Über das räumliche Analogon des Desargues'schen Satzes.

Von J. Vályi in Klausenburg (Ungarn).

Der Desargues'sche Satz kann in der Ebene auch folgender Weise formuliert werden:

Wenn die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte von zwei Dreiecken zu einem linearen Strahlenbüschel angehören, so gehören die Durchschnittspunkte der entsprechenden Seiten zu einer linearen Punktreihe an.

Wenn man bedenkt, dass der lineare Strahlenbüschel im Raume mit sich selbst reciprok ist, wird der analoge Satz lauten:

Wenn die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte von zwei Tetraedern zu einem linearen Strahlenbüschel angehören, so gehören die Durchschnittslinien der entsprechenden Seitenflächen wieder zu einem linearen Strahlenbüschel an.

Eine solche Beziehung von zwei Tetraedern werden wir linear nennen.

Dieser Satz, welcher weiter unten bewiesen wird, führt dann zur Frage, ob es mehrfach lineare Tetraeder gibt? Wir werden ihre Existenz beweisen und die sämtlichen Arten von mehrfach linearen Tetraedern aufsuchen.

1. Über die linearen Strahlenbüschel.

Wenn die Gerade p mit den räumlichen Coordinaten

$$p_{ik} \ (i, k = 1, 2, 3, 4; p_{ik} + p_{ki} = 0)$$

gegeben ist, so besteht unter diesen die Relation:

$$[p] = p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0.$$

Wenn die Geraden p, q durch die Coordinaten $p_{ik} q_{ik}$ gegeben sind, so ist die Bedingung dafür, dass die Geraden einander schneiden:

$$[p, q] = [q, p] = p_{23}q_{14} + p_{31}q_{24} + p_{12}q_{34} + p_{14}q_{23} + p_{24}q_{31} + p_{34}q_{12} = 0.$$

Wir brauchen beide Relationen.

1. Suchen wir zuerst denjenigen linearen Strahlenbüschel auf, welcher durch zwei Strahlen (p, q) bestimmt wird.

$$s_{ik} = \lambda p_{ik} + \mu q_{ik}$$

können nur dann Liniencoordinaten sein, wenn die Bedingung

$$[s] = \lambda \mu [p, q] = 0$$

erfüllt wird. Zwei Strahlen erzeugen also nur dann einen linearen Strahlenbüschel, wenn sie einander schneiden. Der Strahlenbüschel besteht aus den sämtlichen Geraden, welche in der gemeinsamen Ebene von p und q liegen und zugleich durch den gemeinsamen Punkt von p und q hindurchgehen, denn jede Gerade (l) , welche p und q schneidet, schneidet auch s , nämlich

$$[s, l] = \lambda [p, l] + \mu [q, l]$$

Solcher Strahlenbüschel soll ein linearer ebener Strahlenbüschel heißen.

Die Bedingung dafür, dass drei gegebene Geraden zu einem linearen ebenen Strahlenbüschel angehören, besteht darin, dass die sämtlichen Determinanten dritter Ordnung der Matrix von den Liniencoordinaten der drei Geraden verschwinden müssen.

2. Suchen wir den linearen Strahlenbüschel auf, welcher durch drei Geraden (p, q, r) bestimmt wird, wo die Geraden nicht zu einem linearen ebenen Strahlenbüschel angehören.

$$s_{ik} = \lambda p_{ik} + \mu q_{ik} + \nu r_{ik}$$

können nur dann Liniencoordinaten sein, wenn die Bedingung

$$[s] = \mu \nu [q, r] + \nu \lambda [r, p] + \lambda \mu [p, q] = 0$$

erfüllt wird. Folgende Fälle sind zu unterscheiden:

a) die Geraden p, q, r schneiden sich paarweise nicht.

Dann besteht der Büschel aus einfach unendlich vielen Gliedern mit der Eigenschaft, dass jede Gerade (l) , welche die Geraden p, q, r schneidet, schneidet auch sie, weil

$$[s, l] = \lambda [p, l] + \mu [q, l] + \nu [r, l]$$

ist. Hieraus folgt, dass der Büschel auf der Fläche zweiten Grades liegt, welche durch die Geraden p, q, r geht und auf dieser Fläche diejenige Schaar von Geraden bildet, zu welchem auch die Geraden p, q, r gehören.

b) p und q schneiden sich, aber die Geraden q und r , r und p nicht.

Aus der Bedingungsgleichung

$$[s] = \nu (\lambda [p, r] + \mu [q, r]) = 0$$

folgt, dass in diesem Falle der Büschel aus zwei linearen ebenen Strahlenbüscheln besteht, deren einer ($\nu = 0$) die Grundstrahlen p, q , der andere die Grundstrahlen r, s hat, wo

$$s_{ik} = [q, r] p_{ik} - [p, r] q_{ik}$$

sind. Also zwei linearen ebenen Strahlenbüschel mit verschiedenen Centren und Ebenen, aber mit einem gemeinsamen Strahl (s).

c) p und q, q und r schneiden sich, aber r und p schneiden sich nicht.

Aus der Gleichung

$$[s] = \lambda \nu [p, r] = 0$$

folgt, dass auch in diesem Falle der Büschel aus zwei linearen ebenen Strahlenbüscheln besteht mit verschiedenen Centren und Ebenen, aber mit einem gemeinsamen Strahl (q).

d) p, q, r schneiden sich paarweise, also haben sie entweder einen gemeinsamen Punkt, oder eine gemeinsame Ebene.

Jetzt ist die Gleichung $[s] = 0$ eine Identität. Der Büschel enthält zweifach unendlich viele Glieder mit der Eigenschaft, dass sie durch jede gemeinsame Schnittgerade von p, q, r geschnitten werden. Sie bilden also einen Strahlenbündel, wenn p, q, r einen gemeinsamen Punkt haben, ein Strahlenfeld, wenn p, q, r in einer Ebene liegen.

Aus dem bisherigen folgt, dass, wenn vier Geraden zu einem linearen Strahlenbüschel gehören, aber keine drei unter ihnen zu einem linearen ebenen Strahlenbüschel gehören, so können die folgenden vier Fälle vorkommen:

1. Die vier Geraden liegen auf einer Fläche zweiten Grades, aber schneiden sich paarweise nicht. (Hyperbolische Strahlen.)

2. Die vier Geraden bilden zwei Winkel mit verschiedenen Spitzen und Ebenen, aber in einer solchen Lage, dass die Spitze des einen Winkels in der Ebene des anderen liegt, und umgekehrt. (Zweiwinklige Strahlen).

3. Die vier Geraden haben einen gemeinsamen Punkt. (Centralstrahlen.)

4. Die vier Geraden liegen in einer Ebene. (Feldstrahlen.)

Die Bedingung dafür, dass vier gegebene Geraden zu einem linearen Strahlenbüschel gehören besteht darin, dass die sämtlichen Determinanten vierter Ordnung der Matrix von den Liniencoordinaten verschwinden müssen.

2. Über die linearen Tetraeder.

Es seien $A_1 A_2 A_3 A_4$, $B_1 B_2 B_3 B_4$ die Eckpunkte und $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$ die Seitenflächen von zwei Tetraedern. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass z. B.

$$\alpha_4 = A_1 A_2 A_3$$

sei. Entsprechende Elemente sollen gleiche Indices haben.

Wählen wir das erste Tetraeder zum Coordinatentetraeder und so seien die Coordinaten der Eckpunkte:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}.$$

Da auch das zweite Tetraeder ein wahres ist, so verschwindet die Determinante $B = |b_{ik}|$ nicht.

Die Coordinaten der Seitenflächen sind

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{array},$$

wo B_{ik} die Unterdeterminante von b_{ik} in B bedeutet.

Wir setzen voraus, dass keines unter den Elementen $b_{ik} B_{ik}$ verschwindet, dass also keiner unter den Eckpunkten des einen Tetraeders in einer Seitenfläche des anderen Tetraeders liegt. Dadurch wird es auch ausgesprochen, dass keine drei unter den Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte in einer Ebene liegen und keine drei unter den Schnittlinien der entsprechenden Seitenflächen durch einen Punkt durchgehen.

Die Liniencoordinaten der Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte sind (wenn man dieselben nach der Reihenfolge

$$p_{23} \ p_{31} \ p_{12} \ p_{14} \ p_{24} \ p_{34}$$

aufzählt)

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -b_{13} & b_{12} & b_{14} & 0 & 0 \\ b_{23} & 0 & -b_{21} & 0 & b_{24} & 0 \\ -b_{32} & b_{31} & 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} \end{array}.$$

Die vier Geraden gehören zu einem linearen Strahlenbüschel, wenn jede Determinante vierter Ordnung aus dieser Matrix verschwindet. Dies führt zu den folgenden 7 Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & b_{12} b_{23} b_{31} = b_{13} b_{32} b_{21} \\
 (2) \quad & b_{13} b_{34} b_{41} = b_{14} b_{43} b_{31} \\
 (3) \quad & b_{14} b_{42} b_{21} = b_{12} b_{24} b_{41} \\
 (4) \quad & b_{23} b_{34} b_{42} = b_{24} b_{43} b_{32} \\
 (5) \quad & b_{12} b_{23} b_{34} b_{41} = b_{14} b_{43} b_{32} b_{21} \\
 (6) \quad & b_{13} b_{34} b_{42} b_{21} = b_{12} b_{24} b_{43} b_{31} \\
 (7) \quad & b_{14} b_{42} b_{23} b_{31} = b_{13} b_{32} b_{24} b_{41}.
 \end{aligned}$$

Die vier letzten Gleichungen folgen aber aus den drei ersten. Nämlich:

$$\begin{aligned}
 (4) & \text{ folgt aus der Multiplication von (1), (2) und (3),} \\
 (5) & \text{ " " " " " (1) und (2),} \\
 (6) & \text{ " " " " " (2) " (3),} \\
 (7) & \text{ " " " " " (3) " (1).}
 \end{aligned}$$

Weil die Coordinaten homogen sind und der Voraussetzung nach nicht verschwinden, können sie immer so eingerichtet werden, dass

$$b_{21} = b_{12}, \quad b_{31} = b_{13}, \quad b_{41} = b_{14}$$

seien. Dann sind aber nach (1), (2) und (3) zugleich

$$b_{23} = b_{32}, \quad b_{34} = b_{43}, \quad b_{42} = b_{24},$$

d. h. B ist eine symmetrische Determinante.

Eben so ist die Bedingung dafür, dass die Schnittlinien der entsprechenden Seitenflächen zu einem linearen Strahlenbüschel gehören, besteht darin, dass man die Determinante aus den Elementen B_{ik} durch Multiplication der Reihen mit passend gewählten Factoren in eine symmetrische Determinante umwandeln könne. Die adjungierte und die ursprüngliche Determinante sind aber zu gleicher Zeit symmetrisch, woraus folgt, dass

„Wenn die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte zu einem linearen Strahlenbüschel angehören, so gehören die Schnittlinien der entsprechenden Seitenflächen wieder zu einem linearen Strahlenbüschel an —, und umgekehrt.“

Wenn aber die Relationen $b_{ik} = b_{ki}$ bestehen, so sind die beiden Tetraeder polarreciprok in Bezug auf die Fläche zweiten Grades, deren Gleichung in Ebenencoordinaten lautet:

$$\sum b_{ik} u_i u_k = 0.$$

Es besteht also auch folgender Satz:

Ein Tetraeder steht mit seinem polarreciproken in linearer Beziehung.¹⁾

Um die verschiedenen Arten der linearen Tetraeder unterscheiden zu können, bemerken wir, dass die Geraden $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ sich schneiden, wenn

$$b_{13} b_{24} - b_{14} b_{23} = 0$$

nach den Relationen $b_{ik} = b_{ki}$ schneiden sich dann auch $A_3 B_3$ und $A_4 B_4$.

$A_1 B_1, A_3 B_3$ einerseits, $A_2 B_2, A_4 B_4$ andererseits schneiden sich, wenn

$$b_{12} b_{34} - b_{14} b_{32} = 0.$$

$A_1 B_1, A_4 B_4$ einerseits, $A_2 B_2, A_3 B_3$ andererseits schneiden sich, wenn

$$b_{12} b_{43} - b_{13} b_{42} = 0.$$

Die eine Gleichung ist eine Folge der beiden anderen.

Es sei noch zu bemerken, dass unter den Gleichungen

$$b_{13} b_{24} - b_{14} b_{23} = 0, B_{31} B_{42} - B_{32} B_{41} = 0$$

die eine eine Folge der anderen ist, woraus folgt, dass wenn $A_1 B_1, A_2 B_2$ sich schneiden, so schneiden sich auch $\alpha_3 \beta_3$ und $\alpha_4 \beta_4$.

Aus dem bisherigen folgt, dass man die folgenden drei Arten der linearen Beziehungen unterscheiden kann:

1. Die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte so wie auch die Schnittlinien der entsprechenden Seitenflächen sind hyperbolische Strahlen. (Hyperbolische Beziehung.)²⁾

2. Die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte so wie auch die Schnittlinien der entsprechenden Seitenflächen sind zweiwinklige Strahlen. (Zweiwinklige Beziehung.)

3. Die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte sind Centralstrahlen, die Schnittlinien der entsprechenden Seitenflächen sind Feldstrahlen. (Perspective Beziehung.)

¹⁾ Dieser Satz in einer anderen Formulierung rührt von Chasles her. Siehe Salmon-Fiedler. Analytische Geometrie des Raumes. Band I. Seite 180 und die beigefügte Notiz.

²⁾ Dieser Theil des Satzes rührt von O. Hermes her. (Crelle-Journal, Band 50.)

3. Über die mehrfach linearen Tetraeder.

Die Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ und $B_1 B_2 B_3 B_4$ seien in linearer Beziehung nach der durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

dargestellten Art, wo die entsprechenden Elemente in einer Colonne stehen.

Es fragt sich, ob es außer dieser Beziehung, welche die Grundbeziehung heißen soll, auch noch andere lineare Beziehungen geben kann, wo das Entsprechen der Eckpunkte ein anderes ist.

Wir wollen diejenige Beziehung, deren Symbol aus dem der Grundbeziehung dadurch hergeleitet werden kann, dass man an die Indices der Elemente B die Substitution S anwendet, die Beziehung S nennen. Hiernach wird das neue Zeichen der Grundbeziehung 1 sein, als das Zeichen der identischen Substitution.

Man erhält die Bedingungen für die Beziehung S , wenn man in den Gleichungen

$$b_{12} b_{23} b_{31} = b_{13} b_{32} b_{21}$$

$$b_{13} b_{34} b_{41} = b_{14} b_{43} b_{31}$$

$$b_{14} b_{42} b_{21} = b_{12} b_{24} b_{41}$$

$$b_{23} b_{34} b_{42} = b_{24} b_{43} b_{32}$$

deren eine eine Folge der drei anderen ist, an die ersten Indices die Substitution S anwendet und nachher die Relationen $b_{ik} = b_{ki}$ benutzt, welche die Existenz der Grundbeziehung aussagen.

Man erhält auf diese Weise

1. Die Bedingungen für die Beziehung (12)

$$b_{13} b_{24} - b_{14} b_{23} = 0$$

$$b_{11} b_{23}^2 - b_{22} b_{13}^2 = 0$$

$$b_{11} b_{24}^2 - b_{22} b_{14}^2 = 0,$$

deren letzte eine Folge der beiden ersten ist.

Die erste Gleichung zeigt, dass in diesem Falle weder die Grundbeziehung, noch die Beziehung (12) hyperbolisch sein kann.

2. Die Bedingungen für die Beziehung (12) (34), sind

$$b_{11} b_{23} b_{24} = b_{22} b_{13} b_{14}$$

$$b_{33} b_{41} b_{42} = b_{44} b_{31} b_{32}.$$

3. Die Bedingungen für die Beziehung (123) sind

$$b_{11} b_{24} b_{34} = b_{14}^2 b_{23}$$

$$b_{22} b_{34} b_{14} = b_{24}^2 b_{31}$$

$$b_{33} b_{14} b_{24} = b_{34}^2 b_{12}.$$

4 Die Bedingungen für die Beziehung (1234) sind

$$b_{11} b_{22} b_{34} = b_{12} b_{13} b_{24}$$

$$b_{22} b_{33} b_{41} = b_{23} b_{13} b_{24}$$

$$b_{33} b_{44} b_{12} = b_{34} b_{13} b_{24}$$

$$b_{44} b_{11} b_{23} = b_{41} b_{13} b_{24},$$

deren eine eine Folge der drei anderen ist.

Aus diesen und den ähnlichen Bedingungen liest man die folgenden Zusammenhänge heraus:

1. Unter den Beziehungen (12), (23), (31) ist die eine eine Folge der beiden anderen.

2. Unter den Beziehungen (12), (34), (12)(34) ist die eine eine Folge der beiden anderen.

3. Unter den Beziehungen (12)(34), (13)(24), (44)(23) ist die eine eine Folge der beiden anderen.

4. Unter den Beziehungen (123), (132) ist die eine eine Folge der anderen.

5. Unter den Beziehungen (123), (234), (14)(23) ist die eine eine Folge der beiden anderen.

6. Die Beziehung (1234) zieht die Beziehungen (1432) und (13)(24) nach sich.

Wir theilen die Arten der mehrfachen Linearität folgender Weise in drei Gruppen ein:

1. Unter den vorhandenen Beziehungen gibt es mindestens eine perspective. Wir wählen eine solche zur Grundbeziehung.

2. Unter den vorhandenen Beziehungen gibt es keine perspective, wohl aber mindestens eine zweiwinklige. Wir wählen eine solche zur Grundbeziehung.

3. Die vorhandenen Beziehungen sind sämmtlich hyperbolisch.

I.

Es sei die Grundbeziehung perspectiv. Wählen wir das Perspectivcentrum zum Einheitspunkte des Coordinatensystems und so seien die Coordinaten von $B_1 B_2 B_3 B_4$

$$\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \nu & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \rho. \end{array}$$

Dass die Punkte verschieden seien, kann höchstens eine der Zahlen $\lambda \mu \nu \rho$ eins sein. Dies wird vorausgesetzt.

1. Die Bedingung für die Beziehung (12) ist

$$\lambda = \mu.$$

2. Die Bedingungen für die Beziehung (12)(34) sind

$$\lambda = \mu, \nu = \rho.$$

3. Die Bedingungen für die Beziehung (1234) sind

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \nu = \frac{1}{\rho}.$$

4. Die Bedingungen für die Beziehung (123) sind

$$\lambda = \mu = \nu = 1.$$

Dieser Fall ist also auszuschließen.

Man erhält die sämtlichen Fälle, wenn man diese und die ähnlichen Bedingungen kombiniert. Wir führen nur die wesentlich verschiedenen Fälle vor und lassen die ähnlichen Fälle durch einen unter ihnen repräsentieren.

Die vorhandenen Beziehungen sind

1. Die perspektive Beziehung 1 und die zweiwinklige Beziehung (12), wenn

$$\lambda = \mu, \nu \text{ und } \rho$$

von diesen und von einander verschieden sind;

2. Die perspektive Beziehung 1 und die zweiwinkligen Beziehungen (12), (23), (31), wenn

$$\lambda = \mu = \nu \geq \rho$$

sind;

3. Die perspektive Beziehung 1 und die zweiwinkligen Beziehungen (12), (34), (12)(34), wenn

$$\lambda = \mu \geq \nu = \rho \geq \frac{1}{\lambda}$$

sind;

4. Die perspektiven Beziehungen 1 und (13)(24), die zweiwinkligen Beziehungen (13) und (24), die hyperbolischen Beziehungen (1234) und (1432), wenn

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \nu = \frac{1}{\rho} \geq -1$$

sind;

5. Die perspektive Beziehung 1 und die zweiwinkligen Beziehungen (12), (13), (14), (23), (24), (34), (12) (34), (13) (24), (14) (23), wenn

$$\lambda = \mu = \nu = \rho \geq -1$$

sind;

6. Die perspektiven Beziehungen 1, (12) (34), (13) (24), (14) (23) und die zweiwinkligen Beziehungen (12), (13), (14), (23), (24), (34), (1324), (1423), (1234), (1432), (1243), (1342), wenn

$$\lambda = \mu = \nu = \rho = -1$$

sind.

Die Zahlen der Mehrfachheit bei dieser Gruppe sind also

$$2, 4, 6, 10, 16.$$

II.

Die Grundbeziehung sei zweiwinklig, und zwar so, dass $A_1 B_1 A_2 B_2$ und $A_3 B_3 A_4 B_4$ sich schneiden.

Wählen wir den Schnittpunkt der Geraden $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ zum Einheitspunkte des Coordinatensystems und so seien die Coordinaten von $B_1 B_2 B_3 B_4$

$$\begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \nu & a \\ 1 & 1 & a & \rho. \end{array}$$

Dass die Beziehung nicht perspektiv sei, soll $a \geq 1$ sein. Dass die Punkte verschieden seien, sind die Fälle

$$\lambda = \mu = 1, \nu = \rho = a$$

auszuschließen.

Wir setzen voraus, dass keine der vorhandenen Beziehungen perspektiv ist und deshalb schließen wir die Fälle

$$\lambda = \mu = \frac{1}{a}, \nu = \rho = 1$$

aus, denn im ersten Falle die Beziehung (12), im zweiten Falle die Beziehung (34) wäre perspektiv.

1. Die Bedingung für die Beziehung (12) ist

$$\lambda = \mu.$$

2. Die Bedingung für die Beziehung (34) ist

$$\nu = \rho.$$

3. Die Bedingungen für die Beziehung (13) sind

$$\lambda = \nu, \alpha = 1.$$

Dieser Fall ist also auszuschließen, so wie auch (14), (23), (24).

4. Die Bedingungen für die Beziehung (123) sind

$$\lambda \alpha = \mu \alpha = 1, \nu = \alpha^2.$$

Dieser Fall ist also auch auszuschließen, so wie auch alle diejenigen, deren Zeichen aus einer Cykle mit drei Elementen bestehen.

5. Die Bedingungen für die Beziehung (12) (34) sind

$$\lambda = \mu, \nu = \rho.$$

6. Die Bedingungen für die Beziehung (13) (24) sind

$$\alpha \lambda = \nu, \alpha \mu = \rho.$$

7. Die Bedingungen für die Beziehung (1324) sind

$$\lambda = \mu = \frac{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha}{\rho}.$$

8. Die Bedingungen für die Beziehung (1234) sind

$$\alpha \lambda = \frac{1}{\mu} = \nu = \frac{\alpha}{\rho}.$$

Wir führen wieder nur die wesentlich verschiedenen Fälle vor. Die vorhandenen Beziehungen sind:

1. Die zweiwinklige Beziehung 1 und die hyperbolische Beziehung (13) (24), wenn

$$\alpha \lambda = \nu \geq \alpha \mu = \rho, 1 \geq \alpha \lambda \mu \geq \alpha;$$

2. Die zweiwinkligen Beziehungen 1 und (13) (24), wenn

$$\alpha \lambda = \nu \geq \alpha \mu = \rho, \lambda \mu = 1;$$

3. Die zweiwinkligen Beziehungen 1 und (13) (24), die hyperbolischen Beziehungen (1234) und (1432), wenn

$$\alpha \lambda = \frac{1}{\mu} = \nu = \frac{\alpha}{\rho}, 1 \geq \lambda \geq \mu \geq 1;$$

4. Die zweiwinkligen Beziehungen 1, (13) (24), (1234) und (1432), wenn

$$\alpha \lambda = \frac{1}{\mu} = \nu = \frac{\alpha}{\rho} = \alpha;$$

5. Die zweiwinkligen Beziehungen 1 und (12), wenn

$$\lambda = \mu, \nu \geq \rho;$$

6. Die zweiwinkligen Beziehungen 1, (12), (34) und (12) (34) wenn

$$\lambda = \mu, \nu = \rho, a\lambda \geq \nu \geq \frac{a}{\lambda}, \lambda\nu \geq 1;$$

7. Die zweiwinkligen Beziehungen 1, (12), (34) (12) (34) und die hyperbolischen Beziehungen (1324) (1423), wenn

$$\lambda = \mu = \frac{a}{\nu} = \frac{a}{\varphi} \geq -1;$$

8. Die zweiwinkligen Beziehungen 1, (12), (34), (12) (34) und die hyperbolischen Beziehungen (13) (24), (14) (23), wenn

$$a\lambda = a\mu = \nu = \rho \geq -a, a\lambda^2 \geq 1;$$

9. Die zweiwinkligen Beziehungen 1, (12), (34), (12) (34), (13) (24), (14) (23), (1324), (1423), wenn

$$a\lambda = a\mu = \nu = \rho = -a \geq \pm 1.$$

Die Zahlen der Vielfachheit sind also bei dieser Gruppe

$$2, 4, 6, 8.$$

III.

Wenn die vorhandenen Beziehungen sämtlich hyperbolisch sind, so kann unter den Zeichen keine einfache Transposition vorkommen.

Nehmen wir zuerst den Fall, wo neben der Grundbeziehung auch die Beziehung (13) (24) vorhanden ist.

Wenn man den Punkt B_1 zum Einheitspunkt wählt, sind die Coordinaten von $B_1 B_2 B_3 B_4$ nach den, die Beziehung (13) (24) charakterisierenden Bedingungen

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & c\lambda & c & b \\ 1 & c & ac & a \\ 1 & b & a & a\lambda \end{array}$$

Die Beziehungen sind hyperbolisch, wenn a, b, c verschieden und $a\lambda \geq 1, c\lambda \geq 1$ sind.

1. Auch die Beziehungen (12) (34), (14) (23) sind vorhanden, wenn $\lambda = b$ ist.

2. Auch die Beziehungen (1234), (1432) sind vorhanden, wenn $\lambda = \frac{b}{ac}$ ist.

3. Auch die Beziehungen (234), (243), (124), (142) sind vorhanden, wenn

$$\lambda = -1, a + c = 0, ac = b$$

sind.

Wir führen wieder nur die wesentlich verschiedenen Fälle vor und fügen die Bedingungen hinzu, dass die Beziehungen hyperbolisch und außer ihnen keine weiteren vorhanden seien.

Die vorhandenen Beziehungen sind:

1. Die hyperbolischen Beziehungen 1 und (13) (24), wenn die Bedingungen der folgenden Nummern nicht erfüllt sind;

2. die hyperbolischen Beziehungen 1, (1234), (13) (24), (1432) wenn

$$\lambda = \frac{b}{ac} \text{ und } b, ac, 1$$

von einander verschieden sind;

3. die hyperbolischen Beziehungen 1, (12) (34), (13) (24), (14) (23), wenn

$$\lambda = b, \text{ und } bc, ca, ab \text{ von } 1$$

verschieden sind;

4. die hyperbolischen Beziehungen 1, (13) (24), (234), (243), (124), (142), wenn

$$\lambda = -1, a + c = 0, ac = b$$

sind.

Ein einziger Fall blieb noch übrig, wo die Substitutions-Zeichen der außer der Grundbeziehung vorhandenen Beziehungen aus einer Cykle mit drei Elementen bestehen.

Wählen wir zum Repräsentanten den Fall, wo neben der Grundbeziehung die Beziehungen (234), (243) auftreten. Wenn man den Punkt B_1 zum Einheits-Punkt wählt, sind die Coordinaten von $B_1 B_2 B_3 B_4$

1	1	1	1
1	a	b	c
1	b	c	a
1	c	a	b

Die Beziehungen sind hyperbolisch und außer ihnen keine anderen sind vorhanden, wenn a, b, c verschieden sind und keiner der Gleichungenpaare

$$\begin{array}{ll}
 b + c = 0 & bc = a \\
 c + a = 0 & ca = b \\
 a + b = 0 & ab = c
 \end{array}$$

erfüllt ist.

Ich bemerke noch, dass dieselbe mehrfache Linearität auf mehrerlei Arten durch Substitutions-Zeichen charakterisiert werden können, denn eine jede der vorhandenen Beziehungen kann zur Grundbeziehung gewählt werden. Aber der Uebergang von dem einen Zeichen-System zum anderen kann sehr einfach geschehen.

Wenn man zur neuen Grundbeziehung diejenige wählt, deren altes Zeichen S war, so wird das neue Zeichen der alten Grundbeziehung S^{-1} sein, das neue Zeichen aber derjenigen Beziehung, deren altes Zeichen S_1 war, wird $S_1 S^{-1}$ sein, wo die Reihenfolge der Multiplication von rechts nach links verstanden ist.