SUR LES SURFACES IRRÉGULIÈRES, DONT LES GENRES SATISFONT À L'INÉGALITÉ:

$$p_g \geq 2(p_a + 2).$$

Note de **Alfred Rosenblatt** (Cracovie).

Adunanza del 12 gennaio 1913.

1. Dans deux Mémoires publiés récemment en Pologne ¹⁾, j'ai étudié les surfaces algébriques dont les genres, géométrique et arithmétique, satisfont à l'inégalité

$$(1) \quad p_g \geq 2(p_a + 2).$$

M. CASTELNUOVO avait montré que ces surfaces possèdent un faisceau irrationnel, de genre au moins égal à deux, de courbes de genre au moins égal à deux, et, en poursuivant ses idées, j'ai montré que le genre de ce faisceau est au moins égal à

$$\frac{p_g - 2p_a}{2}.$$

En m'appuyant sur ce résultat, ainsi que sur les formules classiques de M. NOETHER et de MM. CASTELNUOVO et ENRIQUES, j'ai pu montrer que les genres géométrique et arithmétique d'une surface algébrique, qui n'est ni réglée ni contenant un faisceau irrationnel de courbes elliptiques, satisfont à l'inégalité

$$(2) \quad p_g \leq \frac{8}{3}p_a + \frac{14}{3}.$$

M. CASTELNUOVO a bien voulu me communiquer qu'il avait, de son côté, déduit des formules mentionnées une inégalité limitant le genre π' du faisceau irrationnel et le genre π des courbes de ce faisceau. En effet, on a

$$(3) \quad \pi + \pi' \geq p_g - p_a$$

et

$$(4) \quad 12p_a + 13 - p^{(1)} \geq 4(\pi - 1)(\pi' - 1),$$

aussi bien que

$$(5) \quad p^{(1)} \geq 2p_g + 2\delta - 3 \quad (\delta \leq p_g - p_a).$$

¹⁾ A. ROSENBLATT: a) *Sur certaines classes de surfaces algébriques irrégulières et sur les transformations birationnelles de ces surfaces en elles-mêmes* [Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Série A: Sciences Mathématiques, Année 1912, pp. 761-810 (séance du 1^{er} juillet 1912)]; b) *Sur les surfaces algébriques irrégulières de genre linéaire* $p^{(1)} > 1$ [Prace Matematyczno-Fizyczne, t. XXIII (1912), pp. 17-24].

On en tire les inégalités

$$\begin{aligned} 4(\pi - 1)(\pi' - 1) &\leq 12p_a - 2p_g - 2\delta + 16 \\ &\leq 8p_a - 2\delta + 8 \end{aligned}$$

et

$$\pi + \pi' \geq p_a + 4,$$

qui donnent à leur tour

$$4(\pi - 1)(\pi' - 1) \leq 8(\pi + \pi') - 2\delta - 24,$$

donc

$$(6) \quad (\pi - 3)(\pi' - 3) \leq 2 - \frac{\delta}{2}.$$

2. Maintenant, si l'on refait ce calcul, en introduisant la différence

$$m = p_g - 2(p_a + 2),$$

on a

$$4(\pi - 1)(\pi' - 1) \leq 8p_a - 2\delta - 2m + 8$$

et

$$\pi + \pi' \geq p_a + m + 4,$$

donc il vient l'inégalité plus expressive

$$(6'') \quad (\pi - 3)(\pi' - 3) \leq -\frac{5}{2}m - \frac{\delta}{2} + 2.$$

Maintenant nous avons l'inégalité

$$\pi' \geq \frac{m}{2} + 2.$$

Donc, supposant le genre des courbes du faisceau au moins égal à trois, il vient

$$(\pi - 3)\left(\frac{m}{2} + 2\right) - 3(\pi - 3) \leq -\frac{5}{2}m - \frac{\delta}{2} + 2,$$

donc

$$m \leq \frac{2(\pi - \frac{\delta}{2} - 1)}{\pi + 2} = 2 - \frac{6 + \delta}{\pi + 2}.$$

Il en résulte que l'on a

$$m \leq 1,$$

mais m ne peut pas évaluer 1, car π' serait alors au moins égal à trois, ce qui contredit l'inégalité (6'').

Nous avons donc $m = 0$, c'est-à-dire

$$p_g = 2p_a + 4,$$

et les genres π , π' satisfont à l'inégalité (6).

Supposons, en second lieu, le genre des courbes égal à deux; alors on a

$$\pi' \geq p_a + m + 2,$$

mais, d'autre part, l'inégalité (6'') donne

$$\pi' \geq \frac{5}{2}m + \frac{\delta}{2} + 1.$$

Comme on a

$$\pi' = p_g - p_a - \varepsilon \quad (\varepsilon = 0, 1, 2),$$

on trouve

$$p_g \leq \frac{8}{3}p_a - \frac{\delta}{3} + 6 - \frac{2\varepsilon}{3},$$

c'est-à-dire l'inégalité (2), si $\varepsilon = 2$.

Nous avons donc le résultat :

« Si le genre géométrique dépasse deux fois le genre arithmétique plus quatre, la surface possède un faisceau de courbes de genre deux, faisceau dont le genre est au moins égal à $p_g - p_a - 2$ ».

3. Si l'on peut remplacer l'inégalité (5) par l'inégalité plus avantageuse

$$(5^a) \quad p^{(1)} \geq 3(p_g + \delta - 2),$$

alors le calcul refait donne l'inégalité

$$(6^b) \quad (\pi - \frac{\varepsilon}{2})(\pi' - \frac{\varepsilon}{2}) \leq -\frac{9}{4}m - \frac{3}{4}\delta + 1,$$

inégalité que M. CASTELNUOVO nous a communiquée avec $m = 0$.

Discutons l'inégalité (6), en supposant $p_g = 2p_a + 4$. Cette inégalité limite le genre π' , si le genre π dépasse le nombre 3. On trouve de suite :

$$\text{si } \pi = 4: \pi' \leq 5,$$

$$\text{si } \pi = 5: \pi' \leq 4,$$

$$\text{si } \pi > 5: \pi' \leq 3.$$

On a ensuite

$$p_a \leq \pi + \pi' - 4, \quad p_g \leq 2(\pi + \pi') - 4,$$

donc dans les deux premiers cas

$$p_a \leq 5, \quad p_g \leq 14.$$

L'inégalité (6^b) limite π' dès que π dépasse deux, et π' est égal à deux dès que π dépasse le nombre quatre.

4. Supposons maintenant que la surface envisagée possède un faisceau de genre $\pi' \geq p_g - p_a - 2$ de courbes de genre deux. Envisageons le système linéaire canonique $|K|$ de la surface. Les courbes de ce système découpent les séries g_2^1 canoniques sur les courbes C du faisceau $\{C\}$. Ce système $|K|$ appartient à un système algébrique $\{K\}$ plus ample, composé de $\infty^{p_g - p_a}$ systèmes paracanoniques $|K^*|$ de dimension effective au moins égale à la dimension virtuelle p_a .

Parmi ces systèmes $|K^*|$, il y en a $\infty^{\pi'}$ systèmes qu'on peut obtenir du système $|K|$ en ajoutant un groupe de π' courbes C et en retranchant un autre groupe de π' courbes C , non équivalent au premier

$$|K^*| = |K + \sum_1 C - \sum_2 C|.$$

Ces systèmes paracanoniques, et seulement ces systèmes, découpent sur les courbes C du faisceau la série canonique. Il s'ensuit que, si le genre π' est plus petit que $p_g - p_a$, on a $\infty^{p_g - p_a}$ systèmes paracanoniques, qui découpent sur les courbes C des groupes pa-

racanoniques de deux points. Tous ces systèmes sont alors nécessairement réductibles, composés d'une courbe isolée D , découpant les groupes paracanoniques sur les courbes C et d'un certain nombre de courbes C . Ces systèmes $|K^*|$ donnent donc des séries linéaires de courbes C de dimension au moins égale à p_a . Si ces séries linéaires sont spéciales, elles sont composées de groupes de $m \geq 2p_a$ courbes C , sinon on a

$$m = r + \pi' \geq p_a + p_g - p_a - \varepsilon = p_g - \varepsilon,$$

$\varepsilon = 1$, ou 2 , mais, comme on a $p_g \geq 2p_a + 4$, on a donc toujours $m > 2p_a$, excepté si la série linéaire est canonique dans le faisceau, ou bien si le faisceau est hyperelliptique: alors on pourrait avoir $m = 2p_a$.

Calculons maintenant le genre π_{K^*} virtuel d'une courbe paracanonique K^* composée comme il suit

$$K^* = D + mC.$$

On a

$$\pi_{K^*} = \pi_D + \pi_{mC} + (D, mC) - 1,$$

en désignant par (D, mC) le nombre des points d'intersection de D avec m courbes C .

On a

$$(D, mC) = 2m.$$

D'autre part, on a

$$\pi_{mC} = 2m - (m - 1) = m + 1.$$

Enfin le genre π_D se calcule par la formule de M. ZEUTHEN, puisque la courbe D contient une involution de genre π' de deux points. On a donc

$$2(\pi_D - 1) - 4(\pi' - 1) \geq 0,$$

donc

$$\pi_D \geq 2\pi' - 1.$$

On a donc

$$\pi_{K^*} = p^{(1)} \geq 3m + 2\pi' - 1,$$

donc, si $m > 2p_a$, on trouve

$$6p_a + 2(p_g - p_a - \varepsilon) - 1 < p^{(1)} \leq 12p_a + 13 - 4(p_g - p_a - \varepsilon - 1),$$

donc

$$6p_g < 12p_a + 6\varepsilon + 18,$$

$$p_g < 2p_a + \varepsilon + 3$$

($\varepsilon = 1, 2$).

On pourrait avoir le signe d'égalité au lieu du signe d'inégalité, si m était égal à $2p_a$. Le faisceau est alors nécessairement hyperelliptique, car la série canonique dans le faisceau a la dimension

$$p_g - p_a - \varepsilon - 1 > p_a.$$

On écarte ce cas, en remarquant qu'il n'y a qu'une série spéciale avec $m = 2p_a$, et qu'il suffit d'envisager un autre système paracanonique. On obtient d'un système paracanonique $\infty^{\pi'}$ autres systèmes, en ajoutant et retranchant deux groupes de π' courbes C non équivalents.

Nous parvenons donc à la conclusion suivante: « Si le genre géométrique de la surface dépasse deux fois le genre arithmétique plus quatre, la surface possède, si elle

existe, un faisceau de courbes de genre deux, faisceau dont le genre est précisément $p_g - p_a$ ».

5. Envisageons maintenant les surfaces de genres

$$p_g = 2p_a + 4,$$

possédant un faisceau de genre $\geq p_a + 2$ de courbes de genre deux. Supposons le genre du faisceau plus petit que $p_g - p_a = p_a + 4$. Alors la surface possède $\infty^{p_g - p_a}$ systèmes linéaires paracanoniques découpant des groupes paracanoniques sur les courbes C . Soit

$$\pi' = p_a + 4 - \varepsilon \quad (\varepsilon = 1, 2)$$

le genre du faisceau; alors les courbes D isolées forment un système algébrique $\{D\} \infty^\varepsilon$ de courbes non équivalentes. La courbe paracanonique K^* se compose de D et de m courbes C . Comme on obtient d'un système paracanonique $|K^*| \infty^{\pi'}$ systèmes non équivalents en ajoutant et en retranchant de $|K^*|$ deux groupes de π' courbes C non équivalents, on peut supposer que les groupes de m courbes C forment dans le faisceau une série non spéciale. Donc, comme la dimension r de cette série est au moins égale à p_a , on a

$$p_a \leq m - \pi',$$

donc

$$m \geq 2p_a + 4 - \varepsilon = 2\pi' - 4 + \varepsilon.$$

Calculons maintenant le degré virtuel de la courbe K^*

$$K^* = D + mC.$$

On a

$$n_{K^*} = n_D + 2m(C, D),$$

en désignant par (C, D) le nombre de points communs aux courbes C et D , nombre égal à deux. Donc on a

$$n_D + 4m = p^{(1)} - 1.$$

Il vient alors

$$4(2\pi' - 4 + \varepsilon) + n_D \leq 12p_a + 12 - 4(\pi' - 1),$$

$$n_D \leq 12p_a - 12\pi' + 32 - 4\varepsilon = 8\varepsilon - 16.$$

Mais on a $n_D \geq 0$, donc on a le résultat suivant:

« Si le genre π' est inférieur à $p_g - p_a$, il est égal à $p_g - p_a - 2$, et la surface possède un second faisceau irrationnel de genre deux ».

Ce dernier faisceau ne peut qu'être composé de courbes *unisécantes* par rapport aux courbes C . En effet, on sait que les courbes de genre deux ne peuvent contenir que des involutions elliptiques. On a alors la surface bien connue, possédant deux faisceaux de courbes unisécantes de genres

$$p_1 = p_a + 2, \quad p_2 = 2,$$

dont les invariants sont

$$p_g = p_1 p_2 = 2(p_a + 2), \quad p_a = p_1 p_2 - p_1 - p_2 = p_a,$$

$$p^{(1)} = 8p_a + 9.$$

Cette surface possède le système canonique linéaire irréductible et ∞^{p_1} systèmes paracanoniques irréductibles de dimension $2p_1 - 3$, tandis que les systèmes paracanoniques réductibles ont en général la dimension $p_1 - 2$, mais qu'il y a ∞^2 systèmes réductibles de dimension $p_1 - 1$.

6. Revenons au cas général de surfaces à invariants

$$p_g = 2p_a + 4.$$

Leur système canonique linéaire $[K]$ contient des courbes composées de m courbes C du faisceau et d'une courbe D coupant ces courbes en $2(\pi - 1)$ points. Le genre de cette dernière courbe satisfait donc à l'inégalité

$$\pi_D \geq 2(\pi - 1)(\pi' - 1) + 1.$$

On a l'inégalité

$$p^{(1)} \equiv \pi_K = \pi_{mC} + m(C, D) + \pi_D - 1 \leq 12p_a + 13 - 4(\pi - 1)(\pi' - 1),$$

en désignant par (C, D) le nombre des intersections des courbes C et D . On a donc l'inégalité

$$3m(\pi - 1) + 6(\pi - 1)(\pi' - 1) \leq 12p_a + 12,$$

donc

$$\frac{m}{2}(\pi - 1) + (\pi - 3)(\pi' - 3) \leq 2.$$

Cette inégalité limite le genre π' du faisceau de courbes de genre trois que la surface peut posséder. En effet, on peut certainement supposer le nombre m au moins égal au plus grand entier contenu dans $\frac{p_g - 1}{\pi}$, puisqu'en forçant les courbes K à passer par π points arbitraires d'une courbe C , on décompose ces courbes K en cette courbe C et en des courbes résiduelles. Donc m est au moins égal à

$$\frac{p_g - 1}{\pi} - \frac{\pi - 1}{\pi} = \frac{p_g - \pi}{\pi} = \frac{2p_a + 4 - \pi}{\pi} \geq \frac{2\pi' - 4 - \pi}{\pi}.$$

Il vient alors

$$(2\pi' - \pi - 4)(\pi - 1) + 2\pi(\pi' - 3)(\pi - 3) \leq 4\pi,$$

$$\pi'(2\pi^2 - 4\pi - 2) \leq 7\pi^2 - 11\pi - 4,$$

donc on a :

$$\text{si } \pi = 3: \quad \pi' \leq 6,$$

$$\text{si } \pi = 4, 5: \quad \pi' \leq 4,$$

$$\text{si } \pi > 5: \quad \pi' \leq 3.$$

7. Revenons enfin aux surfaces possédant un faisceau de genre π' de courbes de genre deux, et envisageons l'involution I_2 de couples de points conjugués sur les courbes hyperelliptiques. L'image de cette involution est une surface réglée de genre π' . La courbe E de coïncidence de l'involution coupe les courbes C du faisceau en six points,

et on a évidemment l'équivalence

$$(7) \quad 2E + \lambda C \equiv 6K + \mu C,$$

λ, μ étant deux nombres positifs et K une courbe canonique. Soit $\nu = \mu - \lambda$. La courbe canonique coupe la courbe de coïncidence en

$$3(p^{(1)} - 1) + \nu$$

points et le degré virtuel de la courbe de diramation est égal à

$$9(p^{(1)} - 1) + 6\nu,$$

ce qu'on établit de suite au moyen de l'équivalence (7). Maintenant l'image d'une courbe canonique sur la surface réglée est une courbe K^* de genre π' , unisécante par rapport aux génératrices. La formule de M. ZEUTHEN donne alors

$$2(p^{(1)} - 1) = 4(\pi' - 1) + 3(p^{(1)} - 1) + \nu,$$

donc

$$(8) \quad p^{(1)} = -\nu - 4\pi' + 5.$$

Envisageons maintenant les invariants I et I^* de la surface donnée et de la surface réglée, image de l'involution. On a évidemment

$$I = 12p_a + 9 - p^{(1)}, \quad I^* = -4\pi',$$

et, d'après M. SEVERI,

$$I = 2I^* + 2\pi_D + 2,$$

π_D étant le genre de la courbe de coïncidence. On calcule de suite le genre de cette courbe au moyen de l'équivalence (7) et on trouve

$$\pi_D = \frac{7}{2}\nu + 6p^{(1)} - 5,$$

donc il vient

$$12p_a = 7\nu + 13p^{(1)} - 8\pi' - 17.$$

Cela donne la formule

$$(9) \quad p_a = -\frac{\nu}{2} - 5\pi' + 4.$$

La formule (8) nous a été communiquée par M. GODEAUX qui a étudié la correspondance entre la surface donnée et la surface réglée, image de l'involution. Les formules (8) et (9) donnent l'égalité

$$(10) \quad p^{(1)} - 2p_a = 6\pi' - 3.$$

Rappelons maintenant qu'on a toujours

$$p^{(1)} \leq 12p_a + 13 - 4(\pi' - 1).$$

Nous voyons alors qu'on peut écrire l'inégalité

$$\pi' \leq p_a + 2.$$

Soit alors $\pi' = p_g - p_a - \varepsilon$ le genre du faisceau, ε étant égal à 0, 1 ou bien à 2.

On parvient alors à l'inégalité

$$(11) \quad p_g \leq 2p_a + \varepsilon + 2.$$

Les surfaces avec $p_g > 2p_a + 4$ n'existent donc pas, et si p_g est égal à $2p_a + 4$, on a $\varepsilon = 2$, et alors on a la surface envisagée au n° 5.

Cracovie, janvier 1913.

ALFRED ROSENBLATT.