Über eine funktionale Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper.

Von

Hans Rademacher in Berlin.

1. Nach dem Vorgange von Minkowski pflegt man einen konvexen Bereich des n -dimensionalen Raumes durch die Angabe einer gewissen Funktion von n Variablen, der Stützebenenfunktion, zu charakterisieren. Eine solche Funktion genügt nun drei kennzeichnenden Bedingungen, und zwar sind dies, im Falle von zwei Dimensionen, die folgenden Funktionalbeziehungen:

$$\text{I. } H(0, 0) = 0,$$

$$\text{II. } H(tu_1, tu_2) = tH(u_1, u_2) \text{ für } t > 0,$$

$$\text{III. } H(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \leq H(u_1, u_2) + H(v_1, v_2).$$

Gewisse geometrische Betrachtungen legen es nun nahe, statt der Ungleichung III eine andere einzuführen, und zwar schließe ich mich an eine Bemerkung des Herrn Blaschke an, wenn ich im folgenden für $H(u_1, u_2)$ die Bedingungen I, II, statt III jedoch die folgende

$$\text{IV. } \begin{vmatrix} H(u_1, u_2) & u_1 & u_2 \\ H(v_1, v_2) & v_1 & v_2 \\ H(w_1, w_2) & w_1 & w_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} \geq 0 \quad \text{für} \quad \begin{matrix} u_1^2 + u_2^2 = 1, \\ v_1^2 + v_2^2 = 1, \\ w_1^2 + w_2^2 = 1 \end{matrix}$$

zugrunde lege¹⁾. Es soll nun gezeigt werden, daß das System I, II, III völlig äquivalent mit I, II, IV ist.

¹⁾ W. Blaschke, Beweise zu Sätzen von Brunn und Minkowski über die Minimaleigenschaft des Kreises, Jahresbericht der D. Math. Ver. 23 (1914), S. 210–234, insb. S. 222, Anm. ⁶⁾. Dort führt der Verf. statt der Variablen u, v, w zwar die $\sin$ und $\cos$ dreier Winkel ein, da er überhaupt die Funktion $h(\varphi) = H(\sin \varphi, -\cos \varphi)$ betrachtet, doch wollen wir, des Anschlusses an den allgemeinen Fall halber, die Stützgeradenfunktion homogen schreiben.

Wollte man nun auch im dreidimensionalen Fall die Ungleichung III durch eine zu IV analoge ersetzen, so gelangt man damit nicht zum Ziel. Vielmehr wird sich zeigen, daß dadurch nur spezielle Stützebenenfunktionen, und zwar die der Kugel bestimmt werden.

2. Wir beweisen zunächst, daß aus I, II, III die Ungleichung IV folgt. Dazu ist nötig, zu zeigen, daß unter den Voraussetzungen $u_1^2 + u_2^2 = 1$, $v_1^2 + v_2^2 = 1$, $w_1^2 + w_2^2 = 1$ stets

$$(1) \quad |u_1 v_2 - v_1 u_2| + |v_1 w_2 - w_1 v_2| \geq |w_1 u_2 - u_1 w_2|$$

ist. Setzen wir nämlich

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin \alpha, & v_1 &= \sin \beta, & w_1 &= \sin \gamma, \\ u_2 &= \cos \alpha, & v_2 &= \cos \beta, & w_2 &= \cos \gamma, \end{aligned}$$

so nimmt (1) die Gestalt an

$$|\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)| \geq |\sin(\alpha - \gamma)|,$$

was wegen

$$(2) \quad |\sin(\alpha - \gamma)| = |\sin(\alpha - \beta) \cos(\beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma)|$$

stets erfüllt ist. Nimmt man nun die drei Wertepaare (u_1, u_2) , (v_1, v_2) , (w_1, w_2) voneinander verschieden an, so kann man (was man ev. durch Umbenennung erreichen kann) voraussetzen

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_2 \\ 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} > 0,$$

da ja drei verschiedene Punkte des Einheitskreises nicht in einer Geraden liegen können. Da nun wegen (1) und den zu (1) durch Vertauschung der Wertepaare hervorgehenden Ungleichungen stets die Summe der absoluten Beträge von zweien der Unterdeterminanten in (3) den absoluten Betrag der dritten überwiegt, so müssen von den drei Determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

entweder alle drei positiv oder zwei positiv und eine negativ sein. Im ersten Fall ist nach I und II wegen $D_1, D_2, D_3 \geq 0$

$$\begin{aligned} D_1 H(u_1, u_2) + D_2 H(v_1, v_2) + D_3 H(w_1, w_2) \\ = H(D_1 u_1, D_1 u_2) + H(D_2 v_1, D_2 v_2) + H(D_3 w_1, D_3 w_2), \end{aligned}$$

was nach III

$$\geq H(D_1 u_1 + D_2 v_1 + D_3 w_1, D_1 u_2 + D_2 v_2 + D_3 w_2) = H(0, 0) = 0$$

ist, so daß schließlich

$$(4) \quad \begin{vmatrix} H(u_1, u_2) & u_1 & u_2 \\ H(v_1, v_2) & v_1 & v_2 \\ H(w_1, w_2) & w_1 & w_2 \end{vmatrix} \geq 0$$

folgt, womit wegen der vorausgesetzten Ungleichung (3) die Bedingung IV bewiesen ist.

Im zweiten Falle sei etwa $D_1 > 0$, $D_2 \geq 0$, $D_3 < 0$. Dann folgt aus I, II und III

$$\begin{aligned} D_1 H(u_1, u_2) + D_2 H(v_1, v_2) &\geq H(D_1 u_1 + D_2 v_1, D_1 u_2 + D_2 v_2) \\ &= H(-D_3 w_1, -D_3 w_2) = -D_3 H(w_1, w_2), \end{aligned}$$

so daß (4) und damit IV wieder bestätigt ist.

3. Nun seien umgekehrt I, II und IV vorausgesetzt, und auf III soll geschlossen werden. Es seien (u_1, u_2) und (v_1, v_2) zwei beliebige Wertepaare, die nicht auf dem Einheitskreise zu liegen brauchen, über die jedoch zunächst noch

$$(5) \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

vorausgesetzt werden muß. Auf die drei Wertepaare

$$\begin{aligned} &\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, & \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \\ &\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, & \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \\ &\frac{u_1 + v_1}{\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2}}, & \frac{u_2 + v_2}{\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2}} \end{aligned}$$

läßt sich jedoch IV anwenden; die Wurzeln sind sämtlich positiv gemeint. Benutzt man gleich noch II und multipliziert mit positiven Faktoren, da es in IV doch nur auf das Vorzeichen ankommt, so erhält man

$$\begin{vmatrix} H(u_1, u_2) & u_1 & u_2 \\ H(v_1, v_2) & v_1 & v_2 \\ H(u_1 + v_1, u_2 + v_2) & u_1 + v_1 & u_2 + v_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} & u_1 & u_2 \\ \sqrt{v_1^2 + v_2^2} & v_1 & v_2 \\ \sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} & u_1 + v_1 & u_2 + v_2 \end{vmatrix} \geq 0$$

oder unter Berücksichtigung von (5)

$$(6) \quad \{H(u_1 + v_1, u_2 + v_2) - H(u_1, u_2) - H(v_1, v_2)\} \\ \{\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} - \sqrt{u_1^2 + u_2^2} - \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\} \geq 0.$$

Nun ist aber

$$\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2} + \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

denn

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 \leq +V(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)$$

nach der Schwarzschen Ungleichheit, wo das Gleichheitszeichen nur bei $u_1 : u_2 = v_1 : v_2$ gelten könnte, also durch (5) ausgeschlossen ist. Unter Voraussetzung von (5) ist also die zweite Klammer von (6) stets negativ, folglich die erste Klammer nicht positiv, d. h. III muß gelten.

Durch eine Stetigkeitsbetrachtung läßt sich (5) nachträglich ausschalten. Ist $u_3 = 0$, so folgt aus I und II sofort die Stetigkeit von H in u_1 . Für $u_3 \neq 0$, $\delta \neq 0$ ist aber

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \delta & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} u_1 + \delta & u_2 \\ \delta & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

so daß III bei der Einschränkung (5) anwendbar ist und

$$H(u_1, u_2) - H(-\delta, 0) \leq H(u_1 + \delta, u_2) \leq H(u_1, u_2) + H(\delta, 0)$$

ergibt. Ist G der größere der beiden Werte

$$|H(1, 0)| \quad \text{und} \quad |H(-1, 0)|,$$

so folgt aus II

$$|H(u_1 + \delta, u_2) - H(u_1, u_2)| \leq |\delta| \cdot G,$$

also auch diesmal die Stetigkeit von H in u_1 . Ebenso würde die Stetigkeit in u_2 sich ergeben.

Nun sei

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ist ein Wertepaar gleich 0, 0, so ist III wegen I ohnehin erfüllt. Sonst sei etwa $u_3 \neq 0$. Dann ist für $\delta \neq 0$ auch

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 + \delta & v_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

so daß III gültig ist und

$$H(u_1, u_2) + H(v_1 + \delta, v_2) \geq H(u_1 + v_1 + \delta, u_2 + v_2)$$

liefert, woraus wegen der Stetigkeit von H in jedem Argument

$$H(u_1, u_2) + H(v_1, v_2) \geq H(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

ohne jede Einschränkung folgt.

4. Wir gehen zum Fall von drei Dimensionen über. Vorausgesetzt sei also

$$I^*. \quad H(0, 0, 0) = 0,$$

$$II^*. \quad H(tu_1, tu_2, tu_3) = tH(u_1, u_2, u_3), \quad t > 0.$$

Wir wollen zunächst zeigen, daß

$$\text{III}^*. \quad H(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \leq H(u_1, u_2, u_3) + H(v_1, v_2, v_3)$$

stets gilt, sobald H die funktionale Ungleichung

$$\text{IV}^*. \quad \begin{vmatrix} H(u_1, u_2, u_3) & u_1 & u_2 & u_3 \\ H(v_1, v_2, v_3) & v_1 & v_2 & v_3 \\ H(w_1, w_2, w_3) & w_1 & w_2 & w_3 \\ H(x_1, x_2, x_3) & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \geq 0 \quad \text{bei} \quad \begin{matrix} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1 \\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{matrix}$$

erfüllt. Dagegen folgt aus I^* , II^* , III^* *nicht* IV^* , vielmehr ist I^* , II^* , IV^* für eine weit engere Klasse von Funktionen gültig als I^* , II^* , III^* .

Zunächst schließt man ganz analog zu den Überlegungen von § 3, daß unter der Voraussetzung

$$(7) \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

aus IV^*

$$(8) \quad \begin{aligned} H(u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2, u_3 + v_3 + w_3) \\ \leq H(u_1, u_2, u_3) + H(v_1, v_2, v_3) + H(w_1, w_2, w_3) \end{aligned}$$

folgt. Der Beweis für die Stetigkeit von H aus (7) und (8) läßt sich etwa folgendermaßen führen. Für

$$u_1 \neq 0, \quad u_2 \neq 0, \quad u_3 \neq 0$$

ist

$$(9) \quad \begin{vmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ -u_1 & 0 & 0 \\ 0 & -u_2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

also folgt aus (7) und (8)

$$H(u_1, u_2, u_3) \leq H(u_1, 0, 0) + H(0, u_2, 0) + H(0, 0, u_3)$$

und

$$H(u_1, u_2, u_3) + H(-u_1, 0, 0) + H(0, -u_2, 0) \geq H(0, 0, u_3),$$

also wegen II^* , wenn G der größte der sechs Werte

$$|H(\pm 1, 0, 0)|, \quad |H(0, \pm 1, 0)|, \quad |H(0, 0, \pm 1)|$$

ist,

$$(10) \quad |H(u_1, u_2, u_3)| \leq G(|u_1| + |u_2| + |u_3|),$$

jedoch nur unter der Voraussetzung (9).

Um nun die Stetigkeit von H in u_1 zu beweisen, kann man voraussetzen, daß nicht u_2 und u_3 beide verschwinden, da für diesen trivialen Fall die Stetigkeit aus I* und II* folgt:

$$(11a) \quad |H(u_1 + \delta, 0, 0) - H(u_1, 0, 0)| \leq G|\delta|.$$

Ist nun $\delta_1 \neq 0$ und verschwinden u_2 und u_3 nicht beide, so gibt es beliebig kleine von Null verschiedene Zahlen δ_2 und δ_3 , so daß

$$\begin{vmatrix} u_1 + \delta_1 & u_2 & u_3 \\ -\frac{\delta_1}{2} & \delta_2 & \delta_3 \\ -\frac{\delta_1}{2} & -\delta_2 & -\delta_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{\delta_1}{2} & \delta_2 & \delta_3 \\ \frac{\delta_1}{2} & -\delta_2 & -\delta_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ausfallen. Dann schließt man aus (7) und (8):

$$H(u_1, u_2, u_3) \leq H(u_1 + \delta_1, u_2, u_3) + H\left(-\frac{\delta_1}{2}, \delta_2, \delta_3\right) + H\left(-\frac{\delta_1}{2}, -\delta_2, -\delta_3\right),$$

$$H(u_1 + \delta_1, u_2, u_3) \leq H(u_1, u_2, u_3) + H\left(\frac{\delta_1}{2}, \delta_2, \delta_3\right) + H\left(\frac{\delta_1}{2}, -\delta_2, -\delta_3\right),$$

oder

$$\begin{aligned} -H\left(-\frac{\delta_1}{2}, \delta_2, \delta_3\right) - H\left(-\frac{\delta_1}{2}, -\delta_2, -\delta_3\right) &\leq H(u_1 + \delta_1, u_2, u_3) \\ -H(u_1, u_2, u_3) &\leq H\left(\frac{\delta_1}{2}, \delta_2, \delta_3\right) + H\left(\frac{\delta_1}{2}, -\delta_2, -\delta_3\right). \end{aligned}$$

Die beiden äußersten Seiten der Ungleichung erlauben aber eine Anwendung von (10), so daß man

$$|H(u_1 + \delta_1, u_2, u_3) - H(u_1, u_2, u_3)| \leq G(|\delta_1| + 2|\delta_2| + 2|\delta_3|)$$

erhält. Da hierin aber δ_2 und δ_3 beliebig klein wählbar sind, so ist

$$(11b) \quad |H(u_1 + \delta_1, u_2, u_3) - H(u_1, u_2, u_3)| \leq G \cdot |\delta_1|.$$

Die Ungleichungen (11) sagen zusammen aus, daß H in u_1 die Lipschitzsche Bedingung erfüllt. Da dies sich ebenso für die andern Variablen zeigen läßt, so folgt, daß H die Lipschitzsche Bedingung auch in allen drei Variablen zusammen erfüllt und also *stetig* ist.

Sind nun die u , die v , die w so beschaffen, daß

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0,$$

so gibt es in beliebiger Nähe dieser Werte andere, sie mögen

$$u'_1, u'_2, u'_3, v'_1, \dots \text{ usw.}$$

heißen, für die

$$\begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist und für die also

$$\begin{aligned} & H(u'_1 + v'_1 + w'_1, u'_2 + v'_2 + w'_2, u'_3 + v'_3 + w'_3) \\ & \leq H(u'_1, u'_2, u'_3) + H(v'_1, v'_2, v'_3) + H(w'_1, w'_2, w'_3) \end{aligned}$$

ist. Wegen der Stetigkeit von H folgt aber hieraus

$$\begin{aligned} & H(u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2, u_3 + v_3 + w_3) \\ & \leq H(u_1, u_2, u_3) + H(v_1, v_2, v_3) + H(w_1, w_2, w_3) \end{aligned}$$

ohne jede Einschränkung und für $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ insbesondere wegen I* die zu beweisende Ungleichung

$$H(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \leq H(u_1, u_2, u_3) + H(v_1, v_2, v_3).$$

5. Nun seien I*, II* und III* vorausgesetzt. Dann folgt auf bekannte Weise zunächst die Stetigkeit von H . Um nun IV* zu prüfen, seien die 12 Argumente $u_i, v_i, w_i, x_i, i = 1, 2, 3$ auf der Einheitskugel so gewählt, daß

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

ausfällt. Ist dann

$$B \equiv \begin{vmatrix} H(u_1, u_2, u_3) & u_1 & u_2 & u_3 \\ H(v_1, v_2, v_3) & v_1 & v_2 & v_3 \\ H(w_1, w_2, w_3) & w_1 & w_2 & w_3 \\ H(x_1, x_2, x_3) & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

so kann man eines der 12 Argumente so variieren lassen, daß D beide Vorzeichen annimmt, B dagegen wegen der Stetigkeit von H noch sein Vorzeichen bewahrt. Daher kann also IV* nur dann erfüllt sein, wenn bei jedem Verschwinden von D auch B verschwindet.

Das Verschwinden von D bedeutet nun, daß die vier Punkte (u_1, u_2, u_3) , (v_1, v_2, v_3) , (w_1, w_2, w_3) und (x_1, x_2, x_3) auf der Einheitskugel in einer Ebene liegen, oder daß die Tangentenebenen an die Einheitskugel an diesen vier Punkten durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Das Verschwinden von B sagt aus, daß die Ebene

$$u_1 \xi + u_2 \eta + u_3 \zeta = H(u_1, u_2, u_3)$$

mit den drei für v, w, x entsprechend gebildeten Ebenen einen gemeinsamen Punkt hat; diese vier Ebenen sind den eben erwähnten vier Tangentenebenen der Einheitskugel bzw. parallel. Nun erfüllt jede Stützebenenfunktion $H(u_1, u_2, u_3)$ eines konvexen Körpers die Bedingungen I*, II*, III*, dagegen erkennt man an den einfachsten Beispielen, daß es konvexe Körper gibt, deren Stützebenen nicht stets durch einen gemeinsamen Punkt gehen, sobald die ihnen parallelen Tangentenebenen der Einheitskugel durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Die Stützebenenfunktion eines solchen konvexen Körpers erfüllt also IV* *nicht*.

6. Nun sei $H(u_1, u_2, u_3)$ eine Funktion, die I*, II*, IV* und folglich nach § 4 auch III* erfüllt. Sie ist Stützebenenfunktion eines konvexen Bereichs K , von dem wir behaupten, daß er nur eine Kugel sein kann, die auch in einen Punkt ausarten kann²⁾. Ist P ein Punkt außerhalb von K , so gibt es durch P im allgemeinen drei linear unabhängige Stützebenen an K . Dies trifft nur dann nicht zu, wenn erstens K aus einem einzigen Punkt besteht, in welchem Falle bei jeder Wahl von P drei Stützebenen durch P an K linear abhängig sind, oder wenn zweitens K eine Strecke ist und dabei P in der geraden Verlängerung dieser Strecke liegt. Wenn K aber kein einzelner Punkt ist, so sei P ein solcher Punkt außerhalb von K , durch den es drei linear unabhängige Stützebenen an K gibt. Zu jeder dieser Stützebenen werde an die Einheitskugel die parallele Tangentenebene gelegt (und zwar diejenige, die die Einheitskugel auf derselben Seite läßt wie die ihr parallele Tangentenebene den Bereich K). Der Schnittpunkt dieser drei (gleichfalls linear unabhängigen) Tangentenebenen heiße Π . Durch Π sei eine variable Tangentenebene Σ an die Kugel gelegt. Die ihr parallele Stützebene S an K muß dann durch P gehen wegen der Gültigkeit von IV*. Bei ihrer Bewegung umhüllt Σ einen geraden Kreiskegel mit der Spitze Π , folglich umhüllt S einen geraden Kreiskegel mit der Spitze P . Das bedeutet aber, daß K von P aus in einem geraden Kreiskegel projiziert wird. Folglich kann K keine Strecke sein, und wenn K nicht aus einem einzigen Punkt besteht, so wird K also von *jedem* Punkte des Raumes aus in einem geraden Kreiskegel projiziert. Ein konvexer Bereich K von dieser Eigenschaft muß

²⁾ Daß jede den Bedingungen I*, II*, III* genügende Funktion die Stützebenenfunktion eines konvexen Bereiches ist, hat Minkowski nur unter einer weiteren Voraussetzung über die Positivität von $H(u_1, u_2, u_3) + H(-u_1, -u_2, -u_3)$ bewiesen (Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffes, Gesammelte Abhandlungen II, S. 131–229, insbesondere S. 150–153). Einen ohne jede Einschränkung gültigen Beweis habe ich in den Sitzungsberichten der Berliner Mathem. Ges. 20, S. 14–19 angegeben.

aber, wie man leicht einsieht, eine *Kugel* sein³⁾. Wenn es also überhaupt eine Funktion $H(u_1, u_2, u_3)$ gibt, die I^* , II^* und IV^* Genüge leistet, so kann H nur die Stützebenenfunktion einer Kugel oder eines Punktes sein. Daß nun eine solche Stützebenenfunktion in der Tat die erwähnten Bedingungen erfüllt, sieht man leicht geometrisch ein. Ist nämlich K ein einzelner Punkt, so sind vier Stützebenen stets linear abhängig und $B \equiv 0$. Ist K eine Kugel, so sind das aus vier Tangentenebenen an die Einheitskugel gebildete Tetraeder und das Tetraeder aus vier parallelen Stützebenen an K stets einander ähnlich und *gleich orientiert*. Folglich verschwinden nicht nur B und D simultan (was nach unseren Überlegungen ohnehin notwendig ist), sondern sie weisen stets das gleiche Vorzeichen auf, so daß $B \cdot D \geq 0$ erfüllt ist. Das Gleichheitszeichen gilt identisch nur für den Fall, daß K aus einem Punkt besteht.

7. Leichte Rechnungen zeigen, daß die Stützebenenfunktion der Kugel $(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 = r^2$

$$H(u_1, u_2, u_3) \equiv r \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} + au_1 + bu_2 + cu_3$$

ist (Wurzel positiv gemeint). Diese von nur vier willkürlichen Konstanten $r \geq 0, a, b, c$ abhängende Funktion ist also die einzige Lösung von I^*, II^*, IV^* .

Die Tatsache, daß eine Ungleichung wie IV^* eine Funktion so weit bestimmen kann, tritt noch deutlicher hervor, wenn man sich der beiden Bedingungen I^* und II^* entledigt. Die Ungleichung IV^* schreibt ja wegen ihrer Nebenbedingung $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ usw. nur eine Eigenschaft von $H(u_1, u_2, u_3)$ auf der Einheitskugel vor. Es sei nun eine Funktion $H(u_1, u_2, u_3)$ nur auf der Einheitskugel gegeben unter Erfüllung von IV^* . Dann erlauben die beiden Gleichungen I^* und II^* auf eine und nur eine Weise eine Fortsetzung von H im ganzen Raum. Und zwar wissen wir, daß die fortgesetzte Funktion auch III^* erfüllen wird und stetig sein wird. Die Ungleichung IV^* allein schreibt also schon auf der Einheitskugel Stetigkeit von H vor.

Beschränkt man sich also unter Beiseitelassen von I^* und II^* auf die Einheitskugel, zu welchem Zwecke wir Polarkoordinaten einführen wollen, so haben wir das Resultat:

Die funktionale Ungleichung

$$\begin{vmatrix} H(\varphi_1, \psi_1) & \sin \varphi_1 \cos \psi_1 & \sin \varphi_1 \sin \psi_1 & \cos \varphi_1 \\ H(\varphi_2, \psi_2) & \sin \varphi_2 \cos \psi_2 & \sin \varphi_2 \sin \psi_2 & \cos \varphi_2 \\ H(\varphi_3, \psi_3) & \sin \varphi_3 \cos \psi_3 & \sin \varphi_3 \sin \psi_3 & \cos \varphi_3 \\ H(\varphi_4, \psi_4) & \sin \varphi_4 \cos \psi_4 & \sin \varphi_4 \sin \psi_4 & \cos \varphi_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \sin \varphi_1 \cos \psi_1 & \sin \varphi_1 \sin \psi_1 & \cos \varphi_1 \\ 1 & \sin \varphi_2 \cos \psi_2 & \sin \varphi_2 \sin \psi_2 & \cos \varphi_2 \\ 1 & \sin \varphi_3 \cos \psi_3 & \sin \varphi_3 \sin \psi_3 & \cos \varphi_3 \\ 1 & \sin \varphi_4 \cos \psi_4 & \sin \varphi_4 \sin \psi_4 & \cos \varphi_4 \end{vmatrix} \geq 0$$

³⁾ Siehe z. B. Tadahiko Kubota, Einfache Beweise eines Satzes über die konvexe geschlossene Fläche, Tôhoku Science Reports 3 (1914), 235–255

wird nur erfüllt durch die Funktion

$$H(\varphi, \psi) = r + a \sin \varphi \cos \psi + b \sin \varphi \sin \psi + c \cos \varphi \text{ mit } r \geq 0.$$

Dagegen haben wir zu Beginn dieser Untersuchung festgestellt, daß die funktionale Ungleichung

$$\begin{vmatrix} H(\varphi_1) & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ H(\varphi_2) & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ H(\varphi_3) & \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ 1 & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ 1 & \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 \end{vmatrix} \geq 0$$

von der „Stützwinkelfunktion“ eines jeden ebenen konvexen Bereiches erfüllt wird.

23. April 1921.

(Eingegangen am 2. Mai 1921.)