**12. Ueber das Auflösungsvermögen von
Fernrohren und Spectroskopen für Linien von
endlicher Breite; von F. L. O. Wadsworth.**

Die Frage nach dem theoretischen Auflösungsvermögen optischer Instrumente ist schon mehrfach behandelt, am vollständigsten von Rayleigh¹⁾, welcher zeigte, dass theoretisch das Winkelauflösungsvermögen jedes Instrumentes mit einer Oeffnung von der Breite b ist:

$$\alpha = k \frac{\lambda}{b},$$

wo α den Winkel zwischen zwei feinen Linien oder Punkten (z. B. zwei Sternen) bedeutet, welche gerade getrennt werden, λ die mittlere Wellenlänge des Lichtes, b die lineare Oeffnung des Instrumentes, k endlich eine Constante ist, deren Werth zwischen 1 (für rechteckige Oeffnung) und 1,1 (für kreisförmige Oeffnung) liegt. Durch diesen Ausdruck kann man ohne weiteres die spectrale Auflösung oder Zerlegung durch ein Spectroskop erhalten, wenn man bedenkt, dass die Aufgabe des dispersgirenden Theiles, mag er aus Prismen oder aus einem durchsichtigen oder reflectirenden Gitter bestehen, nur die ist, eine Reihe spectraler Bilder derselben Lichtquelle, des Spectroskopspaltes, zu liefern. Von diesen Bildern können nur die aufgelöst oder getrennt werden, für welche die Differenz der Winkeldispersion ebenso gross oder grösser ist, als die Winkelauflösung α der Oeffnung des Spectroskops. In dem Falle, wo es sich um Spectralbilder des Spaltes handelt, ist dies Auflösungsvermögen immer kleiner als der theoretische Werth für ∞ dünne Linien 1. wegen der endlichen Winkelbreite des Spaltes, 2. wegen der Dispersion durch den dispersgirenden Körper, welche für nicht monochromatisches Licht dieselbe Wirkung hervorbringt, wie eine Verbreiterung des Spaltes.

Wir wollen theoretisch folgende vier Fälle unterscheiden:

1) Rayleigh, Phil Mag. p. 5. 1875; p. 261. Oct. 1879; Aug. 1880; Encycl. Brit.: Art. Optics 17 und Wave Theory 24.

1. Das (theoretische) Auflösungsvermögen eines dispergirenden Körpers für ∞ engen Spalt und monochromatische Strahlung, d. h. für ∞ dünne Spectrallinien. Diese Grösse wird gewöhnlich mit r bezeichnet.

2. Das (ebenfalls theoretische) Auflösungsvermögen für breiten Spalt und monochromatische Strahlung, welches gewöhnlich „Reinheit“ des Spectrums genannt und mit p bezeichnet wird.

3. Den Grenzfall des Auflösungsvermögens für ∞ engen Spalt, aber Linien von der endlichen Breite $\Delta\lambda$. Es werde mit R bezeichnet.

4. Das (wirkliche) Auflösungsvermögen für breiten Spalt und nicht monochromatische Strahlung, welche für jede Linie das kleine Gebiet $\Delta\lambda$ umfasst, wie bei 3. Diese Grösse stellt das wirkliche Auflösungsvermögen oder die Reinheit des Spectrums dar und heisse P .

Sei $D = d\vartheta/d\lambda$ die Winkeldispersion des dispergirenden Körpers. Die spectrale Auflösung ist stets gegeben durch $\lambda/d\lambda$, wo $d\lambda$ die Differenz der Wellenlängen zweier Linien mit der mittleren Wellenlänge λ bedeutet, welche gerade getrennt werden. Daher haben wir für den ersten Fall

$$(1) \quad \frac{d\vartheta}{d\lambda} (d\lambda)_1 = \alpha = k \frac{\lambda}{b} \quad \text{oder} \quad r = \frac{\lambda}{(d\lambda)_1} = \frac{D b}{m}.$$

Diese Gleichung gilt vollkommen allgemein, wie auch immer die Natur, Form und Einrichtung des dispergirenden Körpers beschaffen sein mag. Indem wir den Werth von

$$D = \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{d\vartheta}{dr} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

einsetzen, erhalten wir sofort die bekannten Ausdrücke:

$$(2) \quad r = 2 N b \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = (t_1 - t_2) \frac{dn}{d\lambda}$$

für N Prismen mit dem brechenden Winkel φ , durch welche die Strahlen im Minimum der Ablenkung gehen, und

$$(3) \quad r = \frac{m n}{b'' \cos \vartheta} \cdot b = m n$$

für ein Gitter von n Furchen.

Im Falle eines Gitters kann der Ausdruck in eine Form gebracht werden, welche eine in der Gittertheorie gewöhnlich nicht ausgesprochene Thatsache zeigt, nämlich, dass für eine bestimmte Stellung des Gitters das Auflösungsvermögen unabhängig ist von der Zahl n der Furchen, und wie bei jedem optischen Instrument nur von der linearen Oeffnung bedingt ist. Dieses Resultat ergibt sich leicht aus der Grundgleichung des Beugungsgitters: $m\lambda = s(\sin i + \sin \vartheta)$, indem man beide Seiten mit n multiplicirt:

$$(4) \quad mn\lambda = ns(\sin i + \sin \vartheta).$$

Da nun $mn = r$ und $ns = b$, die lineare Oeffnung des Gitters, so folgt:

$$(5) \quad r = \frac{b}{\lambda} (\sin i + \sin \vartheta),$$

welcher Ausdruck unabhängig von n , abhängig nur von b und von der Stellung des Gitters ist.

r erreicht seinen grössten Werth für $i = \vartheta = 90^\circ$. Dann ist: $r_{\max} = 2(b/\lambda)$, woraus hervorgeht, dass der Ausdruck für das Auflösungsvermögen eines Gitters dieselbe Form hat, wie für ein Mikroskop, Fernrohr oder Spiegel. Das Maximum des Auflösungsvermögens ist dasselbe — wenn auch in anderen Einheiten ausgedrückt — wie das eines Spiegels von derselben horizontalen Oeffnung.

Dieses theoretische Maximum kann aber praktisch nie erzielt werden, weil für grosse Werthe des Einfalls- und Beugungswinkels die Winkelöffnung des Gitters sehr klein wird, das Licht daher sehr schwach. Praktisch übersteigt der Einfallswinkel i nie 60° für den Beugungswinkel $\vartheta = 0$, oder 45 — 50° , wenn Einfalls- und Beugungswinkel gleich gross sind (Form von Littrow). Daher liegt praktisch das maximale Auflösungsvermögen, welches r_0 heisse, zwischen

$$r_0 = \frac{7}{8} \frac{b}{\lambda} \quad \text{und} \quad r_0 = \frac{3}{2} \frac{b}{\lambda}.$$

Nehmen wir die höhere Grenze, so finden wir, dass die Grenze des Auflösungsvermögens bei den besten und grössten existirenden Gittern (getheilte Fläche $5\frac{1}{2}$ engl. Zoll) für den mittleren Theil des Spectrums ($\lambda = 5500$ A. E.) etwa 375 000 Einheiten beträgt, was gerade genügt, um eine Doppellinie

„aufzulösen“, deren Componenten 0,016 A. E. getrennt sind. Die ältere Anschauung, dass grösseres Auflösungsvermögen zwecklos sei wegen Discontinuitäten im Zuge der Lichtwellen, hat sich als falsch erwiesen. Michelson's neuere Arbeiten haben gezeigt, dass einige Spectrallinien, welche in den stärksten bisher gebauten Spectroskopen als einfach erscheinen, in Wahrheit sehr zusammengesetzt sind, da sie aus 3, 4 oder noch mehr Componenten bestehen, deren Abstand in manchen Fällen wahrscheinlich nicht mehr als 0,006 A. E. beträgt. Um sie durch Gitter aufzulösen, brauchten wir daher Instrumente, die wenigstens die dreifache Oeffnung der jetzt vorhandenen besitzen. Wenn für spectralanalytische Zwecke das Interferometer allgemein anwendbar wäre, so läge keine Veranlassung vor zum Versuche seine Leistungen mit Gittern zu erreichen; aber leider ist er nur für die stärkeren hellen Linien des Spectrums brauchbar. Zum genaueren Studium von schwachen Linien und von Absorptionslinien scheinen Gitter von grösserem Auflösungsvermögen, als sie bisher gebaut wurden, die erste Bedingung.

Es sind dazu sehr grosse mechanische Schwierigkeiten zu überwinden; dabei scheint die Hauptschwierigkeit nicht in der Herstellung einer genügend genauen Schraube zu liegen, da wir nach Rowland's Methode eine Schraube von der nöthigen Länge schneiden können, bei welcher die Fehler in der Ganghöhe, Periodicität etc. geringer sind, als die unvermeidlichen Fehler durch Excentricität der Montirung und des getheilten Kopfes¹⁾, sondern sie liegt in der ungleichen Abnutzung der Schienen, auf welchen der den Theildiamant tragende Wagen gleitet, und in der Nothwendigkeit genügend constante Temperatur während des Theilens zu erhalten.

Wie gross diese Schwierigkeiten sind, kann man besser übersehen, wenn man bedenkt, dass die Theilmaschine fast zwei Wochen laufen musste, um ein Gitter von 15 Zoll engl. (20 000 Linien pro Zoll) zu theilen, da ein 6 zölliges Gitter fünf Tage und Nächte beansprucht; dass eine Verschiebung der Linien um einen $\frac{1}{500\,000}$ Zoll an irgend einer Stelle die Schärfe und das Auflösungsvermögen eines solchen Gitters in

1) Vgl. Rowland's Artikel über die Schraube. Enc. Brit. 21.

den Spectren aller höheren Ordnungen stark schädigen würde, und dass eine solche Verschiebung durch geringe Verschiedenheit der Abnutzung, sogar durch eine kleine Aenderung in der Dicke der Oelschicht auf den Schienen, oder durch eine unsymmetrische Aenderung der Temperatur des Gitters, oder der Theilmaschine um weniger als $\frac{1}{5}^{\circ}$ C. hervorgebracht wird. Aber solche breite Gitter würden so werthvoll sein, da sie das genauere Studium des Charakters zusammengesetzter Linien und eine genauere Bestimmung ihrer Wellenlängen unter verschiedenen Bedingungen gestatten, dass jede Aufwendung von Geld und Zeit gerechtfertigt erscheint, um ihre Herstellung zu ermöglichen.¹⁾

Es ist der Erwähnung werth, dass die oben bewiesene Unabhängigkeit des Auflösungsvermögens von der Feinheit der Theilung es gestattet, die Zeit und die Schwierigkeit, welche in der Herstellung breiter Gitter liegt, wesentlich zu vermindern, indem man das Gitterintervall vergrössert, falls man nur durch Versuche Theilspitzen findet, die genügend helle Spectren höherer Ordnung erzeugen. Es werden oft zwei Einwände gegen Theilungen mit grossem Intervall gemacht: Das wachsende Uebereinanderfallen der Spectren höherer Ordnung und, dass wachsende Genauigkeit der Theilung nöthig ist. Ich habe kürzlich gezeigt, wie der erste Einwand durch eine sehr einfache und wirksame optische Vorrichtung vor dem Spectralspalt überwunden werden kann.²⁾ Der zweite Einwand aber ist in Wahrheit nicht so berechtigt, wie er erscheint. Rayleigh hat gezeigt, dass für jedes Gitter der erlaubte Fehler des Intervalls $\frac{1}{4}s$ für die erste Ordnung, $\frac{1}{8}s$ für die zweite, $\frac{1}{12}s$ für die dritte, oder allgemein $s/4m$ beträgt. Für gegebenes Auflösungsvermögen, d. h. für gegebene Oeffnung und Lage des Gitters folgt aus (4): $m/s = \text{const.}$, oder für zwei Gitter von gleicher Oeffnung, verschiedenem Intervall: $m/s = m_1/s_1$.

1) Der Verf. hat kürzlich die Zeichnungen zu einer grossen Theilmaschine vollendet, zu deren Construction ein Freund der Wissenschaft in Chicago das Geld geschenkt hat. Ihre Ausführung in der Werkstatt des Yerkes Observatorium hat begonnen und es wird alles geschehen, um den Erfolg zu sichern.

2) Wadsworth, *Astrophys. Journ.* 3. p. 169. 1896.

Die absolute Grenze des Theilfehlers ist also die gleiche für feine und weite Theilung.

Wenn z. B. der absolute Fehler des Intervalls bei einer Theilmaschine 0,00001 Zoll wäre, so würde man gleich gute Definition erhalten, wenn man das Gitter mit 20 000 Linien pro Zoll theilt und die erste Ordnung benutzt, als wenn man 4000 Linien pro Zoll zieht und die fünfte Ordnung benutzt. Aber das letzte Gitter würde nur $\frac{1}{5}$ der Zeit zum Theilen verlangen und daher im allgemeinen nur $\frac{1}{5}$ so schwer zu machen sein, als das erste. Die relative Helligkeit der Spectren der beiden Gitter würde, wie schon bemerkt, ausschliesslich von der Wahl der Diamantspitzen abhängen, mit denen sie getheilt werden.

Zweiter Fall. Wir wollen nun das Auflösungsvermögen eines Spectroskops für breiten Spalt, Breite s , und monochromatische Strahlung betrachten. Die gewöhnlich gegebene Formel dafür ist¹⁾

$$(6) \quad \rho = \frac{\lambda}{s \psi + \lambda} r.$$

Sie beruht auf der Annahme, dass für deutliche Trennung breiter Linien die Winkeldistanz benachbarter Ränder der Linien gleich sein müsse dem Auflösungsvermögen der Oeffnung, durch welche sie betrachtet werden. Nach dieser Annahme müsste die Winkeldistanz zwischen den Mitten zweier Linien von der Breite s , welche gerade getrennt werden, sein:

$$(7) \quad \frac{1}{f'} \left(s \frac{f'}{f} + m \frac{\lambda}{b} f'' \right) = \frac{1}{b} (s \psi + m \lambda),$$

wo ψ die Winkelgrösse der Oeffnung b , gesehen von der Linie s aus, bedeutet, f den Abstand der Linie von der Linse und f'' die Brennweite des Beobachtungsfernrohrs. Aber ich habe kürzlich gefunden, dass man theoretisch und experimentell zeigen kann, dass diese Annahme unrichtig ist, und dass das Auflösungsvermögen eines Instrumentes für breite Linien erheblich grösser ist, als obige Formel angiebt. Da dieser Umstand bisher offenbar der Beachtung entgangen ist, soll er etwas ausführlicher behandelt werden.

1) Schuster, Artikel Spectroscopy, Enc. Brit. 22.

Man erhält das Beugungsbild einer Linie von der Breite s oder der Winkelbreite $\sigma = s/f'$, indem man die Wirkung jedes linearen Elementes über die ganze Breite der Linie summirt. Im Falle einer rechteckigen Oeffnung ist das Beugungsbild jedes linearen Elementes gegeben durch die bekannte Gleichung

$$(8) \quad J = C \frac{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha} \varphi}{\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right)^2},$$

wo φ die Winkeldistanz von der Mitte des Beugungsbildes ist. Die Intensität, welche an irgend einem Punkte γ durch die Wirkung aller Elemente einer Linie von gleichförmiger Helligkeit hervorgebracht wird, ist daher

$$(9) \quad J' = c \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha} (\gamma - \varphi)}{\left[\frac{\pi}{\alpha} (\gamma - \varphi)\right]^2} d\varphi,$$

$$(10) \quad \begin{aligned} &= c' \int_{\frac{\pi}{\alpha} (\gamma - \frac{\sigma}{2})}^{\frac{\pi}{\alpha} (\gamma + \frac{\sigma}{2})} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = f(\gamma, \sigma). \end{aligned}$$

Der Werth des bestimmten Integrals (10) kann nicht direct in γ und σ ausgedrückt werden, aber er lässt sich durch mechanische Quadratur leicht ermitteln für verschiedene Werthe dieser Variablen. Für $\sigma = \alpha$, welches etwa der kleinste praktisch je benutzte Werth ist, sind die Werthe von $J' = f(\gamma)$ in Tabelle I gegeben. Zur Vergleichung sind die Werthe von J nach (8) beigelegt.

Tabelle I.

γ	J'	J	γ	J'	J
0,0	1,00	1,00	0,8	0,24	0,055
0,2	0,92	0,87	1,0	0,11	0,000
0,4	0,71	0,57	1,2	0,044	0,024
0,6	0,45	0,25	1,5	0,030	0,045

Die Beugungscurve $J' = f(\gamma)$ ist nach diesen Werthen in Fig. 1 gezeichnet. Sie fällt nicht gleichmässig ab, sondern

besitzt eine Reihe von Maxima und Minima, deren Lage durch die allgemeine Gleichung gegeben ist:¹⁾

$$\gamma \operatorname{tg} \frac{\pi \gamma}{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi \sigma}{2 \alpha} \quad \text{für} \quad 2m < \frac{\sigma}{\alpha} < 2m + 1$$

und

$$\frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \frac{\pi \gamma}{\alpha} = \frac{2}{\sigma} \operatorname{tg} \frac{\pi \sigma}{2 \alpha} \quad \text{für} \quad 2m - 1 < \frac{\sigma}{\alpha} < 2m.$$

Im Falle $\sigma = \alpha$ haben wir daher: $\operatorname{tg} \pi \gamma / \alpha = \infty$, oder $\gamma = 1,5\alpha$, $2,5\alpha$, $3,5\alpha$ etc., d. h. die Minima liegen an Stellen, die um $\alpha/2$ weiter von der Mitte entfernt sind, als wenn die Lichtquelle eine ∞ dünne Linie ist.²⁾

In derselben Weise wurde das Integral (10) für verschiedene kleinere und grössere Werthe von σ bis zu $\sigma = 3\alpha$ ermittelt. Die Beugungsbilder zweier Lichtquellen von der Breite $\sigma = \alpha$ und $\sigma = 3\alpha$ sind in Fig. 2 mit punktirter Linie dargestellt.

DamiteineDoppel-
linie aufgelöst werde,
muss die Intensität in
der Mitte des Beu-
gungsbildes der Doppel-
buelle (ausgezogene Li-
nien in Fig. 2) etwa 0,8
von der der Maxima sein, die den Mitten der beiden Bilder

Fig. 1.

1) Dieser Theil der Aufgabe, die Lage der Minima in dem Beugungsbilde eines Spaltes oder einer kreisförmigen Oeffnung von endlicher Breite zu finden, wurde von dem Verf. auf Veranlassung von Prof. Michelson vor etwa sechs Jahren bearbeitet, als er Student an der Clark-Universität war. Die Resultate sind veröffentlicht in Prof. Michelson's Abhandlung Phil. Mag. p. 1, Juli 1890, vgl. p. 14—17.

2) Da die Lage der Minima in diesem Falle sowohl von der Winkelgrösse der Lichtquelle, als auch von der Oeffnung des Fernrohrs abhängt, so folgt, dass man durch Bedeckung des Objectivs mit einer Oeffnung von bekannter Grösse und Messung der Lage der Minima mit einem Mikrometer den Werth von σ mittels obiger Gleichung bestimmen kann. Versuche mit zahlreichen Spalten von verschiedener Breite und Oeffnungen von verschiedenem Durchmesser (für welche die Lage der Minima etwas variiert) zeigten, dass wenn die Lichtquelle genügend hell war, um

entsprechen. Dazu muss der Abstand zwischen den Mitten in den drei Fällen $\sigma = \alpha$, $\sigma = 2\alpha$, $\sigma = 3\alpha$ sein

für $\sigma = \alpha$: Winkelabstand zwischen den Mitten = $1,27 \alpha = \sigma + 0,27 \alpha$
 für $\sigma = 2\alpha$: " " " " " = $2,21 \alpha = \sigma + 0,21 \alpha$
 für $\sigma = 3\alpha$: " " " " " = $3,20 \alpha = \sigma + 0,20 \alpha$
 allgemein: " " " " " $\Sigma = \sigma + \delta$.

Fig. 2.

Aus diesen und dazwischen liegenden Werthen wurde die Curve Fig. 3 construiert, welche den Zusammenhang darstellt zwischen der Winkelbreite der Linien und der Winkeldistanz δ zwischen benachbarten Rändern, welche für deutliche Trennung nöthig ist.

Fig. 3.

Um diese Resultate experimentell zu prüfen, wurde ein dünner geschwärzter Draht in der Mitte eines Spaltes mit symmetrisch beweglichen Schneiden befestigt, sodass zwei parallele

Spalte entstanden, deren Breite durch Oeffnung des Spaltes

deutliche Minima zu geben, eine einzelne Beobachtung Resultate von wenigstens der fünffachen Genauigkeit gab, als directe mikrometrische Messung des Bildes bei voller Oeffnung des Fernrohrs. Diese Methode ist aber erheblich weniger genau, als Prof. Michelson's Refractometer-Methode, welche im ersten Theil der erwähnten Abhandlung ausführlich beschrieben ist. Daher wurden die Beobachtungen nicht ausführlich mitgetheilt.

gleichzeitig geändert werden könnte, während der Abstand benachbarter Ränder (gleich dem Durchmesser des Drahtes) unverändert blieb. Beide Spalte wurden gleichförmig mit Sonnenlicht beleuchtet, welches durch einen Schirm von weissem Papier ging, und mit einem Fernrohr betrachtet, über dessen Objectiv eine rechteckige Oeffnung von der Breite b gedeckt war.

Der Spalt wurde auf verschiedene gemessene Breiten eingestellt und die Entfernung des Fernrohrs von ihm verändert, bis die beiden Hälften des Spaltes gerade getrennt erschienen. Wenn D die Entfernung des Fernrohrs vom Spalt bedeutet, $\varnothing$ den Durchmesser des Drahtes, S die ganze Breite des Spaltes, so ist offenbar

$$\frac{\sigma}{\alpha} = \frac{S - \varnothing}{2D} \frac{b}{\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\varnothing}{D} \frac{b}{\lambda}.$$

Zur Controlle wurden auch einige Messungen gemacht, bei denen das Fernrohr in einer bestimmten Entfernung vom Spalt blieb und die Oeffnung b geändert wurde, bis gerade beide Spalte getrennt waren. Die Wirkung veränderter Helligkeit der Spalte durch Zufügung weiterer Schirme oder völlige Entfernung derselben wurde ebenfalls untersucht, auch die Wirkung verschiedener Vergrößerungszahl des Fernrohrs. Aber solange die Bilder hell genug waren, um deutlich zu erscheinen, war keine Wirkung dieser Veränderungen sichtbar. Folgende Tabelle enthält die Resultate.

Tabelle II.

S	D	$\varnothing$	b	σ / α	δ / α	
1,97	12760	0,045	20,5	2,8	0,13	Sonnenlicht, gedämpft
1,46	12760	0,045	20,5	2,1	0,13	„ „
0,97	12760	0,045	20,5	1,35	0,13	„ „
0,60	9900	0,045	20,5	1,04	0,17	„ „
0,36	6700	0,045	20,5	0,84	0,25	„ gedämpft u. frei
0,167	4210	0,045	20,5	0,55	0,40	„ stark zitternd
0,150	3280	0,045	20,5	0,58	0,51	„ frei, wolkig
0,100	2770	0,045	20,5	0,37	0,60	„ „ „
0,075	2370	0,045	20,5	0,23	0,70	„ „ „
0,250	11000	0,20	26,6	0,11	0,86	Bogenlicht, gedämpft
	11000	0,20	17,0	0,42	0,56	„ „

Diese Resultate sind in Fig. 3 mit Kreuzen eingezeichnet. Die Uebereinstimmung mit der theoretischen Curve ist im

ersten Theile sehr gut, aber jenseits des Punktes $\sigma = \alpha$ sind die experimentellen Werthe erheblich kleiner als die theoretischen. Diese beruhen aber auf der Annahme, dass zur Erzielung der Trennung die Intensitätsdifferenz zwischen der Mitte und den Rändern des Beugungsbildes eines Doppelspaltes wenigstens 20 Proc. betragen müsse. Der Versuch zeigt, dass wenn die Linien hell sind, eine Intensitätsabnahme in der Mitte von bedeutend geringerem Betrage sichtbar ist. Und das müssen wir in der That erwarten, da es bekannt ist, dass auf hellem Hintergrunde (z. B. auf der Fläche eines Planeten) schwache Zeichen sichtbar sind, deren Intensität nur 2—5 Proc. geringer ist, als die des Hintergrundes. Wir gehen daher jedenfalls ganz sicher, wenn wir uns an die theoretische Curve halten. Der Werth von Σ , der Winkelauflösung des Fernrohrs für breite Linien, ist übrigens praktisch der gleiche, welche Curve wir auch nehmen, da für die Werthe von σ , wo die Curven beginnen, einigermassen verschiedenen Verlauf zu zeigen, der Werth von δ klein gegen σ selbst ist.¹⁾

Die theoretische Curve der Fig. 3 kann bis zum Punkte $\sigma = 3\alpha$ nahezu dargestellt werden durch eine Hyperbel von der Form:

$$11) \quad \frac{\sigma}{\alpha} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \frac{\delta}{\alpha}},$$

daraus erhalten wir:

$$(12) \quad \delta = \frac{\alpha^2}{2\sigma + \alpha},$$

da aber $\sigma = s/f$ und $\alpha = \lambda/b$ (für rechteckige Oeffnung, $k = 1$), so folgt:

$$(13) \quad \delta = \frac{1}{b} \frac{\lambda^2}{2s\psi + \lambda},$$

die Winkeldistanz zwischen zwei Linien von der Breite σ , welche gerade getrennt werden, ist daher:

$$(14) \quad \Sigma = \sigma + \delta = \frac{1}{b} \left(s\psi + \frac{\lambda}{2s\psi + \lambda} \lambda \right).$$

Die nähere Betrachtung dieser Gleichung ergibt das interessante Resultat, dass zur Auflösung einer Doppellinie eine kleinere

1) Für die Werthe $\sigma = 1,5\alpha$, wo die Differenz der Curven am grössten ist, differiren die beiden Werthe von Σ nur um 4 Proc. Für $\sigma = 3\alpha$ beträgt die Differenz in Σ nur etwa 2 Proc.

Oeffnung erforderlich ist, wenn die Linien eine kleine endliche Breite haben, als wenn sie ∞ dünn sind, denn wie leicht ersichtlich wird der Ausdruck für Σ ein Maximum, wenn

$$s\psi = \frac{\lambda}{2(1 + \sqrt{2})} \cong \frac{1}{5} \lambda \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{1}{5} \alpha.$$

Daher ist für eine Linie von der Winkelbreite $\sigma = \frac{1}{5} \alpha$:

$$\Sigma = 0,91 \frac{\lambda}{b} = 0,91 \alpha,$$

d. h. mit anderen Worten: das Auflösungsvermögen eines Fernrohrs von gegebener Oeffnung ist um 10 Proc. grösser für Linien von der Breite $\frac{1}{5} \alpha$, als für ∞ dünne Linien.

Um die Breite der Linien zu erhalten, für welche das Auflösungsvermögen des Instruments gleich dem theoretischen Werthe ist, setzen wir:

$$s\psi + \frac{\lambda^2}{2s\psi + \lambda} = \lambda,$$

woraus folgt:

$$s\psi = 0 \quad \text{oder} \quad s\psi = \frac{1}{2} \lambda;$$

es ist also gerade so leicht, die Componenten einer Doppelinie zu trennen, wenn ihre Breite gleich der halben Winkelauflösung des Fernrohrs ist, als wenn ihre Breite gleich 0 ist. Diese Zunahme des Auflösungsvermögens mit zunehmender Breite ist dieselbe Wirkung, welche man durch Abblenden der mittleren Theile eines Fernrohrobjectives erhält, d. h. dadurch, dass man die Mitte des Beugungsbildes im Vergleich zu den Rändern verstärkt.

Für die spectrale Auflösung haben wir, ebenso wie beim ersten Fall:

$$(15) \quad \frac{d\vartheta}{d\lambda} (d\lambda)_2 = \Sigma = \frac{1}{b} \left(s\psi + \frac{\lambda}{2s\psi + \lambda} \lambda \right),$$

oder

$$(16) \quad \frac{\lambda}{(d\lambda)^2} = p = \frac{\lambda}{s\psi + \frac{\lambda}{2s\psi + \lambda} \lambda} \cdot r.$$

Von der gewöhnlichen Gleichung für die Reinheit eines Spectrums unterscheidet sich dieser Ausdruck nur durch die Anwesenheit des Factors $\lambda/2s\psi + \lambda$ beim zweiten Gliede des Nenners, aber manche Schlüsse aus der alten Gleichung werden

dadurch erheblich geändert. Statt mit zunehmender Spaltbreite continuirlich abzunehmen, nimmt in Wahrheit die Reinheit anfangs zu bis zum Punkte $s\psi = \frac{1}{6}\lambda$, und ist noch gleich dem theoretischen Auflösungsvermögen des Instrumentes, wenn $s\psi = \frac{1}{2}\lambda$.¹⁾ Bei noch weiterer Oeffnung des Spaltes beginnt die Reinheit abzunehmen, aber viel langsamer, als die alte Gleichung angiebt. In seinen Bemerkungen über die praktische Reinheit eines Emissions-Linienspectrums im Artikel Spectroscopy sagt Schuster:²⁾ „Die grösste Helligkeit hat jede Linie, wenn die Winkelbreite des Spaltes gleich ist dem Winkel, unter dem eine Wellenlänge in einer Entfernung gleich der Collimatoröffnung erscheint. In dem Fall ist $s\psi = \lambda$ und die Reinheit ist gleich dem halben Auflösungsvermögen. Wenn wir daher auf die Helligkeit Rücksicht nehmen müssen, können wir in der Regel nur das halbe Auflösungsvermögen des Spectroskops ausnutzen.“ Gleichung (16) zeigt aber, dass unter dieser Bedingung der maximalen Helligkeit³⁾ die Reinheit in Wahrheit 75 Proc. des theoretischen Auflösungsvermögens beträgt, nicht 50 Proc., wie Schuster angiebt. Einen ähnlich unrichtigen Schluss aus der gewöhnlich angenommenen Gleichung für die Reinheit hat der Verf. in einer früheren Abhandlung gezogen. Dort wurde gesagt, die Reinheit der Sternspectra könne niemals mehr als $\frac{1}{3}$ des theoretischen Auflösungsvermögens betragen, falls nicht die Spaltbreite enger gemacht werde als der Durchmesser des Beugungsbildes des Sternes; Gleichung (16) zeigt aber, dass diese Grenze nahezu $\frac{1}{2}$ ist, statt $\frac{1}{3}$.

Dritter Fall. Wenn die Strahlung nicht monochromatisch ist, sondern alle Wellenlängen von λ bis $\lambda + \Delta\lambda$ umfasst, so wird das Bild eines ∞ engen Spaltes durch Dispersion zu einem Band verbreitert, in welchem die Intensitätsvertheilung die gleiche ist, wie in der Strahlungsquelle, falls man nämlich annimmt, dass für das kleine Stück $\Delta\lambda$ die Dispersion genau

1) Leider kann man diese Thatsache selten ausnutzen, da bei so engem Spalt das Spectrum meist zu schwach ist, um deutlich sichtbar zu sein.

2) Schuster, Enc. Brit. 22.

3) Diese Bedingung gilt offenbar nur für streng monochromatische Strahlung. Vgl. Astrophysik. Journ. p. 62—63, Jan. 1895.

proportional zu λ sei. Dies Bild wird ferner verbreitert durch Beugung, und die Vertheilung der Intensität in dem Bilde, welches das Objectiv des Spectroskops entwirft, wird durch einen Ausdruck dargestellt, der ähnlich Gleichung (9) ist, aber ein Glied $f(\varphi)$ enthält, welches die Intensitätsvertheilung in der Strahlungsquelle darstellt.

Das Vertheilungsgesetz in einer Normalquelle ist noch nicht sicher bekannt; gewöhnlich nimmt man dafür das Gesetz, welches aus Maxwell's kinetischer Theorie folgt, nämlich¹⁾:

$$(17) \quad f(\varphi) = e^{-\kappa \varphi^2}$$

wo κ eine Constante ist, deren Werth sich ändert mit der emittirenden Substanz und mit der Temperatur und dem Druck in der Lichtquelle. Ein neueres Vertheilungsgesetz von Michelson²⁾ lautet:

$$(18) \quad f(\varphi) = e^{-\frac{\sin^2 r \varphi}{\varphi^2}}.$$

Nimmt man das erste Gesetz an, so ergibt sich für die Intensität im Beugungsbild:

$$(19) \quad J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa \varphi^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha} (\gamma - \varphi)}{\left[\frac{\pi}{\alpha} (\gamma - \varphi) \right]^2} d\varphi = \psi_1(\kappa, \gamma, \alpha).$$

Mit dem zweiten Gesetz erhält man:

$$(20) \quad J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 r \varphi \sin^2 \frac{\pi}{\alpha} (\gamma - \varphi)}{\varphi^2 \left[\frac{\pi}{\alpha} (\gamma - \varphi) \right]^2} d\varphi = \psi_2(r, \gamma, \alpha).$$

Es ist mir nicht gelungen, diese Gleichungen zu integrieren; sie können durch Reihenentwicklung integrirt werden, aber ich habe die Anwendung mechanischer Quadratur leichter und schneller gefunden. Wegen der grossen Aehnlichkeit der Curven, die durch die Gleichungen (17) und (18) gegeben sind (vgl. Fig. 4), wird das Resultat für beide Gesetze praktisch das gleiche sein. Ich habe den Ausdruck für J_1 integrirt, und die sich ergebenden Curven $\psi_1(\kappa, \gamma, \alpha)$ für zwei Werthe von κ

1) Rayleigh, Phil. Mag. p. 298. April 1889; Michelson, Phil. Mag., Sept. 1892.

2) Michelson, Astrophys. Journ. p. 251. Nov. 1895.

sind in Fig. 5 gezeichnet. Die punktirten Linien geben die Curven $f(\varphi)$, die ausgezogenen das Beugungsbild. Der Bequemlichkeit halber sind die Werthe von κ ausgedrückt durch die „halbe Breite“ der Linie (Michelson) und durch α_1 das Grenzauflösungsvermögen des Spectroskopobjectives. Die „halbe

Breite“ δ ist definirt als der Werth von φ , für welchen $f(\varphi) = 1/2$, also

$$(21) \quad \kappa = \frac{\log 2}{\delta^2}.$$

Die effective Breite der Linie w können wir die Breite ab (Fig. 4) nennen, welche gleich 4δ

ist. An den Punkten a und b ist die Intensität nur etwa $1/20$ so gross wie in der Mitte und man kann daher annehmen,

Fig. 4.

Fig. 5.

dass die ausserhalb dieser Punkte liegenden Theile der Curve wenig auf das Auge oder die photographische Platte wirken.

Die Werthe von w in den Curven der Fig. 5 sind:

$$w = 2\alpha \text{ und } w = 4\alpha.$$

Fig. 6A zeigt die Beugungcurve für eine Doppelquelle, deren beide Componenten die Breite $w = 2\alpha$ haben. Lassen wir wie früher die Regel gelten, dass für Auflösung die Intensität in der Mitte des Beugungsbildes nur 0,8 von der Intensität der beiderseitigen Maxima betragen dürfe, so findet man, dass zur Auflösung die Componenten folgende Entfernung haben müssen:

für $w = \alpha$:	Entfernung	$1,12 \alpha$
„ $w = 2 \alpha$	„	$1,45 \alpha$
„ $w = 3 \alpha$	„	$1,90 \alpha$
„ $w = 4 \alpha$	„	$2,45 \alpha$

Sind die Linien so breit, dass die Verbreiterung durch Beugung ganz vernachlässigt werden kann, so findet man, dass die zur Auflösung nöthige Entfernung der Componenten ist:

$$2,3 \delta = 0,575 w = \frac{4}{7} w.$$

Fig. 6 A.

Fig. 6 B.

Drückt man diese Resultate in der Form aus:

$$\Omega = \frac{4}{7} w + f(w) \alpha,$$

so haben wir:

für $w = 0$	$f(w) = 1,00$	$\Omega = \alpha = \frac{\lambda}{b}$
„ $w = \alpha$	$f(w) = 0,55$	$\Omega = \frac{4}{7} w + 0,55 \frac{\lambda}{b}$
„ $w = 2 \alpha$	$f(w) = 0,31$	$\Omega = \frac{4}{7} w + 0,31 \frac{\lambda}{b}$
„ $w = 3 \alpha$	$f(w) = 0,18$	$\Omega = \frac{4}{7} w + 0,18 \frac{\lambda}{b}$
„ $w = 4 \alpha$	$f(w) = 0,15$	$\Omega = \frac{4}{7} w + 0,15 \frac{\lambda}{b}$
„ $w = \infty \alpha$	$f(w) = 0,00$	$\Omega = \frac{4}{7} w + 0,00$

Die Coefficienten des letzten Gliedes sind in Fig. 7 als Function von w eingetragen. Der erste Theil dieser Curve kam wie im Fall der Curve 3 nahezu durch eine empirische Hyperbel (punktirte Linie) dargestellt werden, deren Gleichung lautet:

$$(22) \quad \frac{w}{\alpha} + 1 = \frac{1}{f(w)}, \text{ also } f(w) = \frac{\alpha}{w + \alpha},$$

daher ist

$$(23) \quad \Omega = \frac{4}{7} w + \frac{\alpha^2}{w + \alpha}.$$

Da die Winkelbreite w der Linie durch die Dispersion im Spectroskop hervorgebracht wird, so ist sie

$$(24) \quad w = D \Delta\lambda = \frac{r}{b} \Delta\lambda$$

also

$$(25) \quad \Omega = \frac{1}{b} \left(\frac{4}{7} w \Delta\lambda + \frac{\lambda}{r \Delta\lambda + \lambda} \lambda \right)$$

Fig. 7.

und daher ist für die spectrale Auflösung

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} (d\lambda)_s = \Omega$$

und

$$(26) \quad R = \frac{\lambda}{(d\lambda)_s} = \frac{\lambda}{\frac{4}{7} r \Delta\lambda + \frac{\lambda}{r \Delta\lambda + \lambda}} \cdot r.$$

Diese Gleichung ist sehr ähnlich in der Form derjenigen, die wir für die Reinheit p im Falle breiten Spaltes und monochromatischer Strahlung entwickelt haben.

Da Spectrallinien immer eine gewisse Breite haben müssen, so ist der zuletzt abgeleitete Ausdruck für R (welches wir zweckmässig das Grenzauflösungsvermögen nennen werden) in praktischer Hinsicht allgemeiner brauchbar zur Bestimmung des grössten Auflösungsvermögens eines Spectroskops, als der gewöhnliche Ausdruck für r , die theoretische Auflösung des Instrumentes. Für sehr kleine Werthe von $r \Delta\lambda$, d. h. für sehr kleines Auflösungsvermögen oder sehr feine Linien, wird der Werth von R , ebenso wie es bei p der Fall ist, ein wenig grösser sein als r . Aber für grosse Werthe von r oder von $\Delta\lambda$ wird das Grenzauflösungsvermögen wesentlich kleiner sein als das theoretische Vermögen des Instrumentes. Wie fein indessen die Linie auch sein mag, es giebt eine Grenze,

jenseits deren eine Zunahme des theoretischen Auflösungsvermögens R nicht mehr vergrößert. Dieser Maximalwerth von R ist offenbar:

$$R_{\max} = \frac{\lambda}{\frac{4}{7} \Delta \lambda} = 1,75 \frac{\lambda}{\Delta \lambda};$$

d. h. das grösste Auflösungsvermögen, welches mit irgend einem Instrumente erreicht werden kann, beträgt höchstens das $1\frac{3}{4}$ fache des Quotienten aus der mittleren Wellenlänge und der „Breite“ der betrachteten Linie.¹⁾

Unsere Kenntniss über die Breite von Spectrallinien unter verschiedenen Bedingungen ist zur Zeit sehr beschränkt. Verschiedene Hypothesen, deren bekannteste von Lommel, Jaumann, Galitzine und Michelson stammen, sind aufgestellt worden, um die Verbreiterung der Linien unter verschiedenen Bedingungen der Temperatur und des Druckes zu erklären und uns ein zahlenmässiges Maass dafür zu geben, aber alle sind mehr oder weniger unbefriedigend. Michelson's neuere Experimentaluntersuchungen mit dem Interferometer haben das Genaueste geliefert, was wir über die Breite einiger weniger hellen Linien der Funkenspectra einiger Metalle unter verschiedenem Druck wissen. Ueberall wird das Exponentialgesetz der Vertheilung als geltend angenommen, und die „halbe Breite“ δ , welche oben definirt wurde, wird angegeben. Es ist wie früher angenommen, dass die wirksame Strecke $\Delta \lambda$ gleich etwa 4δ sei. Tab. III giebt eine kurze Uebersicht der erhaltenen Resultate.

Die Werthe von R , $R_{\max}$ und r/R sind für verschiedene Werthe von $\Delta \lambda$ zwischen 0,01 und 1,0 A. E. und für Werthe von r zwischen 25 000 und 1 000 000 ausgerechnet worden und in Tab. IV gegeben.

Die Verticalreihen zeigen die Abnahme von R mit der Zunahme von $\Delta \lambda$, die Horizontalreihen zeigen die Zunahme von R mit r für bestimmte Linienbreite. Die letzte Columne giebt das maximale Auflösungsvermögen $R_{\max}$, das erreichbar ist, wenn die Linien die in der ersten Spalte angegebene Breite $\Delta \lambda$ haben.

1) Es wird indessen gleich gezeigt werden, dass wir praktisch eine etwas grössere Reinheit P erreichen können.

Tabelle III.

Substanz	Linie λ	Art der Lichtquelle	Druck in mm	δ in A. E.	$\Delta\lambda = 4\delta$
Wasserstoff	$H\alpha$ ¹⁾ 6565	Geissleröhre	Sehrniedrig	0,047	$\Delta\lambda' = 0,328$ ¹⁾
	$H\alpha$ 6565	„	50	0,098	$\Delta\lambda' = 0,532$ ¹⁾
	$H\alpha$ 6565	„	100	0,134	$\Delta\lambda' = 0,696$ ¹⁾
	$H\alpha$ 6565	„	200	0,230	$\Delta\lambda' = 1,06$ ¹⁾
Natrium	D_1 5890	Geissleröhre	Sehrniedrig	0,005	0,020
	Nicht angeg.	Nicht angeg.	100	0,09	0,36 ²⁾
	„ „	„ „	200	0,16	0,64 ²⁾
	D_1 ¹⁾ 5890	Bunsenfl.	1 Atm.	0,05 ²⁾	0,27 ¹⁾
Cadmium	Roth 6439	Geisslerrohr, Temp. ca. 280	Sehrniedrig	0,0065	0,026
	Grün 5086	Geisslerrohr, Temp. ca. 280	„ „	0,0050	0,020
	Nicht angeg.	Nicht angeg., wahrsch. Fke.	100	0,05	0,200 ³⁾
	„ „	Nicht angeg., wahrsch. Fke.	200	0,08	0,32 ³⁾
	„ „	Nicht angeg., wahrsch. Fke.	400	0,14	0,56
Quecksilber	Grün 5461	Geisslerrohr, Temp. et. 100	Sehrniedrig	0,003 ²⁾	0,012

Wir sehen, dass im allgemeinen nahezu diese Grenze erreicht wird, wenn das theoretische Auflösungsvermögen r etwa doppelt so gross ist, als $R_{\max}$. Eine weitere Vergrösserung

1) Die rothe Wasserstofflinie ist doppelt, die Componenten um etwa 0,14 A. E. entfernt. Der für δ gegebene Werth gilt für jede einzelne Linie, also ist die ganze effective Breite der Doppellinie

$$\Delta\lambda' = 4\delta + 0,14.$$

Dasselbe gilt von jeder der D -Linien, da nach Michelson jede aus wenigstens vier Componenten besteht, und der Abstand zwischen den Mitten der Hauptcomponenten 0,07 beträgt. Bei kleiner Dichte sind sie daher um mehr als ihre eigene Breite voneinander entfernt, bei grosser Dichte aber, wie in der Bunsenflamme, verbreitert sich jede Componente, sodass sie sich übereinander lagern, und dass wie beim Wasserstoff die ganze effective Breite $\Delta\lambda' = 4\delta + 0,07$ beträgt.

2) Berechnet aus den Zahlen, die gegeben sind: Phil. Mag. p. 230. Sept. 1892.

3) Es scheint ein Widerspruch zu bestehen zwischen diesen Zahlen, die im Astrophys. Journ. p. 251, Nov. 1895 gegeben sind, und den früher mit einem Geisslerrohr erhaltenen nach Phil. Mag. p. 280. Sept. 1892.

von R durch Vergrößerung von r würde nicht die Kosten des grösseren Instrumentes und das Opfer an Helligkeit werth sein. In den meisten Fällen wird es in der That nicht rathsam sein, einen Werth von r zu benutzen, der grösser ist, als das $1\frac{1}{2}$ fache von $R_{\max}$, da dann schon $\frac{3}{4}$ bis $\frac{7}{8}$ des Grenzauflösungsvermögens erreicht sind. Die feinsten bisher gefundenen Linien (vgl. Tab. IV) haben eine Breite $\Delta\lambda$ von nicht weniger als 0,01 A. E. Für diese Breite ist der Werth von R gleich 950 000, und das grösste theoretische Auflösungsvermögen, dessen Benutzung noch zweckmässig wäre, ist daher 1 400 000, was im Falle eines Gitters (vgl. p. 607) einer Oeffnung von 18 bis 20 Zoll entspricht. Andererseits würde es für einige breitere Linien, wie die Wassertofflinien in Geissler-Röhren, oder viele Metalllinien des Bogenspectrums, ganz nutzlos sein, bei Ocularbeobachtung grösseres Auflösungsvermögen als 20 000 bis 25 000 zu benutzen, wozu ein Gitter von $\frac{1}{2}$ Zoll Oeffnung oder 5 Prismen von 60° und $\frac{5}{4}$ Zoll Oeffnung genügen würden. Für das Sonnenspectrum, bei welchem wahrscheinlich die Linien nicht enger als $\frac{1}{20}$ A. E.¹⁾ sind, werden wir von breiteren Gittern²⁾ kaum mehr erwarten können, als was unsere jetzigen Gitter von 5 und 6 Zoll leisten, es müsste denn in besonderen Fällen ein besonderer Vortheil in der Anwendung der Spectra erster und zweiter statt höherer Ordnung liegen.

Die vorhergehenden Schlüsse beruhen alle auf der Annahme, dass das grösste praktische Auflösungsvermögen r_0 , welches gleich $1,5 b/\lambda$ gesetzt war, und welches einem Ablenkungswinkel von etwa 90° entspricht ($\delta = i = 45^\circ$ bis 50°), ausgenutzt werden kann. Ist dies aber aus irgend einem Grunde, z. B. wegen ungenauer Theilung, Lichtschwäche der Spectra höherer Ordnung, oder Bauart des Apparates, nicht der Fall, so muss eine entsprechend breitere Oeffnung genommen werden. Bei der gewöhnlichen Rowland'schen Gitter-

1) Bei schwachen Linien kann die scheinbare Breite oft weit kleiner sein wegen des schnellen Abfalles der Intensität an den Rändern der Linie.

2) Diese würden übrigens zweckmässig sein bei photographischen Methoden, da sie grössere Genauigkeit und photographische Auflösung geben wegen grösserer linearer Dispersion, vgl. Astr. Journ. 1. p. 233 und 2. p. 264.

Tabelle IV.
 $\lambda = 5500 \text{ \AA. E.}$

λ A. E.	$r = 25\ 000$		$r = 50\ 000$		$r = 100\ 000$		$r = 200\ 000$		$r = 500\ 000$		$r = 1\ 000\ 000$		$R_{\max}$
	r/R	R	r/R	R	r/R	R	r/R	R	r/R	R	r/R	R	
0,01	0,98	25 400	0,97	51 600	0,95	105 600	0,94	212 800	1,04	480 000	1,39	722 000	963 000
0,02	0,97	25 800	0,95	52 800	0,94	106 400	1,00	200 000	1,39	361 000	2,29	437 000	481 000
0,04	0,95	26 400	0,94	53 200	1,00	100 000	1,24	161 700	2,29	219 000	4,27	234 000	240 000
0,06	0,94	26 600	0,96	52 400	1,10	90 900	1,56	128 500	3,27	153 000	6,30	159 000	160 000
0,08	0,94	26 600	1,00	50 000	1,24	80 800	1,91	104 600	4,27	117 000	8,35	120 000	120 000
0,10	0,95	26 400	1,04	48 000	1,39	71 900	2,29	87 300	5,28	95 000	10,41	96 000	96 000
0,12	0,96	26 200	1,10	45 500	1,56	64 300	2,67	75 000	6,30	79 400	12,50	80 000	80 000
0,14	0,97	25 800	1,16	42 900	1,73	57 700	3,06	65 000	7,33	68 000	14,50	69 000	69 000
0,16	1,00	25 000	1,24	40 400	1,91	52 300	3,46	58 000	8,35	60 000	16,60	60 000	60 000
0,18	1,02	24 600	1,31	38 100	2,10	47 700	3,86	52 000	9,38	53 000	18,70	53 000	53 000
0,20	1,04	24 000	1,39	36 000	2,29	43 700	4,27	46 800	10,41	48 000	20,75	48 000	48 000
0,25	1,12	22 400	1,60	31 200	2,77	36 100	5,28	37 900	13,00	38 000	25,9	38 000	38 000
0,30	1,20	20 800	1,85	27 000	3,27	30 600	6,30	31 800	15,60	32 000	31,1	32 000	32 000
0,35	1,29	19 300	2,05	24 400	3,76	26 600	7,33	27 000	18,17	27 000	36,3	27 000	27 000
0,40	1,39	18 000	2,29	21 800	4,27	23 400	8,35	24 000	20,75	24 000	41,4	24 000	24 000
0,50	1,60	15 600	2,77	18 000	5,28	18 900	10,41	19 000	25,90	19 000	51,8	19 000	19 000
0,60	1,82	13 700	3,27	15 300	6,30	15 900	12,47	16 000	31,1	16 000	62,2	16 000	16 000
0,80	2,29	10 900	4,27	11 700	8,35	12 000	16,61	12 000	41,4	12 000	82,9	12 000	12 000
1,00	2,77	9 000	5,28	9 500	10,41	9 600	20,75	9 600	51,9	9 600	103,6	9 600	9 600

aufstellung ist z. B. aus rein mechanischen Gründen eine Ablenkung von 60° die grösstmögliche. Dann ist $r_0 = 7/8$, und um dasselbe Auflösungsvermögen R , wie oben, zu erreichen, muss die Oeffnung um 75 Proc. vergrössert werden. Nehmen wir einen Winkel von 45° , der praktisch bei unseren jetzigen Gittern selten überschritten wird, so müsste die Oeffnung um mehr als 100 Proc. vergrössert werden und wir brauchten zur Erreichung des alten Grenzauflösungsvermögens $R_{\max}$: Für Linien

$\Delta \lambda = 0,01$ A. E.	eine Oeffnung von wenigstens	1 m
$\Delta \lambda = 0,02$ „	„ „ „ „	50 cm
$\Delta \lambda = 0,05$ „ (Sonnenspectrum)	„ „ „ „	25 „

Vierter Fall. Um in diesem wichtigsten Fall die Grenze der Auflösung oder die praktische Reinheit P zu ermitteln, müssen wir zunächst die Beugungscurve feststellen, welche sich aus der Nebeneinanderlagerung aller Elemente des Spaltes ergibt, deren jedes ein Dispersionsbild hat, das ähnlich dem in Fig. 5 gegebenen ist. Haben, wie früher, diese Elemente die gleiche Intensität, ist also der ganze Spalt gleichförmig beleuchtet, so ist die Intensitätscurve des Diffractionsbildes:

$$(28) \quad J_{,,} = \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{+\frac{\sigma}{2}} \psi_1(\xi - \gamma, w, \alpha) d\xi = \psi_{,,}(\sigma, \gamma, w, \alpha),$$

wo

$$(29) \quad \psi_1(\gamma, w, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\left(\frac{2\varphi}{w}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{\alpha} (\gamma - \varphi)} \left[\frac{\pi}{\alpha} (\gamma - \varphi) \right]^2$$

wie sich aus (19) und (21) ergibt.

Da die Function ψ_1 nicht bekannt ist, kann auch $\psi_{,,}$ nicht direct gefunden werden; aber wir können dem wahren Werthe ausserordentlich nahe kommen, wenn wir die Function ψ_1 ersetzen durch die Function

$$(30) \quad \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2} \gamma}{\left(\frac{\pi}{2} \gamma \right)^2},$$

welche zwischen den Punkten $\gamma = 1/3\Omega$ und $\gamma = 2/3\Omega$ fast genau übereinstimmt mit der Curve $\psi_1(\alpha, \gamma, \alpha)$ (vgl. Fig. 5, Curve —.—), da nur dieses Stück der Curve wichtig ist zur Ermittlung der Auflösung einer Doppellinie.

Dadurch wird der Ausdruck für $J_{\prime\prime}$:

$$(31) \quad J_{\prime\prime} = \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{+\frac{\sigma}{2}} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2\Omega} (\xi - \gamma)}{\left[\frac{\pi}{2\Omega} (\xi - \gamma) \right]^2} d\xi.$$

was der Form nach genau (9) entspricht, indem nur α durch Ω ersetzt ist.

Wir können daher sofort den Grenzwert der Auflösung aus (12) und (14) hinschreiben, indem wir dort α durch Ω ersetzen und erhalten: Σ_1 = Grenzwert der Winkelauflösung

$$(32) \quad \sigma + \frac{\Omega^2}{2\sigma + \Omega}.$$

Ersetzen wir σ und Ω durch ihre Werthe in s, ψ, R, r und λ und reduciren, so erhalten wir endlich als Grenzwert der Winkelauflösung:

$$(33) \quad \Sigma_1 = \frac{1}{b} \left[s\psi + \frac{\left(\lambda \frac{r}{R} \right)^2}{2s\psi + \lambda \frac{r}{R}} \right]$$

und für die Reinheit

$$(34) \quad P = \frac{\lambda}{(d\lambda)_4} = \frac{\lambda}{s\psi + \frac{\lambda \left(\frac{r}{R} \right)}{2s\psi + \lambda \frac{r}{R}}} \cdot r.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von (16) nur dadurch, dass λ im Nenner den Factor r/R hat. Ist dieser Factor gleich 1, so ist $P = p$, d. h. die praktische Reinheit ist gleich der theoretischen für monochromatisches Licht.

Eine Betrachtung der Tab. IV zeigt, dass für schmale Linien und kleines Auflösungsvermögen der Quotient r/R nahezu gleich 1 ist, und dass daher hier Gleichung (16) sehr nahezu die Reinheit des Spectrums darstellt. Aber für breite

Linien und hohes Auflösungsvermögen gilt das durchaus nicht. Im äussersten in der Tafel berechneten Fall wächst vielmehr der Werth des Quotienten auf 100. Um den Einfluss dieses Factors auf die Reinheit des Spectrums unter verschiedenen Bedingungen klarer zu machen, ist Tab. V berechnet, welche den Werth von P für verschiedene Spaltweiten von 0,005 mm bis 0,3 mm, für verschiedene Breite der Linien von 0,01 A. E. bis 1,0 A. E., und für verschiedenes Auflösungsvermögen von $r = 25\,000$ bis $r = 1\,000\,000$ zeigt. Zum Vergleich sind auch die Werthe von p für jede Spaltbreite und jedes Auflösungsvermögen gegeben, und der Werth p' , der sich aus der alten Gleichung (6) für die Reinheit ergibt. Ein Blick in die Tabelle zeigt sofort, wie falsch selbst unter oft vorkommenden Bedingungen Schätzungen der Reinheit nach der alten Gleichung ausfallen können. Wir wollen z. B. ein Spectroskop mit dem Auflösungsvermögen 200 000 annehmen (Gitter von 5 Zoll, 20 000 Furchen, zweite Ordnung); arbeitet man mit einer solchen Winkelbreite des Spaltes, dass $s\psi = 0,005$ ist ($s = \frac{1}{40}$ mm, $\psi = \frac{1}{80}$, wie beim Concavgitter), so ist der Werth von p (16) etwa 158 000, während der Werth von P zwischen 163 000 und 10 000 liegt.

Der Werth von p' (Reinheit nach der alten Gleichung) ist in diesem Fall nur 105 000 und ist daher um 50 bis 1000 Proc. falsch; für grösseres Auflösungsvermögen ($r = 1\,000\,000$) kann er 60 mal zu gross werden. Im allgemeinen werden allerdings grosse Werthe von $r\Delta\lambda$, welche kleineren Werthen von P entsprechen, für Ocularbeobachtung nicht benutzt werden, da, wie schon bemerkt, grössere Werthe von r , als die von $R_{\max}$ in Tab. V wenig Gewinn für das wirkliche Auflösungsvermögen oder die Reinheit bringen. Aber bei photographischen Arbeiten ist es, wie in einer früheren Abhandlung gezeigt wurde, sehr vortheilhaft, bei ausgedehnten Lichtquellen eine kurze Camera und sehr hohes Auflösungsvermögen zu benutzen, um einen bestimmten Grad photographischer Reinheit zu erreichen.

Ein anderer hierher gehöriger Umstand von grosser praktischer Wichtigkeit ist der, dass für so grosse Werthe von r/R die Reinheit des Spectrums für eine Reihe von Spaltbreiten, wie sie praktisch benutzt werden, gleich gut bleiben

oder sogar allmählich besser werden kann. Denn der Maximalwerth von P (ebenso wie von p) wird erreicht, wenn

$$s\psi \cong \frac{1}{5} \frac{r}{R} \lambda.$$

Für $r = 200\,000$, $\Delta\lambda = 1,00$ ist $r/R = 20,75$, und P erreicht daher seinen Maximalwerth, wenn der Werth von $s\psi$ etwa $4,15\lambda$, d. h. etwa $0,0023$ ist, was bei gewöhnlichen Spectroskopen einer Spaltbreite von etwa $\frac{1}{30}$ mm entspricht. Selbst wenn der Werth von r/R nur 2 oder 3 beträgt (was so feinen Linien entspricht, wie man sie manchmal in der Chromosphäre findet, von 0,2 bis 0,25 A. E., und einem Auflösungsvermögen von nur 100 000) bleibt die Reinheit unvermindert bis zu Werthen von $s\psi = \lambda$ bis $1,5\lambda$ (0,0005 bis 0,0008) oder bis zu Spaltbreiten (beim Concavgitter von $\frac{1}{50}$ bis $\frac{1}{30}$ mm.

Tabelle V.

S	ψ	$s\psi$	$\frac{w}{4\delta}$	r 25 000	r 50 000	r 100 000	r 200 000	r 500 000	r 1 000 000
0,005 0,010 0,020	$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{40}$	0,0005	$P \begin{cases} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,10 \\ 0,50 \\ 1,00 \end{cases}$	20 000	40 200	81 200	163 200	389 000	662 000
				20 300	40 600	77 800	132 400	194 000	207 000
				20 300	38 900	66 200	91 400	103 400	102 200
				15 100	19 400	20 700	20 400	19 900	19 900
				9 700	10 300	10 200	10 000	9 800	9 700
			p (nach 16)	19 800	39 600	79 100	158 200	396 000	791 000
			p' (nach 6)	13 100	26 200	52 400	104 800	262 000	524 000
0,010 0,015	$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$	0,001	$P \begin{cases} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,10 \\ 0,50 \\ 1,00 \end{cases}$	12 400	24 800	49 700	99 400	243 000	454 000
				12 400	24 800	48 700	90 900	166 000	202 000
				12 400	24 400	45 500	74 300	101 500	108 000
				10 900	16 600	20 200	21 500	20 400	19 900
				8 300	10 100	10 800	10 300	10 000	9 800
			p (nach 16)	12 300	24 600	49 100	98 200	245 000	491 000
			p' (nach 6)	8 900	17 800	35 500	71 000	177 000	355 000
0,020 0,030	$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$	0,002	$P \begin{cases} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,10 \\ 0,50 \\ 1,00 \end{cases}$	6 700	13 400	26 700	53 500	133 000	259 000
				6 700	13 400	26 600	51 900	113 600	171 000
				6 700	13 300	25 900	47 800	85 700	103 000
				6 400	11 400	17 100	20 600	21 000	20 600
				5 700	8 500	10 300	10 600	10 300	10 000
			p (nach 16)	6 650	13 350	26 700	53 400	133 500	267 000
			p' (nach 6)	5 400	10 800	21 600	43 200	108 000	216 000

S	ψ	$s \psi$	$\frac{w}{4 \delta}$	r 25 000	r 50 000	r 100 000	r 200 000	r 500 000	r 1 000 000
0,030 0,045	$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$	0,003	$P \left\{ \begin{array}{l} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,10 \\ 0,50 \\ 1,00 \end{array} \right.$	4 500	9 100	18 100	36 200	90 200	178 000
				4 500	9 100	18 000	35 600	88 100	141 000
				4 500	9 000	17 800	34 200	75 700	95 300
				4 400	8 300	14 100	19 100	21 100	20 800
				4 200	7 600	9 500	10 500	10 400	10 100
			p (nach 16)	4 500	9 100	18 100	36 200	90 500	181 000
			p' (nach 6)	3 900	7 800	15 500	31 000	77 500	155 000
0,050 0,075	$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$	0,005	$P \left\{ \begin{array}{l} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,10 \\ 0,50 \\ 1,00 \end{array} \right.$	2 700	5 400	10 900	21 800	54 500	108 000
				2 700	5 400	10 900	21 800	52 900	97 300
				2 700	5 400	10 800	21 400	48 800	77 100
				2 700	5 300	9 700	15 400	20 600	21 100
				2 600	4 900	7 700	9 900	10 500	10 300
			p (nach 16)	2 700	5 400	10 900	21 800	54 500	109 000
			p' (nach 6)	2 500	5 000	9 900	19 800	49 500	99 000
0,10 0,15	$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$	0,010	$P \left\{ \begin{array}{l} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,10 \\ 0,50 \\ 1,00 \end{array} \right.$	1 400	2 800	5 500	11 000	27 500	54 900
				1 400	2 800	5 500	11 000	27 200	53 000
				1 400	2 800	5 500	10 900	26 500	48 800
				1 400	2 700	5 300	9 800	17 300	20 600
				1 400	2 600	4 900	7 800	10 300	10 500
			p (nach 16)	1 400	2 800	5 500	11 000	27 500	55 000
			p' (nach 6)	1 300	2 600	5 200	10 400	26 000	52 000
0,20 0,30	$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{15}$	0,020	$P \left\{ \begin{array}{l} 0,01 \\ 0,05 \\ 0,10 \\ 0,50 \\ 1,00 \end{array} \right.$	700	1 400	2 800	5 600	14 000	27 500
				700	1 400	2 800	5 500	13 700	27 200
				700	1 400	2 800	5 500	13 600	26 500
				700	1 400	2 700	5 300	11 600	17 300
				700	1 400	2 600	4 900	8 600	10 300
			p (nach 16)	700	1 400	2 800	5 600	14 000	28 000
			p' (nach 6)	650	1 300	2 600	5 200	13 000	26 000

Noch ein Fall bleibt zu betrachten, dass nämlich der Spalt breit, die Strahlung nicht monochromatisch ist, und dass das Bild auf dem Spalte nicht gleichförmig hell über die ganze Breite des Spaltes ist. Dann wird der Ausdruck für die Intensität im Beugungsbilde:

$$(35) \quad J_{III} = \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{+\frac{\sigma}{2}} f(\xi) \psi_1(\xi - \gamma, w, \alpha) d\xi,$$

wo $f(\xi)$ die Intensität an irgend einer Stelle des Spaltes im Abstand ξ von seiner Mitte bedeutet. Dieser Fall könnte nur für Sterne wichtig sein. Ist das Sternbild vollkommen, d. h. frei von Aberration durch die Atmosphäre oder das Instrument, so ist die Intensitätsvertheilung für jede Wellenlänge gegeben durch:

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{\alpha_0} \xi}{\frac{\pi}{\alpha} \xi},$$

wo α_0 das Auflösungsvermögen der Fernrohrlinse bedeutet, welche das Sternbild entwirft.

Die Integration könnte auch hier nur durch mechanische Quadratur oder Reihenentwicklung ausgeführt werden, da ψ_1 nicht berechnet werden kann. Aber es schien mir nicht der Mühe werth diese Arbeit auszuführen, da praktisch, wenigstens bei der Spectroskopie der Sterne, solche Bedingungen nie erfüllt sind. Es könnte Momente geben, wo, wenn der Stern genau auf dem Spalt centrirt gehalten würde, das volle Auflösungsvermögen erreicht würde, welches sich aus der Superposition zweier verschiedener solcher Bilder, wie sie durch (35) dargestellt sind, ergibt. Aber für gewöhnlich wird das Sternbild so verbreitert sein, und durch fortwährende atmosphärische Störungen in seiner Lage so veränderlich (um von der chromatischen Aberration ganz zu schweigen, die eintritt, falls das Bild durch eine Linse entworfen wird), dass die Wirkung auf die photographische Platte bei der langen Expositionszeit praktisch dieselbe sein muss, wie wenn der Spalt gleichförmig beleuchtet wäre.

Yerkes Observatorium, Univ. von Chicago, Febr. 1897.

(Eingegangen 25. April 1897.)