Ueber die Euler'sche φ -Function.

Von

E. BUSCHE in Bergedorf bei Hamburg.

Die Gauss'sche Gleichung

$$(1) \quad \sum_x \varphi(x) = m \quad (m \equiv 0, \text{ mod. } x),$$

enthält bekanntlich eine charakteristische Eigenschaft der Function $\varphi(x)$, welche die Anzahl der zu x theilerfremden Zahlen angiebt, die kleiner als x sind. Diese Eigenschaft lässt sich als besonderer Fall einer allgemeineren darstellen in folgender Weise.

Wenn die Gleichungen (1) für $m = 1, 2, \dots, \nu$ summirt werden, so ergibt sich

$$(2) \quad \sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x) \cdot \left[\frac{\nu}{x} \right] = \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{2},$$

denn die Zahl x tritt $\left[\frac{\nu}{x} \right]$ mal als Theiler der Zahlen $1, 2 \dots \nu$ auf, wenn mit $[\alpha] \leq \alpha$ die grösste in α enthaltene ganze Zahl bezeichnet wird.

Setzt man in (2) einmal $\nu = n + n' + n'' + \dots$, dann $\nu = n$, $\nu = n', \dots$ und subtrahirt die letzteren Gleichungen von der ersten, so findet man

$$\begin{aligned} & \sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x) \cdot \left(\left[\frac{n+n'+n''+\dots}{x} \right] - \left[\frac{n}{x} \right] - \left[\frac{n'}{x} \right] - \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} (n + n' + \dots)^2 - \frac{1}{2} (n^2 + n'^2 + \dots) = \sum n n', \end{aligned}$$

wo die Summation rechts über alle Producte aus je zwei Zahlen n zu erstrecken ist. Nun ist, wenn mit

$$\Re(\alpha) = \alpha - [\alpha] < 1$$

der positive Bruchrest von α bezeichnet wird,*)

*) Ich wähle die Bezeichnung $\Re(\alpha)$, weil Herr Kronecker mit $R(\alpha)$ den absolut kleinsten Bruchrest bezeichnet.

$$\left[\frac{n+n'+n''+\dots}{x} \right] - \left[\frac{n}{x} \right] - \left[\frac{n'}{x} \right] - \dots = \left[\Re \left(\frac{n}{x} \right) + \Re \left(\frac{n'}{x} \right) + \dots \right],$$

so dass folgende Gleichung besteht:

$$(3) \quad \sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x) \cdot \left[\Re \left(\frac{n}{x} \right) + \Re \left(\frac{n'}{x} \right) + \dots \right] = \sum n n'.$$

Diese Gleichung enthält das Gauss'sche Theorem und andere Eigenschaften der φ -Function als specielle Fälle.

Setzt man z. B. $n = n' = n'' = \dots = 1$, so kommt man, wenn ν die Anzahl der Zahlen n ist, nach Addition von $\varphi(1) \cdot \left[\frac{\nu}{1} \right] = \nu$, wieder zu der Gleichung (2). Für $n' = n'' = \dots = n$ hat man

$$(4) \quad \sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x) \cdot \left[\nu \cdot \Re \left(\frac{n}{x} \right) \right] = \frac{\nu \cdot (\nu - 1)}{2} n^2.$$

Setzt man hierin $\nu - 1$ statt ν und subtrahirt die entstehende Gleichung, so folgt

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x) \cdot \left(\left[\nu \cdot \Re \left(\frac{n}{x} \right) \right] - \left[\nu \cdot \Re \left(\frac{n}{x} \right) - \Re \left(\frac{n}{x} \right) \right] \right) = (\nu - 1) n^2.$$

Der Coefficient von $\varphi(x)$ ist $= 0$ oder $= 1$, je nachdem

$$\Re \left(\nu \cdot \Re \left(\frac{n}{x} \right) \right) \geq \text{oder} < \Re \left(\frac{n}{x} \right)$$

ist. Da

$$(5) \quad \Re \left(\nu \cdot \Re \left(\frac{n}{x} \right) \right) = \Re \left(\frac{\nu \cdot n}{x} \right)$$

ist, so ist also

$$(6) \quad \sum \varphi(x) = (\nu - 1) \cdot n^2,$$

wenn x alle Werthe annimmt, welche die Bedingung

$$\Re \left(\frac{n}{x} \right) > \Re \left(\frac{\nu \cdot n}{x} \right)$$

erfüllen. Die Zahlen $x > n$, welche der Bedingung genügen, sind offenbar diejenigen Theiler der Zahlen $(\nu - 1)n + 1, (\nu - 1)n + 2, \dots, \nu \cdot n$, welche grösser als n sind. Für $n = 1$ geht (6) in die Gauss'sche Gleichung (1) über, wenn man $\varphi(1) = 1$ addirt, denn nur wenn $\nu \equiv 0 \pmod{x}$, ist $\frac{1}{x} > \Re \left(\frac{\nu}{x} \right)$.

Vertauscht man in (4) ν und n mit einander und subtrahirt die entstandene Gleichung von (4), so erhält man

$$\sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x) \left(\left[\nu \cdot \Re \left(\frac{n}{x} \right) \right] - \left[n \cdot \Re \left(\frac{\nu}{x} \right) \right] \right) = \frac{\nu \cdot n (\nu - n)}{2}.$$

Nun ist wegen (5)

$$\left[\nu \Re\left(\frac{n}{x}\right) \right] - \left[n \Re\left(\frac{\nu}{x}\right) \right] = \nu \Re\left(\frac{n}{x}\right) - n \Re\left(\frac{\nu}{x}\right),$$

da rechts die beiden Bruchreste sich fortheben, folglich, wenn durch $\nu \cdot n$ dividirt wird,

$$(7) \quad \sum_{x=1}^{\infty} \varphi(x) \left(\frac{1}{n} \Re\left(\frac{n}{x}\right) - \frac{1}{\nu} \Re\left(\frac{\nu}{x}\right) \right) = \frac{\nu - n}{2}.$$

Sind in (3) nur die zwei Zahlen n und n' von Null verschieden, so lässt sich diese Gleichung in anderer Weise schreiben. In diesem Falle ist nämlich

$$\left[\Re\left(\frac{n}{x}\right) + \Re\left(\frac{n'}{x}\right) \right] = 0 \text{ oder } = 1,$$

und es lässt sich leicht eine Bedingung dafür aufstellen, wann der eine, wann der andere Fall eintritt. Man nenne δ den grössten gemeinschaftlichen Theiler von n und n' und setze:

$$n = r \cdot \delta, \quad n' = r' \cdot \delta.$$

Sind dann $\frac{y}{r}$ und $\frac{y'}{r'} > \frac{y}{r}$ zwei auf einander folgende Brüche der Reihen $\frac{1}{r}, \frac{2}{r} \dots \frac{r-1}{r}$ und $\frac{1}{r'}, \frac{2}{r'} \dots \frac{r'-1}{r'}$, so dass

$$\frac{y'}{r'} - \frac{y}{r} = \frac{y'r - yr'}{rr'} < \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r'}$$

(d. h. kleiner als die kleinste der Zahlen $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{r'}$),

so liegt zwischen $\frac{y}{r}$ und $\frac{y'}{r'}$ ein und nur ein Bruch mit dem Nenner $r + r'$; es ist nämlich

$$\frac{y}{r} < \frac{y+y'}{r+r'} < \frac{y'}{r'}$$

und die positiven Differenzen

$$\frac{y+y'}{r+r'} - \frac{y}{r} = \frac{y'r - yr'}{r(r+r')} \quad \text{und} \quad \frac{y'}{r'} - \frac{y+y'}{r+r'} = \frac{y'r - yr'}{r'(r+r')}$$

sind beide kleiner als $\frac{1}{r+r'}$. Zwischen $\frac{y}{r}$ und $\frac{y+1}{r}$ und zwischen $\frac{y'}{r'}$ und $\frac{y'+1}{r'}$ liegt offenbar mindestens je ein Bruch mit dem Nenner $r + r'$. Das Intervall von 0 bis 1 zerfällt hiernach in $2(r+r'-1)$ Theilintervalle, deren jedes einerseits von einem Bruche mit dem Nenner $r + r'$, andererseits von einem Bruche mit einem der Nenner r oder r' begrenzt wird. Wenn nun $\Re\left(\frac{\delta}{x}\right)$ die Bedingung

$$\frac{y+y'-1}{r+r'} \leq \Re\left(\frac{\delta}{x}\right) < \frac{y}{r}, \quad \frac{y'}{r'}$$

erfüllt, d. h. wenn $\Re\left(\frac{\delta}{x}\right)$ in einem Theilintervall liegt, welches mit einem Bruche des Nenners $r + r'$ anfängt, so ist

$$\left[\frac{(r+r')\delta}{x}\right] = y + y' - 1, \quad \left[\frac{r\delta}{x}\right] = y - 1, \quad \left[\frac{r'\delta}{x}\right] = y' - 1,$$

also der Coefficient von $\varphi(x)$, nämlich

$$\left[\Re\left(\frac{r\delta}{x}\right) + \Re\left(\frac{r'\delta}{x}\right)\right] = \left[\frac{(r+r')\delta}{x}\right] - \left[\frac{r\delta}{x}\right] - \left[\frac{r'\delta}{x}\right] = 1.$$

Liegt dagegen $\Re\left(\frac{\delta}{x}\right)$ in einem mit einem Bruche des Nenners $r + r'$ schliessenden Intervall, ist also z. B.

$$\frac{y'-1}{r}, \quad \frac{y}{r} \leq \Re\left(\frac{\delta}{x}\right) < \frac{y+y'}{r+r'},$$

so ist

$$\left[\frac{(r+r')\delta}{x}\right] = y + y' - 1, \quad \left[\frac{r\delta}{x}\right] = y, \quad \left[\frac{r'\delta}{x}\right] = y' - 1,$$

mithin der Coefficient von $\varphi(x)$ gleich Null. Es ist folglich

$$(8) \quad \sum \varphi(x) = r \cdot r' \cdot \delta^2,$$

wenn x alle Werthe annimmt, welche die Bedingungen

$$\frac{y+y'-1}{r+r'} \leq \Re\left(\frac{\delta}{x}\right) < \frac{y}{r}, \quad \frac{y'}{r'} \quad (y=1, 2 \dots r, \quad y'=1, 2 \dots r')$$

erfüllen. Wir hatten vorausgesetzt, dass $\frac{y}{r}$, $\frac{y'}{r'}$ zwei auf einander folgende Brüche der Nenner r und r' wären; diese Voraussetzung braucht der Bedingung nicht hinzugefügt zu werden, denn dieselbe wird offenbar sicher nicht erfüllt, wenn zwischen $\frac{y}{r}$ und $\frac{y'}{r'}$ noch ein Bruch des Nenners r oder r' liegt. Die Gleichung (8) gilt, beiläufig bemerkt, in genau derselben Form, wenn r und r' nicht relativ prim sind. Für $\delta = n$, $r' = 1$, $r = \nu - 1$ geht (8) über in

$$\sum \varphi(x) = (\nu - 1) \cdot n^2, \\ \frac{y}{\nu} \leq \Re\left(\frac{n}{x}\right) < \frac{y}{\nu - 1} \quad (y = 1, 2, \dots \nu - 1).$$

Es ist nicht schwer nachzuweisen, dass die Bedingung dieser Gleichung mit der Bedingung von Gleichung (6) congruirt. Insbesondere ist für $n = 1$ nur dann

$$\frac{y}{\nu} \leq \frac{1}{x} < \frac{y}{\nu - 1},$$

oder

$$\nu - 1 < xy \leq \nu,$$

wenn x ein Theiler von ν ist, so dass auch aus (8) durch Specialisirung

wieder das Gauss'sche Theorem erhalten wird. Für $r = r' = 1$, $\delta = n$ ergibt sich aus (8):

Es ist

$$\sum \varphi(x) = n^2,$$

wenn x alle Zahlen durchläuft, für welche der Bruchrest von $\frac{n}{x} > \frac{1}{2}$ ist.

Durch andere Specialisirungen der willkürlichen Zahlen $n, n' \dots$ kann man aus der Gleichung (3) andere und andere Eigenschaften der Function φ ableiten, die aber, soweit ich sie untersucht habe, kein besonderes Interesse beanspruchen können.

Bergedorf, im August 1887.