**ALCUNE APPLICAZIONI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI FUNZIONALI
ALLA FISICA-MATEMATICA,**

del Prof. GIUSEPPE LAURICELLA.

CAPITOLO IV.

*Problema interno di equilibrio di elasticità
per dati spostamenti in superficie.*

1. Siano date tre funzioni finite e continue $u(x, \beta)$, $v(x, \beta)$, $w(x, \beta)$ dei punti della superficie σ . Si consideri il sistema di equazioni funzionali:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \phi(x, \beta) d\sigma &= u(x', \beta'), \\ \psi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X''_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \phi(x, \beta) d\sigma &= v(x', \beta'), \\ \chi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'''_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \phi(x, \beta) d\sigma &= w(x', \beta'), \end{aligned} \right.$$

dove le $X'_{\sigma}(x, \beta; x', \beta')$, $X''_{\sigma}(x, \beta; x', \beta')$,... sono le funzioni date dalle formule (14) al Cap. II, e dove le $\phi(x, \beta)$, $\psi(x, \beta)$, $\chi(x, \beta)$ sono le funzioni incognite; si considerino ancora il corrispondente sistema di equazioni omogenee:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \phi(x, \beta) d\sigma &= 0, \\ \psi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X''_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \phi(x, \beta) d\sigma &= 0, \\ \chi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'''_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \phi(x, \beta) d\sigma &= 0, \end{aligned} \right.$$

e il sistema a questo *coniugato*:

$$(3)_1 \quad \begin{cases} \phi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \phi_1(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \psi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X''_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \phi_1(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \chi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'''_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \phi_1(x, \beta) d\sigma = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che le funzioni caratteristiche dei sistemi di equazioni (1), (2), $X'_{\sigma}(x, \beta; x', \beta')$, $Y'_{\sigma}(x, \beta; x', \beta')$, sono formate ciascuna dal prodotto di una funzione finita e continua

(la continuità esclusa per $x = x'$, $\beta = \beta'$) per l'espressione $\frac{d}{dn} \frac{1}{r}$; sicchè esse sono sempre finite e continue, e solo per $x = x'$, $\beta = \beta'$ divergono infinite come $\frac{1}{\{(x - x')^2 + (\beta - \beta')^2\}^{1/2}}$ (Cfr. Capitolo III, § 2).

Un fatto analogo si verifica per le funzioni caratteristiche del sistema di equazioni (3)₁: $X'_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta)$, $Y'_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta)$, ...

2. Dimostriamo che *il sistema di equazioni (3), non ammette soluzione alcuna.*

Infatti ammesso che le funzioni $\phi_1(x, \beta)$, $\psi_1(x, \beta)$, $\chi_1(x, \beta)$ formino una soluzione del sistema (3)₁, si formi con esse il seguente sistema di strati elastici:

$$u_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \phi_1(x, \beta) \cdot u' d\sigma, \quad v_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \phi_1(x, \beta) \cdot v' d\sigma, \\ w_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \phi_1(x, \beta) \cdot w' d\sigma.$$

In virtù del teorema 1° al Capitolo precedente, le funzioni $\phi_1(x, \beta)$, $\psi_1(x, \beta)$, $\chi_1(x, \beta)$ dovranno essere finite e continue su tutta la superficie σ ; e quindi, considerate le $u_1(\xi, \eta, \zeta)$, $v_1(\xi, \eta, \zeta)$, $w_1(\xi, \eta, \zeta)$ come le componenti di una deformazione del mezzo infinito S' , si avrà per le componenti delle corrispondenti pseudo-tensioni nei punti di σ , ricorrendo alle formole (20)¹ del Cap. II,

$$(4) \begin{cases} \bar{U}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = \Phi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma, \\ \bar{V}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = \Psi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma, \\ \bar{W}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = \chi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma. \end{cases}$$

Queste ci danno in virtù delle (3)₁:

$$(3')_1 \quad \bar{U}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = 0, \quad \bar{V}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = 0, \quad \bar{W}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = 0,$$

qualunque sia il punto $p' \equiv (x', \beta')$ di σ ; ed allora, in forza del risultato 4° al § 8 del Cap. I, si avrà:

$$(\text{in tutto } S') \quad u_1(\xi, \eta, \zeta) = v_1(\xi, \eta, \zeta) = w_1(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Siccome le funzioni $u_1(\xi, \eta, \zeta)$, $v_1(\xi, \eta, \zeta)$, $w_1(\xi, \eta, \zeta)$ sono continue anche quando il punto $P \equiv \xi, \eta, \zeta$ attraversa la superficie σ , così si avrà, in virtù del risultato 1° al § 7 del Cap. I,

$$(\text{in tutto } S) \quad u_1(\xi, \eta, \zeta) = v_1(\xi, \eta, \zeta) = w_1(\xi, \eta, \zeta) = 0;$$

e quindi ancora, per P variabile nel campo finito S , adottando le (20) del Cap. II,

$$\bar{U}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -\Phi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma = 0,$$

$$\bar{V}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -\Psi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma = 0,$$

$$\bar{W}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -\chi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma = 0.$$

Queste, unite alle (4) e alle (3')₁, ci danno per qualunque punto (x', β') di σ :

$$0 = \bar{U}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') - \bar{U}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = 2\Phi_1(x', \beta'), \quad 0 = \bar{V}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') - \bar{V}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = 2\Psi_1(x', \beta'), \\ 0 = \bar{W}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') - \bar{W}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = 2\chi_1(x', \beta'),$$

ossia su tutta la superficie σ :

$$\Phi_1(x, \beta) = 0, \quad \Psi_1(x, \beta) = 0, \quad \chi_1(x, \beta) = 0,$$

come volevamo dimostrare.

3. Come conseguenza del teorema testè stabilito, si ha, in virtù del teorema 1° al § 1 del Capitolo precedente, che il sistema (2)₁ non ammette soluzione alcuna; e quindi per il teorema 2° al § 1 del Capitolo precedente, avremo che il sistema di equazioni (1)₁ ammette una soluzione $\Phi(x, \beta)$, $\Psi(x, \beta)$, $\chi(x, \beta)$, che sarà finita e continua, ed una solamente. Con questa soluzione si formi il sistema di pseudo-doppi strati elastici:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma} \cdot \Phi(x, \beta) d\sigma, \quad v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma} \cdot \Phi(x, \beta) d\sigma,$$

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma} \cdot \Phi(x, \beta) d\sigma.$$

Dalle formole (16) al Cap. II e dalle equazioni (1)₁, risulta, per $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo finito S,

$$\lim_{P \rightarrow p'} u(\xi, \eta, \zeta) = \Phi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \Phi(x, \beta) d\sigma = u(x', \beta'),$$

$$\lim_{P \rightarrow p'} v(\xi, \eta, \zeta) = \Psi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \Phi(x, \beta) d\sigma = v(x', \beta'),$$

$$\lim_{P \rightarrow p'} w(\xi, \eta, \zeta) = \chi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \Phi(x, \beta) d\sigma = w(x', \beta').$$

Adunque le funzioni $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$, $w(\xi, \eta, \zeta)$ nei punti del campo finito S soddisfano alle equazioni dell'equilibrio (1) del Cap. I e nei punti di σ coincidono con le funzioni arbitrariamente date $u(x, \beta)$, $v(x, \beta)$, $w(x, \beta)$; esse quindi risolvono il problema interno di equilibrio di elasticità per dati spostamenti in superficie.

*Problema esterno di equilibrio di elasticità
per dati spostamenti in superficie.*

4. Siano date tre funzioni finite e continue dei punti di σ : $u(x, \beta)$, $v(x, \beta)$, $w(x, \beta)$. Si considerino i seguenti sistemi di equazioni funzionali:

$$(1)_s \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma = u(x', \beta'), \\ \psi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X''_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma = v(x', \beta'), \\ \chi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'''_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma = w(x', \beta'); \end{array} \right.$$

$$(2)_s \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \psi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X''_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \chi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'''_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma = 0; \end{array} \right.$$

$$(3)_s \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \varphi_1(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \psi_1(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X''_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \varphi_1(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \chi_1(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'''_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \varphi_1(x, \beta) d\sigma = 0, \end{array} \right.$$

dei quali sistemi il secondo è il sistema omogeneo corrispondente al sistema $(1)_s$, il sistema $(3)_s$ è il coniugato del sistema $(2)_s$. A questi sistemi di equazioni funzionali sono applicabili i teoremi al § 1 del Capitolo precedente,

Ciò premesso, osserviamo che il sistema $(2)_2$, come risulta dalle formole (6) al Cap. II, ammette le tre soluzioni linearmente indipendenti:

$$(5) \quad \begin{cases} \Phi'(x, \beta) = a, & \Psi'(x, \beta) = 0, & \chi'(x, \beta) = 0; \\ \Phi''(x, \beta) = 0, & \Psi''(x, \beta) = b, & \chi''(x, \beta) = 0; \\ \Phi'''(x, \beta) = 0, & \Psi'''(x, \beta) = 0, & \chi'''(x, \beta) = c, \end{cases}$$

con a, b, c costanti arbitrarie; sicchè il sistema $(3)_2$ ammette almeno tre soluzioni finite e continue su σ :

$$(6) \quad \begin{cases} \Phi'_1(x, \beta), \Psi'_1(x, \beta), \chi'_1(x, \beta); \Phi''_1(x, \beta), \Psi''_1(x, \beta), \chi''_1(x, \beta); \\ \Phi'''_1(x, \beta), \Psi'''_1(x, \beta), \chi'''_1(x, \beta), \end{cases}$$

generalmente diverse da zero e linearmente indipendenti.

5. Vogliamo ora dimostrare che *il sistema $(3)_2$ non ammette alcuna altra soluzione all'infuori di quelle tre ora segnalate.*

Per questo, cominciamo dal formare con una soluzione qualsiasi $\Phi_1(x, \beta), \Psi_1(x, \beta), \chi_1(x, \beta)$ del sistema $(3)_2$ il seguente sistema di strati elastici:

$$(7) \quad \begin{cases} u_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \Phi_1(x, \beta) \cdot u' d\sigma, & v_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \Phi_1(x, \beta) \cdot u'' d\sigma, \\ w_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \Phi_1(x, \beta) \cdot u''' d\sigma. \end{cases}$$

In forza della continuità su σ delle funzioni $\Phi_1(x, \beta), \Psi_1(x, \beta), \chi_1(x, \beta)$ e in virtù delle formole (20) al Cap. II, si ha per le componenti delle pseudo-tensioni nei punti di σ , corrispondenti alla deformazione del mezzo S di componenti $u_1(\xi, \eta, \zeta), v_1(\xi, \eta, \zeta), w_1(\xi, \eta, \zeta)$,

$$\bar{U}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -\Phi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma,$$

$$\bar{V}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -\Psi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma,$$

$$\bar{W}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = -\chi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma}(x', \beta'; x, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma;$$

e quindi, in virtù delle (3)₁, si avrà su tutta la superficie σ :

$$\bar{U}^{(1)}_{\sigma}(x, \beta) = 0, \quad \bar{V}^{(1)}_{\sigma}(x, \beta) = 0, \quad \bar{W}^{(1)}_{\sigma}(x, \beta) = 0.$$

Di qui, in forza del risultato 2° al § 7 del Cap. I, segue:

$$(\text{in tutto } S) \quad u_1(\xi, \eta, \zeta) = a_1, \quad v_1(\xi, \eta, \zeta) = b_1, \quad w_1(\xi, \eta, \zeta) = c_1$$

con a_1, b_1, c_1 quantità costanti.

6. Dimostriamo che *queste costanti non possono essere tutte e tre nulle*. Infatti se fosse $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, il sistema (7) di strati elastici avrebbe valori nulli nei punti di σ ; e quindi considerato nel campo infinito S' , in virtù del risultato 3° al § 8 del Cap. I, ci darebbe:

$$(\text{in tutto } S') \quad u_1(\xi, \eta, \zeta) = v_1(\xi, \eta, \zeta) = w_1(\xi, \eta, \zeta) = 0;$$

ed ancora si avrebbe per le componenti delle corrispondenti pseudo-tensioni nei punti di σ , facendo uso delle (20)' al Capitolo II,

$$0 = \bar{\bar{U}}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} U^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = \Phi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X^1_{\sigma}(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma,$$

$$0 = \bar{\bar{V}}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} V^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = \Psi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X^2_{\sigma}(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma,$$

$$0 = \bar{\bar{W}}^{(1)}_{\sigma}(x', \beta') = \lim_{P=p'} W^{(1)}(\xi, \eta, \zeta)' = \chi_1(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X^3_{\sigma}(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \Phi_1(x, \beta) d\sigma.$$

Dalle quali, in virtù delle (3)₁, risulterebbe:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad \Phi_1(x, \beta) = 0, \quad \Psi_1(x, \beta) = 0, \quad \chi_1(x, \beta) = 0$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

7. Ciò premesso, indichiamo con $a'_1, b'_1, c'_1; a''_1, b''_1, c''_1; a'''_1, b'''_1, c'''_1$ i tre sistemi di valori costanti (analoghi al sistema a_1, b_1, c_1) che prendono nei punti di S i tre sistemi di strati

elastici costruiti con le tre soluzioni (6) del sistema di equazioni (3)₁, e dimostriamo che *il determinante*:

$$D = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 \\ a'''_1 & b'''_1 & c'''_1 \end{vmatrix}$$

è diverso dallo zero.

Infatti se fosse $D=0$, si potrebbero determinare tre costanti h_1, h_2, h_3 tali che:

$$h_1 a'_1 + h_2 a''_1 + h_3 a'''_1 = 0,$$

$$h_1 b'_1 + h_2 b''_1 + h_3 b'''_1 = 0,$$

$$h_1 c'_1 + h_2 c''_1 + h_3 c'''_1 = 0.$$

Allora, posto:

$$\Phi_1(x, \beta) = h_1 \phi'_1(x, \beta) + h_2 \phi''_1(x, \beta) + h_3 \phi'''_1(x, \beta),$$

$$\Psi_1(x, \beta) = h_1 \psi'_1(x, \beta) + h_2 \psi''_1(x, \beta) + h_3 \psi'''_1(x, \beta),$$

$$\chi_1(x, \beta) = h_1 \chi'_1(x, \beta) + h_2 \chi''_1(x, \beta) + h_3 \chi'''_1(x, \beta),$$

e formato con questo nuovo sistema di soluzioni delle equazioni (3)₁ il sistema di strati elastici:

$$u_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \tau_1(x, \beta) \cdot u' d\sigma, \quad v_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \Phi_1(x, \beta) \cdot u'' d\sigma,$$

$$w_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \Phi_1(x, \beta) \cdot u''' d\sigma,$$

si avrebbe nei punti di σ :

$$u_1(\xi, \eta, \zeta) = a_1 = h_1 a'_1 + h_2 a''_1 + h_3 a'''_1 = 0,$$

$$v_1(\xi, \eta, \zeta) = b_1 = h_1 b'_1 + h_2 b''_1 + h_3 b'''_1 = 0,$$

$$w_1(\xi, \eta, \zeta) = c_1 = h_1 c'_1 + h_2 c''_1 + h_3 c'''_1 = 0,$$

e quindi risulterebbe, come al § 6,

$$\Phi_1(x, \beta) = 0, \quad \Psi_1(x, \beta) = 0, \quad \chi_1(x, \beta) = 0.$$

Ossia le soluzioni (6) del sistema (3)₁ non sarebbero, contra-

riamente all'ipotesi fatta, tre soluzioni generalmente diverse da zero e linearmente indipendenti.

8. Premessi i precedenti risultati, *indichiamo con* $\phi_1(x, \beta)$, $\psi_1(x, \beta)$, $\chi_1(x, \beta)$ *una qualsiasi soluzione del sistema* (3)₁ *e consideriamo le corrispondenti costanti* a_1, b_1, c_1 , *introdotte al § 5.*

Determiniamo tre costanti k_1, k_2, k_3 tali che si abbia :

$$(8) \quad \begin{cases} k_1 a'_1 + k_2 a''_1 + k_3 a'''_1 = a_1, \\ k_1 b'_1 + k_2 b''_1 + k_3 b'''_1 = b_1, \\ k_1 c'_1 + k_2 c''_1 + k_3 c'''_1 = c_1. \end{cases}$$

Questa determinazione è possibile, perchè, come fu dimostrato al § precedente, il determinante D dei coefficienti è diverso da zero. Allora si considerino le tre funzioni dei punti di σ :

$$\phi_2(x, \beta) = \phi_1(x, \beta) - k_1 \phi'_1(x, \beta) - k_2 \phi''_1(x, \beta) - k_3 \phi'''_1(x, \beta),$$

$$\psi_2(x, \beta) = \psi_1(x, \beta) - k_1 \psi'_1(x, \beta) - k_2 \psi''_1(x, \beta) - k_3 \psi'''_1(x, \beta),$$

$$\chi_2(x, \beta) = \chi_1(x, \beta) - k_1 \chi'_1(x, \beta) - k_2 \chi''_1(x, \beta) - k_3 \chi'''_1(x, \beta).$$

Evidentemente queste funzioni formano una soluzione del sistema (3)₂; e se indichiamo con a_2, b_2, c_2 le costanti corrispondenti, analoghe alle a_1, b_1, c_1 introdotte al § 5, si avrà:

$$a_2 = a_1 - k_1 a'_1 - k_2 a''_1 - k_3 a'''_1,$$

$$b_2 = b_1 - k_1 b'_1 - k_2 b''_1 - k_3 b'''_1,$$

$$c_2 = c_1 - k_1 c'_1 - k_2 c''_1 - k_3 c'''_1,$$

e in virtù delle (8) : $a_2 = b_2 = c_2 = 0$; di modo che, ragionando come al § 6, seguirà :

$$\phi_2(x, \beta) = 0, \quad \psi_2(x, \beta) = 0, \quad \chi_2(x, \beta) = 0,$$

ossia *risulterà nei panti di σ* :

$$\phi_1(x, \beta) = k_1 \varphi'_1(x, \beta) + k_2 \varphi''_1(x, \beta) + k_3 \varphi'''_1(x, \beta),$$

$$\psi_1(x, \beta) = k_1 \psi'_1(x, \beta) + k_2 \psi''_1(x, \beta) + k_3 \psi'''_1(x, \beta),$$

$$\chi_1(x, \beta) = k_1 \chi'_1(x, \beta) + k_2 \chi''_1(x, \beta) + k_3 \chi'''_1(x, \beta),$$

ciò che dimostra il teorema enunciato al § 5.

9. Poichè il sistema (3)₂ ammette le sole tre soluzioni (6), avremo, in virtù del teorema 1° al § 1 del Capitolo precedente, che il sistema di equazioni (2)₂ ammette le sole tre soluzioni (5) linearmente indipendenti, e in virtù del teorema 3° al § 1 dello stesso Capitolo, che la condizione necessaria e sufficiente, affinchè il sistema di equazioni (1)₂ ammetta una soluzione, è che le funzioni date $u(x, \beta)$, $v(x, \beta)$, $w(x, \beta)$ verifichino le relazioni:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\sigma} \{ \varphi'_1(x, \beta) \cdot u(x, \beta) + \psi'_1(x, \beta) \cdot v(x, \beta) + \chi'_1(x, \beta) \cdot w(x, \beta) \} d\sigma &= \\ &= \int_{\sigma} \Phi'_1(x, \beta) \cdot u(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \int_{\sigma} \{ \varphi''_1(x, \beta) \cdot u(x, \beta) + \psi''_1(x, \beta) \cdot v(x, \beta) + \chi''_1(x, \beta) \cdot w(x, \beta) \} d\sigma &= \\ &= \int_{\sigma} \Phi''_1(x, \beta) \cdot u(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \int_{\sigma} \{ \varphi'''_1(x, \beta) \cdot u(x, \beta) + \psi'''_1(x, \beta) \cdot v(x, \beta) + \chi'''_1(x, \beta) \cdot w(x, \beta) \} d\sigma &= \\ &= \int_{\sigma} \Phi'''_1(x, \beta) \cdot u(x, \beta) d\sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

Supponiamo dapprima che le funzioni $u(x, \beta)$, $v(x, \beta)$, $w(x, \beta)$ soddisfino alle condizioni (9). Allora esisterà una soluzione $\phi(x, \beta)$, $\psi(x, \beta)$, $\chi(x, \beta)$ delle equazioni (1)₂. Formiamo con tale soluzione il seguente sistema di pseudo-doppi strati elastici:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'_\sigma \cdot \phi(x, \beta) d\sigma, \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X''_\sigma \cdot \phi(x, \beta) d\sigma, \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'''_\sigma \cdot \phi(x, \beta) d\sigma. \end{aligned} \right.$$

In virtù della continuità delle funzioni $\Phi(x, \beta)$, $\Psi(x, \beta)$, $\chi(x, \beta)$, supposto il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ variabile nel campo S' , avremo, facendo uso delle formole (16)' al Cap. II e delle equazioni (1)₂,

$$\lim_{P=P'} u(\xi, \eta, \zeta) = \Phi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \Phi(x, \beta) d\sigma = u(x', \beta'),$$

$$\lim_{P=P'} v(\xi, \eta, \zeta) = \Psi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \Phi(x, \beta) d\sigma = v(x', \beta'),$$

$$\lim_{P=P'} w(\xi, \eta, \zeta) = \chi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \Phi(x, \beta) d\sigma = w(x', \beta').$$

Adunque le funzioni $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$, $w(\xi, \eta, \zeta)$ nei punti del campo infinito S' soddisfano alle equazioni (1) del Cap. I, a distanza infinita si annullano, e nei punti di σ coincidono con le funzioni arbitrariamente date $u(x, \beta)$, $v(x, \beta)$, $w(x, \beta)$; esse quindi risolvono il problema esterno di equilibrio di elasticità per dati spostamenti in superficie, nel caso in cui questi spostamenti soddisfano alle condizioni (9).

10. Nel caso in cui le funzioni $u(x, \beta)$, $v(x, \beta)$, $w(x, \beta)$ non soddisfano alle condizioni (9), si consideri un punto P_1 arbitrario nell'interno del campo finito S e si indichi con r_1 il vettore che parte da questo punto P_1 e va al punto variabile $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ del campo infinito S' . Poniamo poi:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} u'_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{r_1} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r_1}{\partial \xi^2}, & v'_1(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r_1}{\partial \xi \partial \eta}, \\ w'_1(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r_1}{\partial \xi \partial \zeta}, \\ u''_1(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r_1}{\partial \eta \partial \xi}, & v''_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{r_1} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r_1}{\partial \eta^2}, \\ w''_1(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r_1}{\partial \eta \partial \zeta}, \\ u'''_1(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r_1}{\partial \zeta \partial \xi}, & v'''_1(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r_1}{\partial \zeta \partial \eta}, \\ w'''_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{r_1} - \frac{k}{2(1+k)} \frac{\partial^2 r_1}{\partial \zeta^2}; \end{aligned} \right.$$

$$(12) \quad \begin{cases} \bar{u}(x, \beta) = u(x, \beta) + h_1 u'_1(x, \beta) + h_2 u''_1(x, \beta) + h_3 u'''_1(x, \beta), \\ \bar{v}(x, \beta) = v(x, \beta) + h_1 v'_1(x, \beta) + h_2 v''_1(x, \beta) + h_3 v'''_1(x, \beta), \\ \bar{w}(x, \beta) = w(x, \beta) + h_1 w'_1(x, \beta) + h_2 w''_1(x, \beta) + h_3 w'''_1(x, \beta), \end{cases}$$

dove $u'_1(x, \beta)$, $v'_1(x, \beta)$, $w'_1(x, \beta)$, $u''_1(x, \beta)$, ... indicano i valori delle funzioni (11) nei punti $P \equiv (\xi, \eta, \zeta) \equiv (x, \beta)$ di σ , e dove h_1 , h_2 , h_3 sono tre costanti pel momento indeterminate. Determiniamo queste costanti in modo che le funzioni $\bar{u}(x, \beta)$, $\bar{v}(x, \beta)$, $\bar{w}(x, \beta)$ soddisfacciano alle condizioni (9), ossia in modo che si abbia:

$$(13) \quad \begin{cases} \int_{\sigma} \Sigma \Phi'_1(x, \beta) \cdot u(x, \beta) d\sigma + h_1 \int_{\sigma} \Sigma \Phi'_1(x, \beta) \cdot u'_1(x, \beta) d\sigma + \\ + h_2 \int_{\sigma} \Sigma \Phi'_1(x, \beta) \cdot u''_1(x, \beta) d\sigma + h_3 \int_{\sigma} \Sigma \Phi'_1(x, \beta) \cdot u'''_1(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \int_{\sigma} \Sigma \Phi''_1(x, \beta) \cdot u(x, \beta) d\sigma + h_1 \int_{\sigma} \Sigma \Phi''_1(x, \beta) \cdot u'_1(x, \beta) d\sigma + \\ + h_2 \int_{\sigma} \Sigma \Phi''_1(x, \beta) \cdot u''_1(x, \beta) d\sigma + h_3 \int_{\sigma} \Sigma \Phi''_1(x, \beta) \cdot u'''_1(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \int_{\sigma} \Sigma \Phi'''_1(x, \beta) \cdot u(x, \beta) d\sigma + h_1 \int_{\sigma} \Sigma \Phi'''_1(x, \beta) \cdot u'_1(x, \beta) d\sigma + \\ + h_2 \int_{\sigma} \Sigma \Phi'''_1(x, \beta) \cdot u''_1(x, \beta) d\sigma + h_3 \int_{\sigma} \Sigma \Phi'''_1(x, \beta) \cdot u'''_1(x, \beta) d\sigma = 0. \end{cases}$$

Questa determinazione è sempre possibile, perchè il determinante dei coefficienti di h_1 , h_2 , h_3 nelle equazioni (13) è diverso da zero. Infatti esso è uguale al determinante D del § 7 moltiplicato per $(2\pi)^3$ ¹⁾.

Fatta nel modo anzidetto la determinazione delle costanti h_1 , h_2 , h_3 , si considerino le equazioni funzionali (1), nelle quali siano scritte le funzioni $\bar{u}(x, \beta)$, $\bar{v}(x, \beta)$, $\bar{w}(x, \beta)$ in luogo delle $u(x, \beta)$, $v(x, \beta)$, $w(x, \beta)$. In virtù delle (13), queste equazioni ammettono certamente una soluzione $\Phi(x, \beta)$, $\psi(x, \beta)$, $\chi(x, \beta)$, che sarà finita e continua. Si formi con questa solu-

1) Similmente al § 8 del capitolo precedente per dimostrare, come ivi fu fatto, che l'integrale $\int_{\sigma} \Sigma \Phi'_1(x, \beta) \frac{d\sigma}{r_1}$ è diverso da zero, bastava osservare che esso integrale è uguale a $2\pi C_1$, dove C_1 indica la costante introdotta al § 7 di quel capitolo.

zione un sistema di pseudo-doppi strati elastici $\bar{u}(\xi, \eta, \zeta)$, $\bar{v}(\xi, \eta, \zeta)$, $\bar{w}(\xi, \eta, \zeta)$, analogo al sistema (10), e si considerino nei punti del campo infinito S' le funzioni:

$$(14) \begin{cases} u(\xi, \eta, \zeta) = \bar{u}(\xi, \eta, \zeta) - h_1 u'_1(\xi, \eta, \zeta) - h_2 u''_1(\xi, \eta, \zeta) - h_3 u'''_1(\xi, \eta, \zeta), \\ v(\xi, \eta, \zeta) = \bar{v}(\xi, \eta, \zeta) - h_1 v'_1(\xi, \eta, \zeta) - h_2 v''_1(\xi, \eta, \zeta) - h_3 v'''_1(\xi, \eta, \zeta), \\ w(\xi, \eta, \zeta) = \bar{w}(\xi, \eta, \zeta) - h_1 w'_1(\xi, \eta, \zeta) - h_2 w''_1(\xi, \eta, \zeta) - h_3 w'''_1(\xi, \eta, \zeta). \end{cases}$$

Si ha, come al § 9, in virtù delle (12),

$$\begin{aligned} \lim_{P=p'} u(\xi, \eta, \zeta) &= \phi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \phi(x, \beta) d\sigma - \\ &\quad - h_1 u'_1(x', \beta') - h_2 u''_1(x', \beta') - h_3 u'''_1(x', \beta') = \\ &= \bar{u}(x', \beta') - h_1 u'_1(x', \beta') - h_2 u''_1(x', \beta') - h_3 u'''_1(x', \beta') = u(x', \beta'), \\ \lim_{P=p'} v(\xi, \eta, \zeta) &= \psi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \phi(x, \beta) d\sigma - \\ &\quad - h_1 v'_1(x', \beta') - h_2 v''_1(x', \beta') - h_3 v'''_1(x', \beta') = \\ &= \bar{v}(x', \beta') - h_1 v'_1(x', \beta') - h_2 v''_1(x', \beta') - h_3 v'''_1(x', \beta') = v(x', \beta'), \\ \lim_{P=p'} w(\xi, \eta, \zeta) &= \chi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma}(x, \beta; x', \beta') \cdot \phi(x, \beta) d\sigma - \\ &\quad - h_1 w'_1(x', \beta') - h_2 w''_1(x', \beta') - h_3 w'''_1(x', \beta') = \\ &= \bar{w}(x', \beta') - h_1 w'_1(x', \beta') - h_2 w''_1(x', \beta') - h_3 w'''_1(x', \beta') = w(x', \beta'). \end{aligned}$$

Adunque le funzioni $u(\xi, \eta, \zeta)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$, $w(\xi, \eta, \zeta)$ date dalle formole (14), soddisfano nei punti del campo infinito S' alle equazioni (1) del Cap. I, a distanza infinita si annullano e nei punti di σ coincidono con le funzioni arbitrariamente date $u(x, \beta)$, $v(x, \beta)$, $w(x, \beta)$; esse quindi risolvono il problema esterno di equilibrio di elasticità per dati spostamenti in superficie, nel caso in cui questi spostamenti non verificano le condizioni (9).

*Problema interno di equilibrio di elasticità
per date pseudo-tensioni in superficie.*

11. Siano date tre funzioni $\lambda(x, \beta)$, $\mu(x, \beta)$, $\nu(x, \beta)$ finite e continue su tutta la superficie σ e tali che si abbia:

$$(15) \quad \int_{\sigma} \lambda(x, \beta) d\sigma = 0, \quad \int_{\sigma} \mu(x, \beta) d\sigma = 0, \quad \int_{\sigma} \nu(x, \beta) d\sigma = 0.$$

Queste condizioni sono necessarie, se si vuole che le date funzioni possano rappresentare i valori delle componenti delle pseudo-tensioni nei punti di σ corrispondenti ad una deformazione del campo finito S (Cfr. Cap. I, § 10).

Consideriamo le equazioni funzionali:

$$(1)_3 \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma &= \lambda(x', \beta'), \\ \psi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma &= \mu(x', \beta'), \\ \chi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma}(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma &= \nu(x', \beta'); \end{aligned} \right.$$

$$(2)_3 \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma &= 0, \\ \psi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma &= 0, \\ \chi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma}(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$(3)_3 \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi_1(x, \beta) d\sigma &= 0, \\ \psi_1(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi_1(x, \beta) d\sigma &= 0, \\ \chi_1(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma}(x, \beta; \alpha', \beta') \cdot \varphi_1(x, \beta) d\sigma &= 0. \end{aligned} \right.$$

I sistemi $(2)_3$, $(3)_3$ coincidono rispettivamente con i sistemi $(3)_1$, $(2)_1$ del § 4; per cui essi ammettono ciascuno tre soluzioni linearmente indipendenti e tre solamente (§§ 5 e 9). In particolare il sistema $(3)_3$ ammette (§ 4) le tre sole soluzioni:

$$\begin{aligned}\varphi'_1(x, \beta) &= a, & \psi'_1(x, \beta) &= 0, & \chi'_1(x, \beta) &= 0; \\ \varphi''_1(x, \beta) &= 0, & \psi''_1(x, \beta) &= b, & \chi''_1(x, \beta) &= 0; \\ \varphi'''_1(x, \beta) &= 0, & \psi'''_1(x, \beta) &= 0, & \chi'''_1(x, \beta) &= c;\end{aligned}$$

per cui, in virtù del teorema 3° al § 1 del Capitolo precedente, la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema di equazioni $(1)_3$ ammetta una soluzione è che le funzioni date $\lambda(x, \beta)$, $\mu(x, \beta)$, $\nu(x, \beta)$ verifichino le condizioni:

$$\begin{aligned}\int_{\sigma} \Sigma \varphi'_1(x, \beta) \cdot \lambda(x, \beta) d\sigma &= a \int_{\sigma} \lambda(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \int_{\sigma} \Sigma \varphi''_1(x, \beta) \cdot \lambda(x, \beta) d\sigma &= b \int_{\sigma} \mu(x, \beta) d\sigma = 0, \\ \int_{\sigma} \Sigma \varphi'''_1(x, \beta) \cdot \lambda(x, \beta) d\sigma &= c \int_{\sigma} \nu(x, \beta) d\sigma = 0.\end{aligned}$$

Ora in virtù delle (15) queste condizioni sono verificate; per cui il sistema $(1)_3$ ammette una soluzione finita e continua $\phi(x, \beta)$, $\psi(x, \beta)$, $\chi(x, \beta)$.

Formiamo con questa soluzione il seguente sistema di strati elastici:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \phi(x, \beta) \cdot u' d\sigma + a_1, \\ v(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \phi(x, \beta) \cdot u'' d\sigma + b_1, \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \phi(x, \beta) \cdot u''' d\sigma + c_1, \end{aligned} \right.$$

con a_1 , b_1 , c_1 costanti arbitrarie. In virtù della continuità delle funzioni $\phi(x, \beta)$, $\psi(x, \beta)$, $\chi(x, \beta)$, dalle formole (20) al Cap. II e dalle equazioni $(1)_3$ si avrà per le componenti delle pseudo-

tensioni nei punti di σ , corrispondenti alla deformazione (16) del mezzo S,

$$\begin{aligned}\bar{U}_\sigma(x', \beta') &= \lim_{P=p'} U(\xi, \eta, \zeta)' = \\ &= \varphi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_\sigma(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma = \lambda(x', \beta'), \\ \bar{V}_\sigma(x', \beta') &= \lim_{P=p'} V(\xi, \eta, \zeta)' = \\ &= \psi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_\sigma(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma = \mu(x', \beta'), \\ \bar{W}_\sigma(x', \beta') &= \lim_{P=p'} W(\xi, \eta, \zeta)' = \\ &= \chi(x', \beta') - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_\sigma(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma = \nu(x', \beta').\end{aligned}$$

Adunque le funzioni (16), che contengono ciascuna una costante addittiva arbitraria, soddisfano nei punti di S alle equazioni (1) del Cap. I, e i valori delle componenti delle corrispondenti pseudo-tensioni nei punti di σ coincidono con i valori delle funzioni date $\lambda(x, \beta)$, $\mu(x, \beta)$, $\nu(x, \beta)$; esse quindi risolvono il problema interno di equilibrio di elasticità per date pseudo-tensioni in superficie.

*Problema esterno di equilibrio di elasticità
per date pseudo-tensioni in superficie.*

12. Date ad arbitrio tre funzioni finite e continue dei punti di σ : $\lambda(x, \beta)$, $\mu(x, \beta)$, $\nu(x, \beta)$, si formino le equazioni funzionali:

$$(1)_e \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_\sigma(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma &= \lambda(x', \beta'), \\ \psi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_\sigma(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma &= \mu(x', \beta'), \\ \chi(x', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_\sigma(x', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(x, \beta) d\sigma &= \nu(x', \beta'); \end{aligned} \right.$$

$$(2)_A \quad \begin{cases} \phi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \phi(\alpha, \beta) d\sigma = 0, \\ \psi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \phi(\alpha, \beta) d\sigma = 0, \\ \chi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma}(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \phi(\alpha, \beta) d\sigma = 0; \end{cases}$$

$$(3)_A \quad \begin{cases} \phi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma}(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \phi_1(\alpha, \beta) d\sigma = 0, \\ \psi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X''_{\sigma}(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \phi_1(\alpha, \beta) d\sigma = 0, \\ \chi_1(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma X'''_{\sigma}(\alpha, \beta; \alpha', \beta') \cdot \phi_1(\alpha, \beta) d\sigma = 0. \end{cases}$$

I sistemi (2)_A e (3)_A coincidono rispettivamente con i sistemi (3)₁, (2)₁ del § 1; sicchè essi non ammettono soluzione alcuna (§ 2); e quindi, in virtù del teorema 2° al § 1 del Capitolo precedente, il sistema (1)_A ammette una soluzione finita e continua $\phi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ ed una solamente.

Formiamo con questa soluzione il sistema di strati elastici:

$$(16)' \quad \begin{cases} u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \phi(\alpha, \beta) \cdot u' d\sigma, \\ v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \phi(\alpha, \beta) \cdot u'' d\sigma, \\ w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \Sigma \phi(\alpha, \beta) \cdot u''' d\sigma. \end{cases}$$

In virtù della continuità delle funzioni $\phi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$, dalle formole (20)' al Cap. II e dalle equazioni (1)_A si ha per le componenti (mutate di segno) delle pseudo-tensioni nei punti di σ , corrispondenti alla deformazione (16)' del mezzo infinito S',

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{U}}_{\sigma}(\alpha', \beta') &= \lim_{P=p'} U(\xi, \eta, \zeta)' = \\
&= \varphi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'_{\sigma}(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(\alpha, \beta) d\sigma = \lambda(\alpha', \beta'), \\
\overline{\overline{V}}_{\sigma}(\alpha', \beta') &= \lim_{P=p'} V(\xi, \eta, \zeta)' = \\
&= \psi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X''_{\sigma}(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(\alpha, \beta) d\sigma = \mu(\alpha', \beta'), \\
\overline{\overline{W}}_{\sigma}(\alpha', \beta') &= \lim_{P=p'} W(\xi, \eta, \zeta)' = \\
&= \chi(\alpha', \beta') + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} X'''_{\sigma}(\alpha', \beta'; \alpha, \beta) \cdot \varphi(\alpha, \beta) d\sigma = \nu(\alpha', \beta').
\end{aligned}$$

Adunque le funzioni (16)' soddisfano nei punti del campo infinito S' alle equazioni (1) del Cap. I, a distanza infinita si annullano, e i valori delle componenti (mutate di segno) delle corrispondenti pseudo-tensioni nei punti di σ coincidono con i valori delle funzioni date $\lambda(\alpha, \beta)$, $\mu(\alpha, \beta)$, $\nu(\alpha, \beta)$; esse quindi risolvono il problema esterno di equilibrio di elasticità per date pseudo-tensioni in superficie.

Osservazione I. — I risultati del presente Capitolo valgono per $k > -\frac{2}{3}$, perchè per tali valori di k abbiamo dimostrato i risultati 1°, 2°, 3° e 4° ai §§ 7 e 8 del Cap. I, dei quali si è fatto uso precedentemente. Per altro i detti valori di k comprendono in particolare i casi di isotropia elastica.

Osservazione II. — Al punto in cui siamo arrivati non presenta più alcuna difficoltà l'estensione all'elasticità dei risultati sulle funzioni armoniche e sulle funzioni potenziali stabilite ai §§ 11, 12,.... del Capitolo precedente. In particolare si possono nuovamente risolvere i problemi interno ed esterno di equilibrio di elasticità per date pseudo-tensioni in superficie, estendendo il metodo col quale al § 17 del Capitolo precedente si sono risolti i problemi derivati di Dirichlet.