Ueber Lamé'sche Functionen.

Von

FELIX KLEIN in Leipzig.

Im Folgenden beabsichtige ich, eine Eigenschaft der Lamé'schen Functionen zu beweisen, die bei geometrischer Betrachtungsweise ausserordentlich nahe liegt, aber doch noch nicht bemerkt zu sein scheint. Mein Theorem bezieht sich unterschiedslos auf die Lamé'schen Functionen aller Ordnungen*), mag aber zunächst hier nur für die Lamé'schen Functionen zweiter Ordnung (die gewöhnlichen Lamé'schen Functionen) ausgesprochen werden. Diese Functionen sind, von den eventuell vorkommenden, dann aber nur einfach zutretenden Factoren $\sqrt{\lambda^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - c^2}$ abgesehen, ganze Functionen von λ^2 , von denen jedesmal $(\tau+1)$ Functionen des Grades τ zusammengehören (vergl. § 2. des Nachfolgenden). Man weiss, dass diese Functionen alle verschieden und dabei reell sind, man weiss ferner, dass sie, gleich Null gesetzt, je τ getrennte reelle Wurzeln ergeben, die alle in dem Intervalle von 0 bis c^2 enthalten sind, — und zwar in der Weise, dass keine Wurzel mit 0 oder mit c^2 oder auch mit dem zwischen 0 und c^2 eingeschalteten Werthe b^2 zusammenfällt. Mein Theorem bezieht sich auf die Art und Weise, wie die so entstehenden $(\tau+1)$ Serien von je τ Grössen auf die Theilintervalle von 0 bis b^2 und von b^2 bis c^2 vertheilt sind. Rein combinatorisch genommen hat man für die Vertheilung von τ Grössen auf zwei Intervalle $(\tau+1)$ Möglichkeiten: man wird in das eine Intervall beliebige τ_1 Grössen legen, in das andere $\tau - \tau_1$, und nun τ_1 von 0 bis τ laufen lassen. Mein Satz ist: *dass jede dieser Möglichkeiten bei einer, und natürlich nur bei einer, unserer $(\tau+1)$ Lamé'schen Functionen eintritt, dass also die Functionen und die verschiedenen Vertheilungsweisen der Wurzeln einander ein-*

*) Siehe hier und im Folgenden: Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, Berlin bei Reimer, zweite Auflage, 1878 (später als H. K. citirt). Bezeichnungen oder Sätze, die ich ohne nähere Erläuterung anwende, sind diesem Werke entnommen.

deutig entsprechen. — Der Beweis ist, wie ich schon andeutete, so einfach wie möglich. Es kommt nur darauf an, sich auf der Kugel die geometrische Bedeutung der Lamé'schen Producte $E(\mu^2) \cdot E(\nu^2)$ klar zu machen und dann die auf der Kugel gewöhnlich benutzten Polarcoordinaten als einen Grenzfall der bei dieser Interpretation verwandten elliptischen Coordinaten zu betrachten.

§ 1.

Elliptische Coordinaten auf der Kugel.

Im genauen Anschlusse an die Bezeichnungsweise des Heine'schen Buches seien die elliptischen Coordinaten μ^2, ν^2 eines Punktes der Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

als die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$(1) \quad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 0$$

erklärt. Es soll b^2 , wie schon erwähnt, kleiner als c^2 sein. Dann liegt die eine Wurzel, die ich μ^2 nennen will, zwischen b^2 und c^2 , die zweite, die mit ν^2 bezeichnet sein soll, zwischen 0 und b^2 . Wenn im Folgenden gesagt wird, dass $\lambda^2 = \mu^2$ oder $= \nu^2$ sei, so wird damit angedeutet, dass die an sich unbeschränkt veränderliche Grösse λ^2 in eins der genannten Intervalle eingeschlossen sei.

Die Gleichung (1) stellt geometrisch eine Schaar von Kegeln zweiter Ordnung mit gemeinsamen Focallinien dar, wobei man zur Bestimmung der letzteren die beiden Gleichungen

$$(2) \quad y = 0, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 0$$

erhält. Diese Focallinien werden natürlich von sämtlichen Kegeln — sofern die letzteren reell sind — eingeschlossen. Aber übrigens haben die Kegel $\lambda^2 = \mu^2$ und $\lambda^2 = \nu^2$ verschiedene Lage. Die ersteren, die ich *Kegel der ersten Art* nennen will, umschliessen die Z -Axe; die *Kegel der zweiten Art* sind um die X -Axe herumgelegt. Dabei beachte man, dass beide Kegelsysteme als Grenzfälle zwei (doppelt-zählende) Coordinatenebenen enthalten: die Kegel erster Art für $\lambda^2 = c^2$ die XY -, für $\lambda^2 = b^2$ die XZ -Ebene, die Kegel zweiter Art für $\lambda^2 = b^2$ ebenfalls die XZ -, für $\lambda^2 = 0$ die YZ -Ebene. Ich werde diese Ebenen die *Hauptebenen*, die Kreise, in denen sie die Kugel durchdringen, die *Hauptkreise* nennen. Von den Hauptkreisen abgesehen besteht jede Curve $\lambda^2 = \mu^2$ oder $\lambda^2 = \nu^2$ auf der Kugel aus *zwei* Ovalen, deren Lage in dem einen oder anderen Falle leicht vorzustellen ist.

Es gilt nun vor Allem, den Grenzübergang deutlich aufzufassen, der eintritt, wenn $b^2 = c^2$ wird. Zuvörderst sieht man, dass dann die beiden Focallinien (2) in die X-Axe zusammenfallen. In ihr schneiden sich übrigens nach wie vor die beiden Hauptkreise $y = 0$, $z = 0$, die ich nun als *Hauptmeridiane* bezeichnen will. Auch der dritte Hauptkreis, $x = 0$, der jetzt der *Aequator* heissen soll, ist völlig ungeändert geblieben. Dagegen haben sich die übrigen Curven der ersten oder zweiten Art wesentlich umgestaltet: *Die einzelne Curve erster Art ist in zwei gegen XZ (oder XY) unter gleichem Winkel geneigte Meridiane zerfallen; die Curve zweiter Art in zwei Parallelkreise, welche vom Aequator beiderseitig gleich weit abstehen.* Zum Beweise appellire ich an die geometrische Anschauung. Will man es auf analytischem Wege einsehen, so setze man in (1) zunächst einmal b^2 schlechthin gleich c^2 ; die dann entstehende Gleichung:

$$(3) \quad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2 + z^2}{\lambda^2 - b^2} = 0$$

definiert für $\lambda^2 = \nu^2$ auf der Kugel die gewollten Parallelkreise. Ein ander Mal setze man zuvörderst:

$$c^2 = b^2 + \varepsilon^2, \quad \lambda^2 = \mu^2 = b^2 + \varepsilon'^2,$$

— wo ε grösser als ε' sein soll —, und lasse nun ε , ε' unabhängig von einander unendlich klein werden. So reducirt sich (1) nach Wegwerfung verschwindender Grössen auf folgende Gleichung:

$$(4) \quad y^2 = \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cdot z^2,$$

und diese repräsentirt in der That zwei gegen XZ gleich stark geneigte Meridiane.

§ 2.

Definition der Lamé'schen Functionen.

Die Kugelfunction mit zwei Variabelen werde für das Folgende in bekannter Weise definiert als *homogene Function* f von x, y, z , die der Gleichung

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

genügt.*) Der Grad der Kugelfunction ist dann der Grad von f in x, y, z .

*) Ich möchte hier insbesondere auf die Darstellung verweisen, welche Maxwell in seinem treatise on electricity and magnetism (Cambridge 1873) gegeben hat. — Vielleicht hat die Bemerkung Interesse, die sich auf Grund der dort entwickelten Definition unmittelbar ergibt: dass die 15 Symmetrieebenen des Ikosaeders die Nullstellen einer Kugelfunction repräsentiren.

Es wird nun Kugelfunctionen n^{ten} Grades geben können, die abgesehen von etwa vortretenden Factoren x , oder y , oder z (die aber nur in einfacher Multiplicität vorhanden sein sollen) in lauter Factoren von der in (1) vorkommenden Gestalt zerfallen:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2}.$$

Gleich Null gesetzt repräsentirt ein solches f ein Aggregat von Kegeln (1), dem eventuell noch einige Coordinatenebenen zutreten. Auf der Kugel werden wir also als Nullstellen von f eine Anzahl Curven der ersten oder zweiten Art haben, vielleicht verbunden mit einigen der Hauptkreise. Eine solche Function f soll im Folgenden eine *Lamé'sche Function vom n^{ten} Grade* genannt werden, und zwar, der Deutlichkeit halber, eine *Lamé'sche Function von zwei Parametern*.

Der Zusammenhang dieser Definition mit der gewöhnlichen ergibt sich sofort, wenn man statt der x, y, z der Kugelpunkte die elliptischen Coordinaten μ^2, ν^2 einführt. Zu dem Zwecke hat man, der bekannten Theorie zufolge, zuvörderst die Gesamtheit der auf der Kugel befindlichen Nullstellen durch eine Gleichung in λ^2 darzustellen:

$$E(\lambda^2) = 0;$$

dann ist, von einem constanten Factor abgesehen, der uns hier gleichgültig sein wird, f gleich dem Producte

$$E(\mu^2) \cdot E(\nu^2).$$

Der einzelne Factor dieses sogenannten Lamé'schen Productes ist das, was man gewöhnlich als Lamé'sche Function schlechthin bezeichnet; im Gegensatze zur Function f könnte man ihn eine Lamé'sche Function *mit nur einem Parameter* nennen.

Die Function $E(\lambda^2)$ enthält, den etwa vorhandenen Hauptkreisen entsprechend, eine Anzahl Factoren der Art $\sqrt{\lambda^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - c^2}$; nach Abtrennung derselben reducirt sie sich auf eine ganze Function von λ^2 :

$$\varphi_\tau(\lambda^2).$$

Der Index τ soll dabei den Grad von φ in λ^2 bedeuten. Lamé'sche Functionen desselben Grades, die hinsichtlich der auf die Hauptkreise bezüglichen Quadratwurzeln übereinstimmen, mögen demselben *Typus* zugerechnet werden. Es giebt dann, wie in der Einleitung bemerkt, jedesmal $(\tau + 1)$ Functionen desselben Typus.

Des Näheren stellt sich bei gegebenem n die Sache folgendermassen:

1) *Sei n gerade.* Dann muss mit dem Aggregat der Kegel (1) nothwendig eine paare Anzahl von Hauptebenen verbunden sein. Man hat also folgende vier Typen, deren Bezeichnung nach dem Voraufgeschickten ohne weitere Erläuterung verständlich sein wird:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{I.} & E = \varphi_{\frac{n}{2}}(\lambda^2), \\ \text{II.} & E = \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{\frac{n-2}{2}}(\lambda^2), \\ \text{III.} & E = \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \sqrt{\lambda^2} \cdot \varphi_{\frac{n-2}{2}}(\lambda^2), \\ \text{IV.} & E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \varphi_{\frac{n-2}{2}}(\lambda^2). \end{array} \right.$$

Von Functionen der ersten Art giebt es, dem wiederholt angeführten Satze entsprechend, $\frac{n+2}{2}$, von Functionen der übrigen Arten je $\frac{n}{2}$, im Ganzen also $(2n+1)$ Lamé'sche Functionen des n^{ten} Grades, wie es sein muss.

2. Sei n ungerade. Dann hat man die vier Typen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{I.} & E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{\frac{n-3}{2}}(\lambda^2), \\ \text{II.} & E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \varphi_{\frac{n-1}{2}}(\lambda^2), \\ \text{III.} & E = \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \varphi_{\frac{n-1}{2}}(\lambda^2), \\ \text{IV.} & E = \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{\frac{n-1}{2}}(\lambda^2). \end{array} \right.$$

Auch diese Tabelle ergiebt, dem erwähnten Satze zufolge, $(2n+1)$ Lamé'sche Functionen des n^{ten} Grades.

§ 3.

Bedeutung und Beweis meines Theorem's.

Wie schon in der Einleitung berichtet, hat man vor Allem den Satz, dass die verschiedenen ganzen Functionen $\varphi_\tau(\lambda^2)$ gleich Null gesetzt lauter getrennte, reelle Wurzeln ergeben, die sämmtlich in dem Intervalle von 0 bis c^2 liegen und weder mit 0 noch mit b^2 oder mit c^2 zusammenfallen. Für unsere geometrische Auffassungsweise heisst dies, dass $f = E(u^2) \cdot E(v^2)$, von den Hauptkreisen abgesehen, auf der Kugel für τ getrennte reelle Curven verschwindet, welche sich, nach einem zunächst unbekannten Gesetze, auf die Curven der ersten und die Curven der zweiten Art vertheilen. *Eben dieses Gesetz will mein Theorem aufdecken.* Es besagt, dass die $\tau + 1$ demselben Typus angehörigen Lamé'schen Functionen genau den verschiedenen hier denkbaren Vertheilungsmöglichkeiten entsprechen.

Zum Beweise halte man an der geometrischen Auffassungsweise

fest, und lasse nun den Grenzübergang des § 1. eintreten, welcher der Annahme $b^2 = c^2$ entspricht!

Da niemals zwei Curven der ersten oder der zweiten Art mit einander oder mit einem Hauptkreise zusammenfallen können, so degenerirt jede Curve der ersten Art in zwei (gleich stark gegen XZ geneigte) Meridiane, jede Curve der zweiten Art in zwei (gleichweit vom Aequator abstehende) Parallelkreise. Mittlerweile hat die Function

$$f(x, y, z) = E(\mu^2) \cdot E(\nu^2)$$

nicht aufgehört, der Differentialgleichung

$$\Delta_2 f = 0$$

zu genügen. Die elliptischen Coordinaten μ^2 , ν^2 aber sind in die gewöhnlichen Polarcoordinaten φ , ϑ übergegangen, die, im Anschlusse an (3), (4) durch folgende Gleichungen definirt sind:

$$(7) \quad \begin{cases} x = \cos \vartheta, & y = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, & z = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \\ & -\cos \varphi = \frac{z'}{z}, & \cos \vartheta = \frac{v}{b}. \end{cases}$$

Man hat also vor allen Dingen (wegen der Lage der Nullstellen):

Die Function $f(x, y, z)$ ist in eine der $(2n+1)$ in Bezug auf die X -Axe symmetrischen Kugelfunctionen verwandelt, die in üblicher Bezeichnung lauten:

$$(8) \quad \begin{cases} P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \cos h\varphi, \\ P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \sin h\varphi. \end{cases}$$

Hier hat h in der ersten Zeile die Werthe $0, 1, \dots, n$, in der zweiten Zeile die Werthe $1, 2, \dots, n$ zu durchlaufen.

Aber zugleich ist ersichtlich, in welche der $(2n+1)$ Functionen (8) f übergegangen ist.

Zunächst, was die Unterscheidung der beiden in (8) enthaltenen Formen angeht, so hat man offenbar die Regel:

Es entsteht $P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \sin h\varphi$ oder $P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \cos h\varphi$, je nachdem $f(x, y, z)$ für $y = 0$ verschwindet, oder nicht, je nachdem also das zugehörige $E(\lambda^2)$ den Factor $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$ enthält, oder nicht.

Dann aber können wir auch innerhalb der beiden Arten sondern. In der That erkennt man sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

War τ_1 die Anzahl der Curven erster Art, für welche $f(x, y, z)$ verschwand, und befanden sich unter den Verschwindungscurven des Weiteren noch σ Hauptmeridiane (wo σ nur $0, 1, 2$ sein kann), so ist für die zugehörige Function (8) $h = 2\tau_1 + \sigma$.

Hiermit aber ist die fragliche Function (8) vollkommen bestimmt.

Nun sage ich, dass auch umgekehrt beim Grenzübergange die einzelne Function (8) nur aus einer einzigen Lamé'schen Function ent-

stehen kann. Denn man weiss, dass die $(2n+1)$ zu Vergleich kommenden Functionen (8) gleich den $(2n+1)$ überhaupt vorhandenen Lamé'schen Functionen linear unabhängig sind.

Aus allen diesen Sätzen aber folgt unser Theorem unmittelbar. Man kennt bei der einzelnen Function (8) von vorneherein die Meridiane, für welche sie verschwindet. Daher kann man auf die Anzahl der Curven erster (oder zweiter) Art, für welche die verschiedenen Lamé'schen Functionen verschwinden, den Rückschluss machen. Es wird genügen, dies nur an einem der 8 Fälle, die man, dem vorigen Paragraphen zufolge, bei geradem resp. ungeradem n zu unterscheiden hat, in's Einzelne darzulegen.

Ich nehme zu dem Zwecke bei ungeradem n (Tab. (6)) den ersten Fall:

$$E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{\frac{n-3}{2}}(\lambda^2).$$

Ein solches E verschwindet für den Hauptmeridian $y = 0$, zudem für den Aequator, $x = 0$. Daher entspricht ihm eine Function

$$P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \sin h \varphi$$

mit geradem h . Nun giebt es solcher Functionen (für $h = 2, 4, \dots (n-1)$) im Ganzen $\frac{n-1}{2}$, also ebenso viele, als Functionen E des herausgegriffenen Typus. Die $\binom{n-1}{2}$ Functionen der zweierlei Arten entsprechen einander also eindeutig. Aber

$$P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \sin h \varphi$$

verschwindet (für gerades h) in $h-2$ Meridianen, die von den Hauptmeridianen verschieden sind. Daher verschwinden die $\frac{n-1}{2}$ Functionen

$E(\lambda^2)$ des von mir herausgegriffenen Typus beziehungsweise in $\frac{h-2}{2}$ Curven der ersten Art, wo h die Werthe $2, 4, \dots (n-1)$ zu durchlaufen hat. Sie sind also durch die Anzahl der Wurzeln λ^2 verschieden, welche

$$\varphi_{\frac{n-3}{2}}(\lambda^2) = 0$$

zwischen b^2 und c^2 ergiebt, — und eben dieses behauptet mein Theorem.

Dass sich das Theorem in den übrigen Fällen ganz ebenso ergiebt, bedarf wohl keiner Erläuterung mehr. —

Man erkennt das Charakteristische dieses Beweises. Hätte man, wie es gewöhnlich geschieht, λ^2 einfach als Abscisse gedeutet und dementsprechend $E(\lambda^2)$ interpretirt, so hätte sich das Intervall $b^2 \dots c^2$

beim Grenzübergange in einen einzelnen Punkt zusammengezogen und es würde einer tiefer gehenden Untersuchung vorbehalten geblieben sein, die verschiedenen Wurzeln von $E(\lambda^2) = 0$, die in diesen Punkt coincidiren, nach ihrem Ursprunge zu classificiren. Indem wir statt dessen $E(\mu^2) \cdot E(\nu^2)$ auf der Kugel deuten, verliert der Grenzübergang für die geometrische Auffassung jegliche Unstetigkeit, und das Theorem, um welches es sich handelt, bietet sich unmittelbar.

§ 4.

Das Theorem für die Lamé'schen Functionen der p^{ten} Ordnung*).

Bei den Lamé'schen Functionen p^{ter} Ordnung treten an Stelle der drei Werthe $\lambda^2 = 0, b^2, c^2$ im Ganzen $p + 1$, die, reell und positiv vorausgesetzt, in steigender Grössenordnung mit $a_0^2, a_1^2, \dots, a_p^2$ bezeichnet sein mögen. Eine Lamé'sche Function des n^{ten} Grades $E^{(n)}(p, \lambda^2)$ enthält als einfach vertretende Factoren eine gewisse Anzahl, m , von Quadratwurzeln:

$$\sqrt{\lambda^2 - a_0^2}, \sqrt{\lambda^2 - a_1^2}, \dots, \sqrt{\lambda^2 - a_p^2}$$

— wo m mit n zusammen gerade oder ungerade sein muss, aber übrigens beliebig ist — und ausserdem eine ganze Function $\frac{n-m}{2}$ ten Grades von $\lambda^2: \varphi_{\frac{n-m}{2}}(\lambda^2)$. Es mögen wieder alle diejenigen Functionen, welche hinsichtlich der vortretenden Quadratwurzeln übereinstimmen, demselben Typus zugerechnet werden. Die Zahl der linear unabhängigen Functionen des einzelnen Typus ist dann jeweils:

$$\frac{(\tau + 1)(\tau + 2) \dots (\tau + p - 1)}{1 \cdot 2 \dots (p - 1)},$$

wo τ der Abkürzung halber statt $\frac{n-m}{2}$ geschrieben ist. Man bemerkt, dass dies gerade diejenige Zahl ist, welche angiebt, auf wie viele verschiedene Weisen τ Punkte über p Intervalle vertheilt werden können.

Mein Theorem ist nun dies: dass diese Uebereinstimmung keine zufällige ist. Vielmehr sage ich:

1) dass jedes Polynom $\varphi_\tau(\lambda^2)$, gleich Null gesetzt, τ getrennte, reelle Wurzeln ergiebt, welche alle zwischen a_0^2 und a_p^2 inne liegen, ohne mit diesen Grenzen oder den Grössen $a_1^2, \dots, a_{p-1}^2$ zusammenzufallen;

*) Vergl. H. K. p. 445.

2) dass die verschiedenen zu demselben Typus gehörigen Polynome $\varphi_\tau(\lambda^2)$ sich durch den Modus der Vertheilung ihrer Wurzeln auf die p Intervalle von a_0^2 bis a_1^2 , von a_1^2 bis a_2^2 , $\dots$, von a_{p-1}^2 bis a_p^2 unterscheiden, so zwar, dass jeder Vertheilungsart eine und nur eine Function $\varphi_\tau(\lambda^2)$ entspricht.

Der erste Theil dieses Satzes kann geradeso bewiesen werden, wie dies hinsichtlich der Lamé'schen Functionen zweiter Ordnung seit lange geschehen ist; man vergleiche das Heine'sche Buch. Um den zweiten Theil des Satzes einzusehen, hat man sich vor Allem die Art und Weise zu überlegen, wie die Kugel des Raumes $(x_0 \dots x_p)$ von $(p+1)$ Dimensionen:

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_p^2 = 1$$

durch die allgemeinen elliptischen Polarcoordinaten

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_p^2,$$

die mittelst folgender Gleichung eingeführt werden:

$$(9) \quad \frac{x_0^2}{\lambda^2 - a_0^2} + \frac{x_1^2}{\lambda^2 - a_1^2} + \dots + \frac{x_p^2}{\lambda^2 - a_p^2} = 0,$$

in p Serien von $(p-1)$ -fach ausgedehnten Gebieten zerlegt wird. Sodann lasse man $a_1^2, a_2^2, \dots, a_p^2$ allmählich einander gleich werden, wobei sich die elliptischen Coordinaten in die gewöhnlichen Polarcoordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p$ verwandeln, die durch folgende Gleichungen definirt sind:

$$(10) \quad \begin{cases} x_0 = \cos \vartheta_1, \\ x_1 = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{p-2} = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{p-2} \cos \vartheta_{p-1}, \\ x_{p-1} = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{p-1} \cos \vartheta_p, \\ x_p = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{p-1} \sin \vartheta_p. \end{cases}$$

Dann verwandelt sich das Lamé'sche Product

$$E^{(n)}(p, \lambda_1^2) \cdot E^{(n)}(p, \lambda_2^2) \dots E^{(n)}(p, \lambda_p^2)$$

nothwendig in eine Kugelfunction des folgenden Typus*):

$$(11) \quad P_{(n_1)}^{(n)}(p, \cos \vartheta_1) \cdot P_{(n_2)}^{(n_1)}(p, \cos \vartheta_2) \dots P_{(n_{p-1})}^{(n_{p-2})}(p, \cos \vartheta_{p-1}) \cdot [\vartheta_p].$$

Hier soll $[\vartheta_p]$, je nachdem,

$$\cos(n_{p-1} \cdot \vartheta_p) \quad \text{oder} \quad \sin(n_{p-1} \cdot \vartheta_p)$$

bedeuten, und

*) H. K. p. 461.

$$n, n_1, \dots, n_{p-1}$$

soll irgend ein Zahlensystem sein, für welches keine der Differenzen

$$n - n_1, n_1 - n_2, \dots, n_{p-2} - n_{p-1}$$

negativ ist. Man überblickt die verschiedenen reellen Gebiete, für welche eine solche Function (11) auf der Kugel verschwindet. In ähnlicher Weise müssen daher die Nullstellen des Productes

$$E^{(n)}(p, \lambda_1^2) \cdot E^{(n)}(p, \lambda_2^2) \cdot \dots \cdot E^{(n)}(p, \lambda_p^2)$$

angeordnet sein. Und eben dies behauptet, nur in analytischer Formulirung, der vorstehend ausgesprochene Satz.

Leipzig, Mitte Januar 1881.