b_{11} & \dots & b_{r1} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mu} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1\mu} & \dots & b_{r\mu} & a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \dots & a_{\mu\mu} \end{vmatrix};$$

dabei sei allgemein $a_{r0} = a_{0r}$, im Uebrigen aber die Grössen a ebenso wie die Grössen b willkürlich. Aus dem Laplace'schen Satze über die Entwicklung einer Determinante nach Producten von Subdeterminanten folgt leicht

$$D_1 = D_2 = \dots = D_{r-1} = 0;$$

$$(1) \quad D_r = (-1)^r \left(\sum \pm b_{11} b_{22} \dots b_{rr} \right)^2.$$

Setzt man ferner, indem man der Determinante D_n eine Zeile und eine Colonne anfügt,

$$E_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} a_{\mu\nu} & b_{1\mu} & \dots & b_{r\mu} & a_{\mu 1} & \dots & a_{\mu n} \\ b_{1\nu} & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r\nu} & 0 & \dots & 0 & b_{r1} & \dots & b_{rn} \\ a_{1\nu} & b_{11} & \dots & b_{r1} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\nu} & b_{1n} & \dots & b_{rn} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

so ist diese Grösse nur dann von Null verschieden, wenn

$$\mu > n, \quad \nu > n;$$

da offenbar

$$(2) \quad E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu},$$

so hat man, wenn $\nu \leq 2n$ bleibt, $\frac{1}{2}n(n+1)$ Grössen E , welche nicht identisch verschwinden. Da in $E_{\mu\nu}$ die Adjuncten der ersten Zeile von μ , die der ersten Colonne von ν unabhängig sind, und $a_{\mu\nu}$ den Factor D_n hat, so kann man setzen

$$(3) \quad E_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} D_n + b_{1\mu} B_{1\nu} + \dots + b_{r\mu} B_{r\nu} \\ + a_{\mu 1} A_{1\nu} + \dots + a_{\mu n} A_{n\nu},$$

womit die Ausdrücke A, B definiert sind; die Formel (2) ergibt dann

$$E_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} D_n + b_{1\nu} B_{1\mu} + \dots + b_{r\nu} B_{r\mu} \\ + a_{1\nu} A_{1\mu} + \dots + a_{n\nu} A_{n\mu}.$$

Ersetzt man sodann in $E_{\mu\nu}$ die erste Zeile durch folgende

$$b_{\varrho\nu}, 0, \dots, 0, b_{\varrho 1}, \dots, b_{\varrho n},$$

wobei die Anzahl der Nullen r und ϱ eine der Zahlen $1, 2, \dots, r$ ist, so werden die erste und die $(\varrho+1)^{\text{te}}$ Zeile identisch; man erhält also

$$(4) \quad b_{\varrho\nu} D_n + b_{\varrho 1} A_{1\nu} + \dots + b_{\varrho n} A_{n\nu} = 0.$$

Nun besteht, wenn σ eine der Zahlen $1, 2, \dots, n$ ist, folgende Identität:

$$D_{n+\sigma} D_n^\sigma = \begin{vmatrix} 0 & \dots 0 & b_{11} & \dots b_{1n} & \dots b_{1,n+1} & \dots b_{1,n+\sigma} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots 0 & b_{r1} & \dots b_{rn} & \dots b_{r,n+1} & \dots b_{r,n+\sigma} \\ b_{11} & \dots b_{r1} & a_{11} & \dots a_{1n} & \dots a_{1,n+1} & \dots a_{1,n+\sigma} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1n} & \dots b_{rn} & a_{n1} & \dots a_{nn} & \dots a_{n,n+1} & \dots a_{n,n+\sigma} \\ b_{1,n+1} D_n & \dots b_{r,n+1} D_n & a_{n+1,1} D_n & \dots a_{n+1,n} D_n & \dots a_{n+1,n+1} D_n & \dots a_{n+1,n+\sigma} D_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1,n+\sigma} D_n & \dots b_{r,n+\sigma} D_n & a_{n+\sigma,1} D_n & \dots a_{n+\sigma,n} D_n & \dots a_{n+\sigma,n+1} D_n & \dots a_{n+\sigma,n+\sigma} D_n \end{vmatrix}$$

In dieser Determinante multiplicire man, wenn $\tau \leq \sigma$, die ersten r Reihen mit $B_{1,n+\tau}, B_{2,n+\tau}, \dots, B_{r,n+\tau}$, die dann folgenden n Reihen mit $A_{1,n+\tau}, A_{2,n+\tau}, \dots, A_{n,n+\tau}$, und addire sie zur $(n+r+\tau)^{\text{ten}}$ Reihe, d. h. der folgenden

$$b_{1,n+\tau} D_n, \dots, b_{r,n+\tau} D_n, a_{n+\tau,1} D_n, \dots, a_{n+\tau,n+\sigma} D_n.$$

Dann erhält man nach der Formel (4) an den ersten r Stellen Null, z. B. an der ersten

$$b_{1,n+\tau} D_n + b_{11} A_{1,n+\tau} + \dots + b_{1n} A_{n,n+\tau} = 0.$$

Bei dem $(r+1)^{\text{ten}}$ Gliede erhält man mit Berücksichtigung der Formel (3)

$$a_{n+\tau,1} D_n + b_{11} B_{1,n+\tau} + \dots + b_{r1} B_{r,n+\tau} \\ + a_{11} A_{1,n+\tau} + \dots + a_{n1} A_{n,n+\tau} = E_{n+\tau,1},$$

ähnlich an den folgenden Stellen

$$E_{n+\tau,2}, E_{n+\tau,3}, \dots, E_{n+\tau,n+\sigma};$$

da nun von diesen alle Grössen verschwinden, in denen ein Index kleiner als $n+1$ ist, so ergibt sich

$$D_{n+\sigma} D_n^\sigma = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} & b_{1,n+1} & \dots & b_{1,n+\sigma} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{r1} & \dots & b_{rn} & b_{r,n+1} & \dots & b_{r,n+\sigma} \\ b_{11} & \dots & b_{r1} & a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \dots & a_{1,n+\sigma} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{rn} & a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \dots & a_{n,n+\sigma} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & E_{n+1,n+1} & \dots & E_{n+1,n+\sigma} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & E_{n+\sigma,n+1} & \dots & E_{n+\sigma,n+\sigma} \end{vmatrix},$$

oder kurz

$$(5) \quad D_{n+\sigma} D_n^{\sigma-1} = \sum \pm E_{n+1,n+1} E_{n+2,n+2} \dots E_{n+\sigma,n+\sigma} = e_\sigma.$$

Diese Formel kann leicht verallgemeinert werden. Es sei $i_1, i_2, \dots, i_n$ oder kurz (i) irgend eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$; man ersetze, wenn ϱ, σ, τ ganze Zahlen sind und

$$\varrho \leq r, \quad \sigma \leq n, \quad \tau \leq n,$$

die Grössen

$$b_{\varrho\sigma}, b_{\varrho,n+\sigma}, a_{\sigma\tau}, a_{\sigma,n+\tau}, a_{n+\sigma,n+\tau}$$

durch die folgenden:

$$b_{\varrho i_\sigma}, b_{\varrho,n+i_\sigma}, a_{i_\sigma i_\tau}, a_{i_\sigma,n+i_\tau}, a_{n+i_\sigma,n+i_\tau},$$

wodurch D_μ in $D_\mu^{(i)}$, $E_{\mu\nu}$ in $E_{\mu\nu}^{(i)}$, e_σ in $e_\sigma^{(i)}$ übergehe. Dann ist offenbar

$$D_n^{(i)} = D_n, \quad D_{2n}^{(i)} = D_{2n},$$

und bei der Willkürlichkeit der Grössen a, b ergibt die Gleichung (5)

$$D_{n+\sigma}^{(i)} D_n^{\sigma-1} = e_\sigma^{(i)}.$$

Andererseits lehrt ein Blick auf die Definitionsgleichung der Grössen E sofort, dass

$$E_{n+\sigma,n+\tau}^{(i)} = E_{n+i_\sigma,n+i_\tau};$$

also folgt

$$(6) \quad D_{n+\sigma}^{(i)} D_n^{\sigma-1} = e_\sigma^{(i)} = \sum \pm E_{n+i_1,n+1} E_{n+i_2,n+2} \dots E_{n+i_\sigma,n+\sigma},$$

und die Ableitung dieser Formel bleibt auch für $r=0$ in Kraft.

§ 2.

Quadratische Formen, deren Argumente linearen Bedingungsgleichungen unterworfen sind.

Eine reelle quadratische Form von n Argumenten

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}$$

heisse definit bei den linear unabhängigen Bedingungsgleichungen

$$(7) \quad b_{\varrho 1} x_1 + b_{\varrho 2} x_2 + \dots + b_{\varrho n} x_n = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r)$$

wenn sie für alle diesen genügenden reellen Argumentsysteme folgende Eigenschaften hat: sie wechselt ihr Vorzeichen nicht und verschwindet nicht, solange noch mindestens eine der Grössen x_{ν} von Null verschieden ist. Dann kann die Grösse D_n nicht verschwinden; denn wäre $D_n = 0$, so würden die Gleichungen

$$\begin{aligned} b_{\varrho 1} \xi_1 + b_{\varrho 2} \xi_2 + \dots + b_{\varrho n} \xi_n &= 0, & (\varrho = 1, 2, \dots, r) \\ b_{1\nu} \xi_1 + b_{2\nu} \xi_2 + \dots + b_{r\nu} \xi_r + a_{\nu 1} \xi_1 + a_{\nu 2} \xi_2 + \dots + a_{\nu n} \xi_n &= 0 \\ & (\nu = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

ein System von Lösungen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ besitzen, dessen Glieder nicht alle den Werth Null hätten. Es könnten auch nicht alle Grössen ξ_{ν} verschwinden, da sich in diesem Falle ergäbe

$$b_{1\nu} \xi_1 + b_{2\nu} \xi_2 + \dots + b_{r\nu} \xi_r = 0,$$

was der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Gleichungen (7) widerspricht. Nun folgt aber aus den Gleichungen für ξ_{ϱ}, ξ_r leicht

$$\sum_{\nu=1}^n \xi_{\nu} (a_{\nu 1} \xi_1 + a_{\nu 2} \xi_2 + \dots + a_{\nu n} \xi_n) = \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0,$$

was, wenn die Grössen ξ_{ν} nicht alle verschwinden, der Voraussetzung widerspricht, da die Grössen ξ_{ν} für x_{ν} gesetzt den Gleichungen (7) genügen. Somit folgt

$$D_n \geq 0.$$

Da ferner die Gleichungen (7) linear unabhängig sein sollen, muss mindestens eine aus dem System der Coefficienten $b_{\varrho\nu}$ gebildete Determinante r^{ter} Ordnung von Null verschieden sein; speciell sei zunächst

$$(8) \quad \sum (\pm b_{11} b_{22} \dots b_{rr}) \geq 0.$$

Dann sind die Gleichungen (7) nach $x_1, x_2, \dots, x_r$ auflösbar; substituirt man die erhaltenen Ausdrücke in die Form ψ , so ergebe sich

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_0(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n).$$

Die Form ψ_0 , deren Argumente als frei veränderlich angesehen werden können, ist definit im gewöhnlichen Sinne des Wortes, d. h. sie verschwindet nur gleichzeitig mit allen ihren Argumenten. Dasselbe gilt von allen Formen, die aus ihr entstehen, wenn man einen Theil der Argumente gleich Null setzt; denn verschwände eine solche, ohne dass alle ihre Argumente gleich Null wären, so würde dasselbe für ψ_0 folgen, was dem soeben Bemerkten widerspricht. Setzt man also z. B. in der Form ψ und den Gleichungen (7) $x_n = 0$, so ergibt die Gleichung

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \psi_0(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{n-1}, 0),$$

dass die links stehende Form bei den Bedingungsgleichungen

$$b_{q1}x_1 + b_{q2}x_2 + \dots + b_{q,n-1}x_{n-1} = 0 \quad (q=1, 2, \dots, n)$$

definit ist, und letztere sind der Annahme (8) zufolge linear unabhängig. Das Analogon der Determinante D_n ist hier D_{n-1} , da diese aus jener entsteht, indem man die auf die Variable x_n bezüglichen Grössen, d. h. alle, die mindestens einen Index n haben, weglässt. Es kann also nach den früheren Betrachtungen auch D_{n-1} nicht verschwinden; dasselbe ergibt sich für D_{n-2} aus der Betrachtung der Form

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, 0, 0) = \psi_0(x_{r+1}, \dots, x_{n-2}, 0, 0)$$

bei den Bedingungsgleichungen

$$b_{q1}x_1 + b_{q2}x_2 + \dots + b_{q,n-2}x_{n-2} = 0$$

u. s. f. Die sämtlichen Grössen

$$D_n, D_{n-1}, \dots, D_{r+1}, D_r$$

sind also von Null verschieden bei der Annahme (8); für D_r folgt dies aus der Gleichung (1).

Wenn dagegen die Ungleichung (8) nicht gilt, so giebt es bei den eingeführten Voraussetzungen jedenfalls eine derartige Permutation (i) der Zahlen $1, 2, \dots, n$, dass anstatt jener die Ungleichung

$$\sum \pm b_{i_1 i_2} b_{i_2 i_3} \dots b_{i_r i_r} \geq 0$$

besteht. Alsdann braucht man in der durchgeführten Deduction nur x_r durch x_{i_r} zu ersetzen, womit nach § 1 jede Grösse D_μ in $D_\mu^{(i)}$ übergeht; das erhaltene Resultat ergibt also, dass mindestens eine Permutation (i) existirt, bei welcher die Grössen

$$(9) \quad D_n^{(i)} = D_n^*, D_{n-1}^{(i)} = D_{n-1}^*, D_{n-2}^{(i)} = D_{n-2}^*, \dots, D_r^{(i)} = D_r^*$$

von Null verschieden sind.

Richelot hat nun gezeigt*), dass die Form ψ bei den Bedingungen (7) definit ist, wenn die Grössen

*) Bemerkungen zur Theorie der Maxima und Minima, Astronomische Nachrichten Bd. XLVIII S. 272, Nr. 1146 (1853).

$$\frac{D_n}{D_{n-1}}, \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}, \dots, \frac{D_{n+1}}{D_r}$$

dasselbe Vorzeichen besitzen, welches dann auch das der Form ψ ist. Seine Argumentation ergibt auch das umgekehrte Resultat, wenn man, wie er es stillschweigends thut, annimmt, dass keine der Grössen $D_n, D_{n-1}, \dots, D_r$ verschwindet. Stellt man hiermit den soeben bewiesenen Satz über die Grössen (9) zusammen, so folgt, dass die Form ψ dann und nur dann bei den Bedingungsgleichungen (7) definit ist, wenn eine Permutation (i) existirt, für welche die Grössen

$$\frac{D_n}{D_{n-1}^{(i)}}, \frac{D_{n-1}^{(i)}}{D_{n-2}^{(i)}}, \dots, \frac{D_{r+1}^{(i)}}{D_r^{(i)}}$$

endlich und von gleichem Vorzeichen sind; letzteres stimmt dann mit dem der Form ψ überein. Dieser Satz bleibt für $r=0$ ungeändert, wenn man setzt

$$(10) \quad D_0^{(i)} = 1;$$

man erhält dann das Jacobi'sche Kennzeichen der definiten quadratischen Form mit unabhängigen Argumenten*).

Um genauer zu discutiren, gehen wir davon aus, dass $D_r^{(i)}$ nach der Formel (1) das Vorzeichen von $(-1)^r$ hat, und die Gleichung (10) dasselbe für $r=0$ ergibt; je nachdem also ψ eine positive oder negative Form ist, haben die Grössen (9) alle dasselbe Vorzeichen wie $(-1)^r$ oder sind abwechselnd positiv und negativ; im letzteren Falle ist

$$(11) \quad (-1)^n D_n > 0.$$

Sodann zeigen die Formeln (6), dass auch die Grössen

$$D_{n+1}^{(i)}, D_{n+2}^{(i)}, \dots, D_{2n}^{(i)}$$

von Null verschieden sind, wenn dies von den Grössen $e^{(i)}$ gilt; sind alle Grössen (9) positiv, so gilt dasselbe von allen Grössen $D_{n+\sigma}^{(i)}$, wenn man allgemein

$$(12) \quad e_\sigma^{(i)} > 0$$

voraussetzt. Sind alle Grössen (9) negativ, so gilt dasselbe von den Grössen $D_{n+\sigma}^{(i)}$, wenn allgemein

$$(13) \quad e_\sigma^{(i)} (-1)^\sigma > 0$$

angenommen wird. Sind endlich die Grössen (9) von abwechselndem Vorzeichen, so folgt dasselbe für $D_{n+\sigma}^{(i)}$ aus den Annahmen (12) oder (13), je nachdem D_n negativ oder positiv, d. h. nach (11) je nachdem n ungerade oder gerade ist.

*) Weber, Lehrbuch der Algebra (2. Aufl.) § 89 S. 296.

Diese Resultate benutzen wir zur Discussion der Form

$$\varphi = \sum_{\mu=1}^{2n} \sum_{\nu=1}^{2n} a_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu},$$

welche bei den Bedingungsgleichungen

$$(14) \quad b_{\varrho 1} x_1 + b_{\varrho 2} x_2 + \dots + b_{\varrho, 2n} x_{2n} = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \dots, n)$$

nach Richelot definit ist, wenn die $2n - r + 1$ Grössen

$$D_{2n}, D_{2n-1}^{(i)}, \dots, D_r^{(i)}$$

alle von dem Vorzeichen der Grösse $(-1)^r$ oder abwechselnd positiv und negativ sind; wenn also die $n - r + 1$ Grössen (9) alle das Vorzeichen von $(-1)^r$ haben, und die Ungleichungen (12) oder (13) bestehen, je nachdem r gerade oder ungerade ist, so ist φ eine bei den Bedingungen (14) definite Form. Dasselbe gilt nach der Formel (11), wenn die Zeichen der Reihe (9) abwechseln, und die Ungleichungen (12) oder (13) gelten, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Andererseits bestehen die Relationen (12) oder (13), je nachdem die Form

$$E = \sum_{\sigma=1}^n \sum_{\tau=1}^n E_{n+\sigma, n+\tau} u_{\sigma} u_{\tau}$$

bei unabhängigen Argumenten definit positiv oder definit negativ ist; man kann also das Ergebniss der Untersuchung in folgender Weise formuliren.

Die Form φ ist bei den Bedingungen (14) definit positiv, wenn dasselbe von der Form ψ bei den Bedingungen (7) gilt, und E eine definit positive oder negative Form ist, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Die Form φ ist bei den Bedingungen (14) definit negativ, wenn dasselbe von der Form ψ bei den Bedingungen (7) gilt, und die Form E definit positiv oder negativ ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

§ 3.

Quadratische Formen mit variablen Coefficienten.

Ist die Form

$$\chi = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}$$

definit positiv, so ist das Minimum ihrer Werthe unter der Bedingung

$$(15) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

die kleinste Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11} - v & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{12} - v & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - v \end{vmatrix} = 0,$$

also eine algebraische Function ihrer Coefficienten. Sind diese daher in dem Intervall

$$(16) \quad a \leq x \leq b$$

stetige Functionen von x , so gilt dasselbe von dem bezeichneten Minimum. Hört die Form χ für keinen dem Intervall angehörigen Werth von x auf, definit zu sein, so hat ihr Minimum eine von Null verschiedene untere Grenze; denn als stetige Function von x muss es seine untere Grenze erreichen, was, wenn diese Null wäre, den Voraussetzungen widerspräche. Es giebt also eine derartige positive Grösse γ , dass für alle der Ungleichung (16) genügenden Werthe von x bei der Annahme (15)

$$\chi > \gamma.$$

Man kann dies Resultat auch so aussprechen, dass die Ungleichung

$$\chi > \gamma(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

bei beliebigen Werthen x_r , welche nicht sämmtlich verschwinden, besteht.

Es seien nun die in § 2 betrachteten Grössen $a_{\mu r}$, $b_{\rho r}$ in dem Intervall (16) stetige, und zwar reguläre analytische Functionen von x . Wir untersuchen eine Potenzreihe

$$\Phi = \psi(u_1, u_2, \dots, u_n) + R,$$

deren Argumente den Bedingungsgleichungen

$$(17) \quad b_{\rho 1} u_1 + b_{\rho 2} u_2 + \dots + b_{\rho n} u_n + R_\rho = 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, r)$$

unterworfen sind. Dabei seien R, R_ρ Potenzreihen, R enthalte die Grössen u_r nur in mindestens dritter, R_ρ nur in mindestens zweiter Dimension; ihre Coefficienten seien unter der Annahme (16) reguläre analytische Functionen von x und die Reihen mögen für jeden dieser Werthe von x einen nicht verschwindenden Convergencebereich besitzen. Ferner sei, unter γ_0 eine positive Constante verstanden, für das ganze Intervall von a bis b

$$(18) \quad \left| \sum \pm b_{11} b_{22} \dots b_{rr} \right| > \gamma_0.$$

Alsdann können die Gleichungen (17) nach den ersten r Grössen u_r aufgelöst werden; für diese erhält man Potenzreihen der übrigen $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n$, deren lineare Glieder dieselben sind, wie wenn die Reihen R_ρ identisch verschwinden, und die für jeden der Bedingung (16)

genügenden Werth von x einen nicht verschwindenden Convergencebereich besitzen. Dasselbe gilt von der Reihe

$$\Phi = \psi_0(u_{r+1}, u_{r+2}, \dots u_n) + R_0,$$

in welche Φ durch Substitution jener Reihen für $u_1, u_2, \dots u_r$ übergeht; ψ_0 hat, wenn R_0 nur Glieder von mindestens dritter Dimension enthält, dieselbe Bedeutung wie in § 2, ist also eine definit positive Form, wenn dies von der Form ψ bei den Bedingungsgleichungen

$$b_{\rho 1} u_1 + b_{\rho 2} u_2 + \dots + b_{\rho n} u_n = 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots r)$$

gilt, was wir für das Intervall von a bis b voraussetzen. Man kann daher auf ψ_0 die für die Form χ durchgeführten Entwicklungen anwenden, und schliessen, dass bei passender Wahl der positiven Constanten γ die Ungleichung

$$(19) \quad \psi_0(u_{r+1}, u_{r+2}, \dots u_n) > \gamma (u_{r+1}^2 + u_{r+2}^2 + \dots + u_n^2)$$

unter der Annahme (16) besteht, sobald mindestens eine der Grössen $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots u_n$ nicht verschwindet.

Die Reihe R_0 convergire nun für einen bestimmten Werth von x , sobald die Ungleichungen

$$|u_v| < \varepsilon_x \quad (v = r+1, r+2, \dots n)$$

bestehen; ε_x sei eine positive Grösse und η_x die obere Grenze aller möglichen, bei dem betrachteten Werthe von x zulässigen Grössen ε_x . Hätte nun η_x , wenn x das Intervall von a bis b durchläuft, die untere Grenze Null, so gäbe es einen diesem Intervall angehörigen Werth x_0 von der Beschaffenheit, dass in beliebiger Nähe desselben die Grössen η_x beliebig klein würden. Nun kann die Reihe R_0 , da ihre Coefficienten nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt werden können, auch als Potenzreihe der $n - r + 1$ Argumente $x - x_0, u_{r+1}, u_{r+2}, \dots u_n$ dargestellt werden, und convergirt in dieser Gestalt, wenn die Ungleichungen

$$|x - x_0| < \eta_0, \quad |u_v| < \eta_0, \quad (v = r+1, r+2, \dots n)$$

bei passender Wahl der positiven Grösse η_0 bestehen. Dann wäre aber für alle der ersten Ungleichung genügenden Werthe von x offenbar

$$\eta_x \geq \eta_0,$$

was der Definition der Stelle x_0 widerspricht. Es giebt daher eine positive Constante γ_1 von der Beschaffenheit, dass im ganzen Gebiet (16)

$$\eta_x > \gamma_1,$$

und die Reihe R_0 convergirt, sobald

$$|u_v| \leq \gamma_1; \quad (v = r+1, r+2, \dots n).$$

Dabei ist es gleichgültig, ob die Grössen u_v reell oder complex sind. Diese Ungleichung definirt daher zusammen mit der Relation (16) ein Gebiet im Bereich der Grössen $x, u_{r+1}, u_{r+2}, \dots u_n$ von der Beschaffen-

heit, dass R_0 im Innern und auf der Grenze desselben sich regulär verhält, also endlich und stetig ist, dass daher $|R_0|$ in diesem Gebiet eine endliche obere Grenze G besitzt. Hieraus folgt, wenn man entwickelt

$$R_0 = \sum C_{v_1 v_2 \dots} u_{r+1}^{v_1} u_{r+2}^{v_2} \dots,$$

nach einem bekannten Satze der Functionentheorie*) die Ungleichung

$$|C_{v_1 v_2 \dots}| < G \gamma_1^{-v_1 - v_2 - \dots},$$

also

$$(21) \quad |R_0| < G \sum \left| \frac{u_{r+1}}{\gamma_1} \right|^{v_1} \left| \frac{u_{r+2}}{\gamma_1} \right|^{v_2} \dots,$$

wobei rechts über alle Combinationen der Zahlen $v_1, v_2 \dots$ zu summieren ist, in welchen

$$v_1 + v_2 + \dots \geq 3.$$

Dividirt man daher die Reihe rechts durch die Summe

$$\frac{1}{\gamma_1^2} (u_{r+1}^2 + u_{r+2}^2 + \dots) = s,$$

und trennt in jedem Gliede einen Bruch

$$\frac{|u_\mu u_\nu|}{\gamma_1^2 s}$$

als Coefficienten von den andern Factoren ab, so erhält man eine Potenzreihe der Argumente

$$\frac{|u_{r+1}|}{\gamma_1}, \frac{|u_{r+2}|}{\gamma_1}, \dots,$$

deren Coefficienten dem absoluten Betrage nach nicht grösser als Eins sind, und welche mit linearen Gliedern beginnt; der Werth derselben wird also, wenn

$$(22) \quad |u_\nu| < \varepsilon, \quad (\nu = r+1, r+2, \dots n)$$

mit ε zugleich unendlich klein. Die Ungleichung (21) ergibt bei dieser Voraussetzung, wenn M eine von x unabhängige Grösse bedeutet,

$$\frac{|R_0|}{u_{r+1}^2 + u_{r+2}^2 + \dots + u_n^2} < M,$$

wobei offenbar

$$\lim_{s=0} M = 0.$$

Andererseits hat man nach der Formel (19)

$$\frac{\psi_0(u_{r+1}, u_{r+2}, \dots u_n)}{u_{r+1}^2 + u_{r+2}^2 + \dots + u_n^2} > \gamma;$$

*) Weierstrass, Zur Theorie der Potenzreihen, Math. Werke Bd. I S. 68.

es gibt also eine solche positive Constante ε , dass die Grösse

$$\frac{\psi_0(u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n) + R_0}{u_{r+1}^2 + u_{r+2}^2 + \dots + u_n^2},$$

mithin auch ihr Zähler, d. h. die Grösse Φ für jeden dem Intervall von a bis b angehörigen Werth von x positiv ist, sobald die Relationen (22) gelten. Versteht man daher unter u_r stetige Functionen von x , welche in dem bezeichneten Intervall dem absoluten Betrage nach kleiner als ε sind, so ergibt sich

$$(23) \quad \int_a^b \Phi dx > 0.$$

Dieses Resultat kann noch von der Bedingung (18) befreit werden, wenn nur die Gleichungen (17) für das ganze Intervall (16) von einander unabhängig sind. Dann hat in ihm jede Determinante

$$(24) \quad \sum \pm b_{i_1 i_1} b_{i_2 i_2} \dots b_{i_r i_r}$$

nur eine endliche Anzahl von Nullstellen, da sie sich überall regulär verhält, und jedenfalls können nicht alle diese Ausdrücke identisch verschwinden. Man kann daher das Intervall von a bis b in eine endliche Anzahl derartiger Theile zerlegen, dass in jedem von ihnen mindestens eine der Determinanten (24) dem absoluten Betrage nach oberhalb einer positiven Constanten verbleibt. Für jedes Theilintervall liefert die durchgeführte Schlussreihe, in welcher nur $u_1, u_2, \dots, u_r$ durch r andere Grössen u_v ersetzt zu werden brauchen, die Ungleichung (23), welche damit für das ganze Intervall von a bis b bewiesen ist.

Berücksichtigt man endlich, dass offenbar den obigen entsprechende Entwicklungen für eine definit negative Form ψ gelten, so kann man die Ergebnisse dieses Paragraphen in folgendem Satze zusammenfassen.

Die Coefficienten der quadratischen Form $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ seien ebenso wie die Grössen $b_{q,r}$ in dem Intervall $a \leq x \leq b$ reguläre analytische Functionen von x ; für diese Werthe von x sei die Form ψ definit bei den Bedingungsgleichungen

$$\sum_{v=1}^n b_{q,v} x_v = 0, \quad (q = 1, 2, \dots, r)$$

und diese seien linear unabhängig. Sind dann R, R_q Potenzreihen der Argumente $u_1, u_2, \dots, u_n$, deren Coefficienten in dem Intervall von a bis b reguläre analytische Functionen von x sind, und beginnt R_q mit quadratischen, R mit cubischen Gliedern; sind ferner u_r in dem be-

zeichneten Intervall stetige Functionen von x , welche nicht sämmtlich identisch verschwinden und den Gleichungen

$$\sum_{v=1}^n b_v u_v + R_v = 0, \quad (v = 1, 2, \dots, r)$$

unterworfen sind; so giebt es eine positive Constante ε von der Beschaffenheit, dass die Grösse

$$\int_a^b dx (\psi(u_1, u_2, \dots, u_n) + R)$$

das Vorzeichen der Form ψ hat, sobald in dem Intervall von a bis b die Ungleichungen

$$|u_v| < \varepsilon$$

bestehen.

§ 4.

Neue Transformation der zweiten Variation.

Nothwendige Bedingungen dafür, dass das Integral

$$J = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

ein Extremum sei, wenn die Unbekannten den Bedingungsgleichungen

$$(25) \quad \varphi_v(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, r)$$

unterworfen und ihre Werthe für $x = a$ und $x = b$ gegeben sind, bestehen bekanntlich in den Differentialgleichungen

$$(26) \quad \frac{\partial F}{\partial y_v} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_v'} = 0,$$

in welchen

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_r \varphi_r$$

gesetzt ist; f und φ_v seien analytische Functionen ihrer Argumente. Ein bestimmtes System von Lösungen der Gleichungen (25) und (26) sei

$$y_v = \bar{y}_v, \quad \lambda_v = \bar{\lambda}_v;$$

und die Substitution derselben in irgend einen Ausdruck werde stets durch Ueberstreichen angezeigt. Die Functionen $\bar{y}_v, \bar{\lambda}_v$ seien in dem reellen Intervall

$$(27) \quad a \leq x \leq b,$$

die Functionen f und φ_v in der Umgebung jedes Werthsystems

$$(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{y}_1', \dots, \bar{y}_n')$$

regulär, wenn x dem bezeichneten Intervalle angehört.

Es seien nun δy , irgend welche nebst ihren Ableitungen $\delta y'_n$ stetige Functionen von x , die für $x = a$ und $x = b$ verschwinden, und den Gleichungen

$$(28) \quad \varphi_\rho(x, \bar{y}_1 + \delta y_1, \dots, \bar{y}_n + \delta y_n, \bar{y}'_1 + \delta y'_1, \dots, \bar{y}'_n + \delta y'_n) = 0 \\ (\rho = 1, 2, \dots, r)$$

genügen. Das Integral $\bar{J}$ ist dann ein Extremum, wenn die Grösse

$$\Delta = \int_a^b dx [f(x, \bar{y}_1 + \delta y_1, \dots, \bar{y}_n + \delta y_n, \bar{y}'_1 + \delta y'_1, \dots, \bar{y}'_n + \delta y'_n) \\ - f(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{y}'_1, \dots, \bar{y}'_n)]$$

ein festes Vorzeichen besitzt, so lange die absoluten Werthe der Variationen δy , $\delta y'_n$ unter einer gewissen Grenze liegen. In diesem Ausdruck kann man auf Grund der Gleichungen (25) und (28) das Functionszeichen f durch F ersetzen, und bei den eingeführten Voraussetzungen den Integranden nach Potenzen der Variationen entwickeln, wenn diese dem absoluten Betrage nach hinreichend klein sind; dabei verschwinden die Glieder erster Dimension nach (26) und es ergibt sich

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_a^b dx \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \delta y_\mu \delta y_\nu + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu \partial y'_\nu} \delta y_\mu \delta y'_\nu \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu} \delta y'_\mu \delta y'_\nu \right\} + \int_a^b R dx,$$

wenn man unter R eine Potenzreihe der Argumente δy , $\delta y'_n$ versteht, deren Coefficienten in dem Intervall (27) reguläre analytische Functionen von x sind, und welche die Variationen nur in mindestens dritter Dimension enthält. Sind ferner R_ρ Reihen von derselben Beschaffenheit, die aber auch quadratische Glieder enthalten können, so kann man die Gleichungen (28) in folgende Gestalt bringen

$$(28) \quad \sum_{\nu=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial y'_\nu} \delta y'_\nu \right) + R_\rho = 0,$$

und die Reihen R , R_ρ haben dieselben Eigenschaften wie die ebenso bezeichneten in § 3.

Eine weitere Umformung der Grösse Δ ergibt, wenn $\beta_{\mu\nu} = \beta_{\nu\mu}$, die Gleichung

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \beta_{\mu\nu} \delta y_\mu \delta y_\nu \cdot dx = 0,$$

welche, da die Grössen δy , an den Integrationsgrenzen verschwinden, sicher besteht, sobald die Grössen $\beta_{\mu\nu}$ irgend welche im Intervall von a bis b reguläre analytische Functionen von x sind. Subtrahirt man daher diesen Ausdruck von Δ und setzt, indem man unter μ, ν Zahlen der Reihe $1, 2, \dots n$ versteht

$$a_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu}, \quad a_{n+\mu, \nu} = a_{\nu, n+\mu} = \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y_\mu \partial y'_\nu} - \beta_{\mu\nu},$$

$$a_{n+\mu, n+\nu} = \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y_\mu \partial y_\nu} - \frac{d\beta_{\mu\nu}}{dx},$$

$$b_{\varrho\nu} = \frac{\partial \overline{\varphi}_\varrho}{\partial y'_\nu}, \quad b_{\varrho, n+\nu} = \frac{\partial \overline{\varphi}_\varrho}{\partial y_\nu},$$

$$\begin{aligned} \varphi(\delta y, \delta y') = & \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y_\mu \partial y_\nu} \delta y_\mu \delta y_\nu + 2 \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y_\mu \partial y'_\nu} \delta y_\mu \delta y'_\nu \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu} \delta y'_\mu \delta y'_\nu \right\} - \frac{d}{dx} \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \beta_{\mu\nu} \delta y_\mu \delta y_\nu, \end{aligned}$$

sodass die Form φ dasselbe Coefficientensystem erhält wie die ebenso bezeichnete in § 2, und die Indices $1, 2, \dots n$ den Argumenten $\delta y'_\nu$, die folgenden den Argumenten δy_ν entsprechen, so ergibt sich

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_a^b dx (\varphi(\delta y, \delta y') + 2R),$$

und die Gleichungen (28) werden geschrieben

$$(29) \quad \sum_{\nu=1}^n (b_{\varrho\nu} \delta y'_\nu + b_{\varrho, n+\nu} \delta y_\nu) + R_\varrho = 0.$$

Es sei nun, wenn x dem Intervall von a bis b angehört, stets mindestens eine aus dem System der Grössen $b_{\varrho\nu}$ gebildete Determinante r^{ter} Ordnung von Null verschieden. Dann haben die Gleichungen (28) die in § 3 von den Gleichungen (17) verlangten Eigenschaften; ersetzt man die Form ψ durch φ und die n Grössen u_ν durch die $2n$ Variationen $\delta y_\nu, \delta y'_\nu$, die wie erstere stetige Functionen von x sind, so lehrt der dort erhaltene Satz Folgendes. Gelingt es, die Grössen $\beta_{\mu\nu}$ in dem Intervall von a bis b als reguläre analytische Functionen von x so zu bestimmen, dass die Form $\varphi(z, z')$ in diesem Intervall überall definit ist bei den Bedingungsgleichungen

$$(30) \quad \sum_{\nu=1}^n (b_{\varrho\nu} z'_\nu + b_{\varrho, n+\nu} z_\nu) = 0,$$

so giebt es eine solche positive Constante ε , dass die Grösse Δ ein

festes Vorzeichen, und zwar das der Form φ hat, sobald die Gleichungen (28) bestehen und die Grössen $|\delta y_\nu|$, $|\delta y_\nu'|$ kleiner als ε sind.

Die Clebsch-Mayer'sche Theorie der zweiten Variation strebt nicht die bezeichnete Eigenschaft der Function φ herbeizuführen, sondern in ihr die Anzahl der Variablen zu vermindern; ist dies erreicht, so ist die Form φ sogar sicher nicht in dem angegebenen Sinne definit. Mayer*) setzt, indem er unter z_ν willkürliche Functionen versteht, folgende Gleichungen an

$$\varphi(z, z') = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} \omega_\mu \omega_\nu + \sum_{\varrho=1}^r \Psi_\varrho \sum_{\nu=1}^n (b_{\varrho\nu} z'_\nu + b_{\varrho, n+\nu} z_\nu),$$

$$\Psi_\varrho = \sum_{\nu=1}^n C_\nu^\varrho z_\nu, \quad \omega_\mu = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu^\mu z_\nu + z'_\mu, \quad \sum_{\nu=1}^n (b_{\varrho\nu} z'_\nu + b_{\varrho, n+\nu} z_\nu) = \sum_{\nu=1}^n b_{\varrho\nu} \omega_\nu,$$

aus denen sich, indem man nach z_ν und z'_ν partiell differenzirt, für $\tau = 1, 2, \dots, n$ ergibt

$$a_{n+\mu, n+\nu} = \sum_{\sigma=1}^n a_{n+\mu, \sigma} \alpha_\nu^\sigma + \sum_{\varrho=1}^r C_\nu^\varrho b_{\varrho, n+\mu},$$

$$a_{n+\nu, \tau} = \sum_{\sigma=1}^n a_{\sigma\tau} \alpha_\nu^\sigma + \sum_{\varrho=1}^r C_\nu^\varrho b_{\varrho\tau},$$

$$b_{\varrho_1, n+\nu} = \sum_{\sigma=1}^n b_{\varrho_1\sigma} \alpha_\nu^\sigma,$$

entsprechend den Gleichungen (21), (22), (23) bei Mayer. Hält man hier die Zahlen μ, ν fest und setzt successive $\tau = 1, 2, \dots, n$, $\varrho_1 = 1, 2, \dots, r$, so erhält man $n + r + 1$ Gleichungen, aus denen die Grössen $\alpha_\nu^1, \alpha_\nu^2, \dots, \alpha_\nu^n, C_\nu^1, C_\nu^2, \dots, C_\nu^r$ eliminirt werden können, und das Resultat der Elimination ist in unsrer Bezeichnung einfach

$$(31) \quad E_{n+\mu, n+\nu} = 0,$$

eine Gleichung, die auch bei Clebsch ausführlich geschrieben vorkommt**), und $\frac{1}{2} n(n+1)$ Differentialgleichungen mit ebenso vielen Unbekannten $\beta_{\mu\nu}$ repräsentirt. Haben diese Gleichungen ein System von Lösungen (S), welche sich in dem Intervall von a bis b einschliesslich

*) Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale (Leipzig 1866) S. 10.

**) Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten. Crelle's Journal Bd. LV S. 355.

der Grenzen regulär verhalten, so ist die Clebsch-Mayer'sche Transformation der zweiten Variation von J möglich; umgekehrt liefert diese Transformation stets, wenn die Grössen β im Integrationsintervall ein reguläres Verhalten zeigen, ein Integralsystem von der angegebenen Beschaffenheit.

Die Gleichungen (31) sind nun ein besonderer Fall des folgenden Systems

$$E_{n+\mu, n+\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}, \quad \frac{d\varepsilon_{\mu\nu}}{dx} = 0.$$

Da die ersten von diesen von den Ableitungen der Unbekannten nur $\frac{d\beta_{\mu\nu}}{dx}$ mit dem Factor $-D_n$ enthalten, so ergeben sich aus ihnen, wenn für das Intervall von a bis b die Ungleichung

$$(32) \quad D_n \geq 0$$

vorausgesetzt wird, für die Ableitungen der Unbekannten Ausdrücke durch x und die Unbekannten selbst, welche sich in der Umgebung einer Stelle $(x, \beta_{\mu\nu}, \varepsilon_{\mu\nu})$ regulär verhalten, sobald nur x dem Intervall von a bis b angehört. Daraus folgt, wie ich gezeigt habe*), dass jedes System von Integralen dieser Gleichungen, dessen Integrationsconstanten sich von denen eines bestimmten Systems (S) hinreichend wenig unterscheiden, sich in dem Intervall von a bis b regulär verhält, wenn dies von (S) gilt. Für (S) kann man nun, wenn die Clebsch-Mayer'sche Transformation möglich ist, die oben ebenso bezeichneten Lösungen der Gleichungen (31) nehmen, indem man die Werthe $\varepsilon_{\mu\nu} = 0$ hinzufügt; dann ergibt sich, dass die Gleichungen

$$(33) \quad E_{n+\mu, n+\nu} = \varepsilon_{\mu\nu},$$

wenn $\varepsilon_{\mu\nu}$ Constante von hinreichend kleinem absolutem Betrage sind, ein System von Lösungen besitzen, die sich im Intervall von a bis b regulär verhalten. Benutzt man dieses zur Bildung der Grössen α , so hat die Form φ die Eigenschaften, bei welchen der oben angegebene Zusammenhang zwischen ihren Vorzeichen und dem der Grösse Δ stattfindet, und es bleibt nur zu untersuchen, ob $\varphi(z, z')$ bei den Bedingungen (30) definit gemacht werden kann.

Hierzu kommt man durch angemessene Wahl der Grössen ε . Setzt man nämlich voraus, dass die Form

$$\psi = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} u_{\mu} u_{\nu} = \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2 F}{\partial y_{\mu}' \partial y_{\nu}'} u_{\mu} u_{\nu}$$

bei den Bedingungen

*) Zur Variationsrechnung, Bd. I dieser Annalen S. 31.

$$\sum_{v=1}^n b_{qv} u_v = \sum_{v=1}^n \frac{\partial \varphi_q}{\partial y_v'} u_v = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, r)$$

definit sei, womit auch die Ungleichung (32) gefordert wird, so kann man nach § 2 über die Grössen $\varepsilon_{\mu\nu}$ in jedem Falle so verfügen, dass die Form

$$\varphi = \sum_{\mu=1}^{2n} \sum_{v=1}^{2n} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$$

bei den Bedingungen

$$\sum_{v=1}^{2n} b_{qv} u_v = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, r)$$

definit ist, und dasselbe Vorzeichen wie ψ hat. Ist letzteres z. B. das positive, so braucht man nur, wenn $\mu \geq \nu$,

$$\varepsilon_{\mu\nu} = 0$$

zu setzen, die Grössen $\varepsilon_{\mu\mu}$ aber positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Daraus folgt nach dem oben bemerkten, dass die Grösse Δ bei allen in Betracht kommenden Variationen δy_v , welche ebenso wie ihre Ableitungen $\delta y_v'$ dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze ε liegen, ein festes Vorzeichen besitzt. In dem hierdurch bestimmten Sinne macht also die betrachtete Mannigfaltigkeit $(x, \bar{y}_v)$ das Integral J sicher zu einem Extremum, wenn die Clebsch-Mayer'sche Transformation in der Weise möglich ist, dass die Grössen $\beta_{\mu\nu}$ in dem ganzen Integrationsintervall reguläre analytische Functionen von x sind.

Der durchgeführte Beweis verhält sich zu der älteren Theorie der zweiten Variation ähnlich, wie die modificirte Darstellung, welche Lagrange in seiner Theorie der analytischen Functionen*) von der Legendre'schen Theorie der zweiten Variation giebt, zu der ursprünglichen Gestalt derselben. Legendre bringt nämlich die zweite Variation des Integrals

$$\int f(x, y, y') dx$$

in die Form

$$(34) \quad \int dx \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \delta y'^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - \beta \right) \delta y \delta y' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\beta}{dx} \right) \delta y^2 \right\}$$

und setzt

$$(35) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\beta}{dx} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - \beta \right)^2 = 0;$$

*) Oeuvres Bd. IX S. 204.

Lagrange dagegen bemerkt, dass die linke Seite dieser Gleichung nur positiv zu sein braucht, um das Vorzeichen der zweiten Variation unmittelbar kenntlich zu machen. Dann ist der Integrand in dem Ausdruck (34) nicht, wie bei Legendre, ein Quadrat, sondern eine definite Form von zwei Argumenten, und wenn man auf die rechte Seite der Gleichung (35) eine positive Constante setzt, erhält man den einfachsten Fall des Systems (33). Dass diese Bemerkung von Lagrange in den einfachsten Fällen zu einer strengen Ableitung hinreichender Bedingungen des Extremums führt, habe ich schon vor einiger Zeit bewiesen *).

§ 5.

Die hinreichenden Bedingungen des Extremums.

Um das in § 4 erhaltene Resultat in seine endgültige Form bringen zu können, müssen wir eine kurze Betrachtung über die allgemeine Auflösung der Differentialgleichungen des Problems $\delta J = 0$ d. h. der Gleichungen (25), (26) und die Abhängigkeit ihrer Integrale von den Integrationsconstanten einschalten.

Wir setzen $y'_r = p_r$, bezeichnen durch y ohne Index das System aller n Grössen y_r und geben den Buchstaben p, λ ohne Index die entsprechende Bedeutung. Die Functionen f und φ_ϱ seien regulär, wenn das Argumentsystem (x, y, p) einem gewissen Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört; schreibt man, was offenbar möglich ist, die Gleichungen (26) in der Form

$$(36) \quad \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_\mu \partial p_r} p'_r + \sum_{\varrho=1}^r \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial p_\mu} \lambda'_\varrho + F_\mu(x, y, p, \lambda) = 0,$$

wobei $\mu = 1, 2, \dots, n$ zu setzen ist, so sind F_μ lineare Functionen der Grössen λ , und die Coefficienten der letzteren im Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär. Dasselbe gilt von den Ausdrücken G_ϱ , wenn man die Gleichungen (25) differenziert und das Resultat in folgender Form schreibt:

$$(37) \quad \sum_{r=1}^n \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial p_r} p'_r + G_\varrho(x, y, p) = 0. \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r)$$

Versteht man unter D die Determinante der Coefficienten von p', λ' in den Gleichungen (36) und (37), so ist offenbar in der Bezeichnung des § 4

$$(38) \quad \overline{D} = D_n.$$

Nennen wir ferner $\mathfrak{G}_1$ das Gebiet der Werthsysteme (x, y, p, λ) , für

*) Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung Bd. VI, 1, S. 95; Referat eines auf der Naturforscherversammlung zu Braunschweig im September 1897 gehaltenen Vortrags.

welche D von Null verschieden, (x, y, p) aber eine Stelle des Gebiets $\mathfrak{G}$ ist, so sind im Gebiet $\mathfrak{G}_1$ die Gleichungen (36), (37) nach den Grössen p', λ' auflösbar, und man erhält

$$(39) \quad p'_\nu = H_\nu(x, y, p, \lambda), \quad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

$$(40) \quad \lambda'_\varrho = K_\varrho(x, y, p, \lambda), \quad (\varrho = 1, 2, \dots r)$$

wobei die rechten Seiten ebenfalls im Gebiet $\mathfrak{G}_1$ regulär sind.

Jetzt sei (0) eine Stelle dieses Gebiets, für welche alle Gleichungen (25), d. h. $\varphi_\varrho = 0$ bestehen; es giebt solche Stellen, wenn wir voraussetzen, dass D nicht bei allen diesen Gleichungen genügenden Werthsystemen (x, y, p) verschwindet. Es gelte ferner für (0) die Ungleichung

$$(41) \quad \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_r)}{\partial(p_1, p_2, \dots p_r)} \right| > 0;$$

dann können in der Umgebung dieser Stelle die Gleichungen (37) nach $p'_1, p'_2, \dots p'_r$ aufgelöst werden; man kann daher die ersten r Gleichungen (39) durch die Gleichungen (37) ersetzen, und das System der Gleichungen (36), (37) ist gleichbedeutend mit dem der Gleichungen (37), (40) und

$$(42) \quad p'_{r+\sigma} = H_{r+\sigma}(x, y, p, \lambda). \quad (\sigma = 1, 2, \dots n-r)$$

Man kann ferner bei der Annahme (41) die Gleichungen $\varphi_\varrho = 0$ nach $p_1, p_2, \dots p_r$ auflösen, und erhalte

$$(43) \quad p_\varrho = \pi_\varrho(x, y, p_{r+1}, p_{r+2}, \dots p_n);$$

hat man für die Stelle (0)

$$x = x_0, \quad y = Y^0, \quad p_\nu = P_\nu^0, \quad \lambda_\varrho = \Lambda_\varrho^0,$$

so sind die Functionen π_ϱ regulär in der Umgebung der Stelle

$$x = x_0, \quad y = Y^0, \quad p_{r+1} = P_{r+1}^0, \dots p_n = P_n^0,$$

und nehmen in dieser selbst die Werthe $\pi_\varrho = P_\varrho^0$ an. Ersteres gilt also auch, wenn die Differenzen $|\lambda_\varrho - \Lambda_\varrho^0|$ hinreichend klein sind, von den Ausdrücken M_ν und N_ϱ , in welche H_ν und K_ϱ durch die Substitution (43) übergehen, und die Gleichungen (37), (40), (42) können durch folgendes System ersetzt werden:

$$(44) \quad \begin{aligned} \frac{dy_\varrho}{dx} &= \pi_\varrho(x, y, p_{r+1}, \dots p_n), \\ \frac{d\lambda_\varrho}{dx} &= N_\varrho(x, y, p_{r+1}, \dots p_n, \lambda), \\ \frac{dp_{r+\sigma}}{dx} &= M_{r+\sigma}(x, y, p_{r+1}, \dots p_n, \lambda), \\ \frac{dy_{r+\sigma}}{dx} &= p_{r+\sigma}. \end{aligned}$$

$$(\varrho = 1, 2, \dots r, \quad \sigma = 1, 2, \dots n-r)$$

Hier treten nur die $2n$ Unbekannten $y, \lambda, p_{r+\sigma}$ und deren erste Ableitungen auf, und die Ausdrücke der letzteren sind regulär in der Umgebung der Stelle

$$x = x_0, y_v = Y_v^0, \lambda_\rho = \Lambda_\rho^0, p_{r+1} = P_{r+1}^0, \dots p_n = P_n^0.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen ausser der ersten mögen der Reihe nach durch $C_1, C_2, \dots C_{2n}$ bezeichnet werden; allgemein seien $c_1, c_2, \dots c_{2n}$ die Werthe der Unbekannten $y, \lambda, p_{r+\sigma}$ für $x = x_0$.

Für $c_v = C_v$ erhalte man nun die Integrale $Y_v, \Lambda_v, P_{r+\sigma}$, welche vom Punkte $x = x_0$ aus in der Ebene der complexen Zahlen x längs irgend einer Linie $\mathfrak{L}$ analytisch fortgesetzt seien; längs derselben sei immer D von Null verschieden, wenn man $y_v = Y_v, \lambda_\rho = \Lambda_\rho$ einsetzt. Soweit sich bei dieser Fortsetzung Werthsysteme (x, y, p, λ) ergeben, welche dem Gebiet $\mathfrak{G}_1$ angehören und der Ungleichung (41) genügen, sind die rechten Seiten der Gleichungen (44) regulär; es sei dies etwa der Fall bis zum Werth $x = x_1$ einschliesslich. Dann können längs dieser Strecke der Linie $\mathfrak{L}$ nach dem schon in § 4 citirten Satze auch alle Integralsysteme, für welche die Grössen $|c_v - C_v|$ eine gewisse Grenze nicht übersteigen, analytisch fortgesetzt werden, und die Werthe der $2n$ Grössen $y_v, \lambda_\rho, p_{r+\sigma}$ an einer bestimmten dieser Strecke angehörigen Stelle x_2 sind*) Functionen der Anfangswerthe c_v , die sich in der Umgebung der Stelle $c_v = C_v$ regulär verhalten. Da nun, wenn allgemein die Substitution $x = x_v$ durch den oberen Index v angedeutet wird, die Grössen $y, \lambda, p_{r+\sigma}$ als Potenzreihen der Argumente

$$x - x_2, y^{(2)} - Y^{(2)}, \lambda^{(2)} - \Lambda^{(2)}, p_{r+\sigma}^{(2)} - P_{r+\sigma}^{(2)}$$

dargestellt werden können, so sind sie als Functionen der Argumente x, c_v in der Umgebung der Stelle x_2, C_v regulär, und dasselbe gilt, da sie in dieser selbst die Werthe $Y^{(2)}, \Lambda^{(2)}, P_{r+\sigma}^{(2)}$ annehmen, nach den ersten Gleichungen (44) von $p_1, p_2, \dots p_r$. Speciell sind die Grössen $y^{(1)}, \lambda^{(1)}, p^{(1)}$ in der Umgebung der Stelle $c_v = C_v$ reguläre Functionen der Argumente c_v , und nehmen in dieser Stelle die Werthe $Y^{(1)}, \Lambda^{(1)}, P^{(1)}$ an.

Weiter gelte, wenn $i_1, i_2, \dots i_n$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, n$ ist, und $y = Y$ gesetzt wird, die Ungleichung

$$(45) \quad \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_r)}{\partial(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots p_{i_r})} \right| > 0$$

für $x = x_1$ und längs der Linie $\mathfrak{L}$ bis zum Punkte x_3 einschliesslich. Dann kann man auf dieses Stück die soeben durchgeführte Betrachtung übertragen, indem man $p_1, p_2, \dots p_r$ durch $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots p_{i_r}$ ersetzt; liegt also x_4 auf $\mathfrak{L}$ zwischen x_1 und x_3 , so sind die Grössen y, λ, p in der Umgebung der Stelle

$$x_4, Y^{(1)}, \Lambda^{(1)}, P_{i_r+1}^{(1)}, \dots P_{i_n}^{(1)}$$

*) Bd. I dieser Annalen S. 32.

reguläre Functionen von $x, y^{(1)}, \lambda^{(1)}, p_{i_{r+1}}^{(1)}, \dots, p_{i_n}^{(1)}$, also nach dem Obigen auch reguläre Functionen der Argumente x, c_r in der Umgebung der Stelle x_1, C_r .

Um ähnliche Eigenschaften über den Punkt x_3 hinaus nachzuweisen, braucht man nur zu bedenken, dass jede Functionaldeterminante der Functionen φ_q nach r Argumenten p , wenn man $y = Y$ substituirt, eine längs der Linie $\mathfrak{L}$ reguläre Function von x ist, also nur eine endliche Anzahl von Nullstellen auf dieser Linie besitzt. Wenn also die bezeichneten Determinanten in keinem Punkte der Linie $\mathfrak{L}$ sämmtlich zugleich verschwinden, so kann man diese in eine endliche Anzahl solcher Stücke theilen, dass in jedem von ihnen eine bestimmte Ungleichung (45) gilt, und je zwei aufeinanderfolgende in derselben Beziehung stehen wie die Strecken von x_0 bis x_1 und von x_1 bis x_2 . Die für letztere abgeleiteten Eigenschaften der Functionen y, λ bleiben daher für die ganze Linie $\mathfrak{L}$ erhalten. Dabei ist offenbar die für $x = x_0$ vorausgesetzte Ungleichung (41) nur eine unwesentliche, durch Abänderung der Bezeichnung aufzuhebende Specialisirung.

In diesen Entwicklungen kann man speciell das Integralsystem Y, Λ durch die in § 4 definirten Functionen $\bar{y}, \bar{\lambda}$, und die Linie $\mathfrak{L}$ durch das reelle Intervall von a bis b ersetzen. Denn wird x auf dieses beschränkt, so ist nach den dort getroffenen Festsetzungen $(x, \bar{y}, \bar{p})$ eine Stelle des Gebiets $\mathfrak{G}$, $(x, \bar{y}, \bar{p}, \bar{\lambda})$ nach (38) und (32) eine Stelle des Gebiets $\mathfrak{G}_1$; *unter den in § 4 eingeführten Voraussetzungen ist also die Mannigfaltigkeit $(x, \bar{y}, \bar{\lambda})$ ein Individuum einer von $2n$ Constanten c_r abhängenden Schaar*. Erhält man jene Mannigfaltigkeit, indem man $c_r = C_r$ setzt, so sind die allgemeineren Lösungen y, λ für hinreichend kleine Werthe der Differenzen $|c_r - C_r|$ längs der reellen Strecke von a bis b reguläre Functionen von $x, c_1, \dots, c_{2n}$. *Speciell also sind die Grössen*

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial c_\mu}, \quad \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial c_\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$$

in dem ganzen Intervall von a bis b reguläre analytische Functionen von x .

Hiermit stellen wir ein Hauptresultat der älteren Theorie der zweiten Variation zusammen*), dessen Ableitung von Extremumsbetrachtungen unabhängig und rein formaler Natur ist. Gewisse Integrale der für die Grössen β_μ , aufgestellten Differentialgleichungen (31) sind als Brüche darstellbar, deren Zähler ganze rationale Functionen der Grössen

*) Mayer, Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale, Crelle's Journal Bd. LXIX S. 247. 259.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu \partial p_r}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_\mu \partial p_r}, \quad \frac{\partial y_r}{\partial c_\mu}, \quad \frac{\partial \lambda_\rho}{\partial c_\mu}, \quad \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial p_r}$$

und ihrer Ableitungen mit constanten Coefficienten sind, und deren Nenner $\Delta(x, b_1)$ ist, wenn allgemein

$$\Delta(x, x_1) = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1^1, y_2^1, \dots, y_n^1)}{\partial(c_1, c_2, \dots, c_{2n})}$$

gesetzt wird, der obere Index 1 wie vorher die Substitution $x = x_1$ bedeutet, und $b_1 - b$ eine beliebig kleine positive Grösse ist. Der Zähler ist daher nach dem, was theils vorausgesetzt, theils bewiesen worden ist, eine analytische Function von x , die sich im Intervall von a bis b regulär verhält. Dasselbe gilt zunächst von $\Delta(x, x_1)$, wenn beide Argumente jenem Intervall angehören; da nun aber die Grössen y^1 auch in der Umgebung der Stelle $x_1 = b$, $c_r = C_r$ reguläre Functionen der Argumente x_1, c_r sind, so behalten sie diese Eigenschaft auch noch für gewisse Stellen, die aus der eben definirten durch Vergrößerung von b hervorgehen. Die Ableitungen $\frac{\partial y^1}{\partial c}$ sind daher auch für $x_1 = b_1$ endlich, die Grösse $\Delta(x, b_1)$ also, wenn $b_1 - b$ klein genug ist, für das ganze Intervall von a bis b regulär. Dasselbe gilt also von den erwähnten Ausdrücken β_μ , wenn die Grösse $\Delta(x, b_1)$ für das Integrationsintervall von Null verschieden ist. Dazu genügt es, wie Mayer a. a. O. gezeigt hat, anzunehmen, dass $\Delta(a, x)$ für $a < x \leq b$ niemals verschwinde. Erinnern wir uns nun des Hauptresultats in § 4, so kann das Ergebniss der ganzen Untersuchung in folgender Weise zusammengefasst werden.

Um das Integral

$$J = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

bei den Bedingungsgleichungen

$$(\mathfrak{A}) \quad \varphi_\rho(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, r)$$

zu einem Extremum zu machen, werde folgendes vorausgesetzt. 1) Setzt man

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_r \varphi_r,$$

so seien

$$\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_r$$

im Intervall von a bis b reguläre Functionen von x , welche den Gleichungen $(\mathfrak{A})$ und

$$(\mathfrak{B}) \quad \frac{\partial F}{\partial y_r} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_r'} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

genügen; die Substitution $y_\nu = \bar{y}_\nu$, $\lambda_\varrho = \bar{\lambda}_\varrho$ werde allgemein durch Ueberstreichen angedeutet. 2) Die Functionen f und φ_ϱ seien analytisch und, wenn $a \leq x \leq b$, in der Umgebung der Stelle $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{y}'_1, \dots, \bar{y}'_n)$ regulär. An jeder dieser Stellen sei mindestens eine Functionaldeterminante der r Functionen φ_ϱ nach r Argumenten y' von Null verschieden. 3) Für eben diese Stellen habe die quadratische Form

$$\sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial y'_\mu \partial y'_\nu} u_\mu u_\nu$$

ein festes Vorzeichen bei den Bedingungsgleichungen

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y'_\nu} u_\nu = 0, \quad (\varrho = 1, 2, \dots, r)$$

und verschwinde unter diesen Bedingungen nur, wenn alle Argumente verschwinden. 4) Bezeichnet man die unter den Bedingungen 2), 3) in der allgemeinen Lösung der Gleichungen (A), (B) auftretenden $2n$ Integrationsconstanten durch $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$, und setzt für $x = a$ allgemein $y_\nu = y_\nu^0$, so sei die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial (y_1^0, \dots, y_n^0, y_1, \dots, y_n)}{\partial (c_1, \dots, c_{2n})}$$

für $a < x \leq b$ von Null verschieden.

Alsdann giebt es eine positive Constante ε von der Beschaffenheit, dass das Integral $\bar{J}$ einen Zuwachs von unveränderlichem Vorzeichen erhält, wenn man $\bar{y}_\nu$ durch $\bar{y}_\nu + \delta y_\nu$ ersetzt und annimmt, dass letztere Grössen für y_ν gesetzt den Gleichungen (A) genügen, dass ferner die Grössen δy_ν ebenso wie ihre Ableitungen $\delta y'_\nu$ stetige Functionen von x sind; dass endlich für $x = a$ und $x = b$ die Gleichungen $\delta y_\nu = 0$, in dem ganzen Integrationsintervall aber die Ungleichungen

$$|\delta y_\nu| < \varepsilon, \quad |\delta y'_\nu| < \varepsilon$$

bestehen.