6. *Zur Theorie magnetooptischer Erscheinungen; von P. Drude.*

Neuerdings sind Beobachtungen von Zeemann¹⁾ über das Kerr'sche magnetooptische Phänomen angestellt, und zwar ausser bei Eisen auch bei Kobalt und Nickel. Da sich Zeemann der Meinung von Goldhammer anschliesst, dass diese Beobachtungen mit meinen früher gegebener Formelsystemen²⁾ im Widerspruch ständen, so möchte ich hier kurz die Resultate mittheilen, welche ich bei der Berechnung jener Beobachtungen erhalten habe.

Ich kann leider nur eine einzige Beobachtungsreihe an Kobalt benutzen, da bei den Beobachtungen am Nickelspiegel die Angabe des Einfallswinkels fehlt. — Aber auch ohnehin würden die bei einem einzigen Einfallswinkel angestellten Beobachtungen nur eine wenig ausreichende Prüfung der Theorie bilden. — Die Gesichtspunkte, nach denen weitere Forschung vorzuschreiten hätte, treten aber auch schon an den Beobachtungen am Kobaltspiegel zu Tage.

Zeemann hat für *D*-Licht folgende Werthe des Haupteinfallswinkels $\bar{\varphi}$ und des Hauptazimuths $\bar{\psi}$ an Kobalt beobachtet:

$$\bar{\varphi} = 75^{\circ} 58', \quad \bar{\psi} = 29^{\circ} 44'.$$

Ich fand früher³⁾ an Kobalt:

$$\bar{\varphi} = 78^{\circ} 5', \quad \bar{\psi} = 31^{\circ} 40'.$$

Die von mir angewandte Behandlung des Spiegels mit feinem Schmirgel hat Zeemann nicht benutzt, weil der Spiegel zu schlecht zur Beobachtung geworden sei. Es mag dies der Grund dafür sein, dass der von mir beobachtete Werth des Haupteinfallswinkels um mehr als 2° höher liegt, als der von

1) P. Zeemann, *Metingen over het verschijnsel van Kerr*. Dissert. Leyden, 1893.

2) P. Drude, *Wied. Ann.* **46**. p. 353. 1892.

3) P. Drude, *Wied. Ann.* **42**. p. 186. 1891.

Zeemann beobachtete, da Verunreinigung stets in diesem Sinne wirkt.¹⁾ — Es ist natürlich zur Prüfung der Theorie nicht günstig, wenn der Spiegel merkbare Oberflächenschichten enthält, wofür man dieselben nicht auch theoretisch berücksichtigt. Indess mag dies zunächst unterbleiben, da die Rechnung dadurch weit complicirter, wenn auch wohl durchaus durchführbar, wird.

Aus den Beobachtungen von Zeemann folgt für den Brechungsexponenten n und den Absorptionscoefficienten $n\kappa$ des Kobalt:

$$n = 2,03; \quad n\kappa = 3,24,$$

dagegen aus meinen Beobachtungen

$$n = 2,12; \quad n\kappa = 4,05.$$

Im Folgenden sind beide Werthsysteme zur Berechnung verwandt, und zwar sind die dabei erhaltenen Resultate durch die unteren Indices Z , resp. D gekennzeichnet.

Im Folgenden ist meine frühere Bezeichnungsweise²⁾ angewandt. Dieselbe hängt mit der Zeemann'schen in folgender Weise zusammen (abgesehen vom Vorzeichen):

$$\begin{aligned} p_r &= \psi_{ia}^m, & s_r &= \psi_{ia}^m, & p_e &= \psi_{ip}^m, & s_e &= \psi_{ip}^m. \\ \gamma_0 &= \psi_{ip}^0, & \beta_0 &= \psi_{ip}^0, & \gamma &= \psi_{ia}^0, & \beta &= \psi_{ia}^0. \end{aligned}$$

Die Beobachtungen Zeemann's beziehen sich auf weisses Licht. Da aber der Unterschied des Kerr'schen Phänomens zwischen D -Licht und weissem Licht bei Eisen unmerklich ist³⁾, so kann man wohl auch hier, zumal bei der Unsicherheit des wahren Werthes von φ und $\bar{\psi}$ bei dem von Zeemann benutzten Spiegel, die angegebenen Zahlen benutzen.

Durch Anwendung der früher von mir angegebenen Formeln⁴⁾ erhält man nun aus den Beobachtungen, welche sich auf sogenannte polare Reflexion beziehen, die Mittelwerthe (falls dabei die Drehung $1' = 1$ gesetzt ist):

$$\left(\frac{b}{\tau}\right)_D = 86,7, \quad \left(\frac{b}{\tau}\right)_Z = 72,5.$$

1) P. Drude, Wied. Ann. **39**. p. 488. 1890.

2) P. Drude, Wied. Ann. **46**. p. 353. 1892.

3) Zeemann, l. c. p. 17.

4) l. c. Formel (69'), (70'), (78'), (79').

Berechnet man mit Hülfe dieser Werthe wiederum rückwärts die Beobachtungen, so ergeben sich folgende Resultate (φ bedeutet den Einfallswinkel):

	p_r			s_r			γ_0			γ		
φ	berechnet			berechnet			berechnet			berechnet		
	beob.	D	Z	beob.	D	Z	beob.	D	Z	beob.	D	Z
45°	+15,0'	+18,7	+18,8	+11,8	+14,4	+13,4	-1,4	-18,0	-16,4	+17,5	+38,6	+37,6
60°	+19,9	+20,0	+21,0	+12,7	+12,0	+10,7	+3,9	-2,9	-1,8	+16,5	+23,3	+23,2
73°	+18,3	+18,9	+18,4	+11,2	+8,2	+6,9	+8,7	+3,9	+4,6	+15,4	+16,6	+16,2

Wie die Tabelle lehrt, macht es keinen wesentlichen Unterschied, ob man die optischen Constanten n_D , n_{κ_D} oder n_Z , n_{κ_Z} benutzt.

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist gut hinsichtlich der sogenannten Minimumdrehungen p_r und s_r , dagegen nicht gut hinsichtlich der Nulldrehungen. Wenn auch bei letzteren der Beobachtungsfehler weit grösser, als der der ersteren sein wird¹⁾, so glaube ich doch nicht, dass diese allein die vorhandenen Abweichungen erklären. Dieselben sind nämlich in demselben Sinne, wenn auch in weit geringerem Maasse, bei den Righi'schen Beobachtungen an Stahlspiegeln vorhanden. Diese Abweichungen kennzeichnen sich dadurch, dass γ_0 nach der Theorie bei einem grösseren Einfallswinkel das Zeichen wechselt, als es nach der Beobachtung der Fall ist, und dass die absoluten berechneten Beträge von γ und γ_0 für kleinere Einfallswinkel die beobachteten übertreffen.

Es handelt sich nun darum, ob die gekennzeichneten Abweichungen fortfallen, wenn man mit Goldhammer²⁾ zwei magnetooptische Constanten einführt. — Die zur Rechnung zu benutzenden Formeln lassen sich ohne weiteres aus meinen l. c. p. 388 ff. angegebenen Formeln (69), (70), (78), (79) ableiten, wenn man an Stelle der reellen Constanten b/τ setzt: $b\tau + i b'/\tau$.

1) Auf p. 37 gibt Zeemann an, dass an einem Kobaltspiegel (wahrscheinlich durch unrichtige Magnetisirung) die Werthe von ψ_{ip}^0 und ψ_{ia}^0 , welche sonst einander gleich sind, für $\varphi = 60^\circ$ bei grünem Licht betragen hätten: $\psi_{ip}^0 = 8,0'$, $\psi_{ia}^0 = 3,3'$.

2) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. 46. p. 71. 1892.

Legt man nur die Werthe n_z , n_{xz} der Rechnung zu Grunde, so ergeben sich als Mittelwerthe aus den Beobachtungen:

$$\frac{b}{\tau} = + 66,2; \quad \frac{b'}{\tau} = + 19,4.$$

Rückwärts berechnen sich die Beobachtungen mit Hülfe dieser Werthe wie folgt:

φ	p_r		s_r		γ_0		γ	
	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.
45	15,0	18,8	11,8	14,9	- 1,4	- 2,5	17,5	20,6
60	19,9	19,6	12,7	12,5	+ 3,9	+ 4,7	16,5	14,4
73	18,8	14,7	11,2	8,6	+ 8,7	+ 7,2	15,4	11,5

Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist entschieden besser, als ohne Zuhülfenahme von b'/τ ; es ist ja auch selbstverständlich, dass mit zwei verfügbaren Constanten die Beobachtungen nie schlechter darstellbar sein können, als mit einer. Speciell ist es jetzt erreicht, dass γ_0 einen Zeichenwechsel erleidet für einen Einfallswinkel, der der Beobachtung entspricht. Jedoch völlig befriedigend ist die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung noch nicht, wie ein Blick auf die Werthe von γ lehrt. Während diese nach der Beobachtung mit Wachsen des Einfallswinkels von 45° auf 73° nur wenig abnehmen, ergibt die Rechnung eine Abnahme auf fast die Hälfte des Werthes bei 45° .

Ich glaube daher, dass diese Beobachtungen noch nicht genügen, um darüber zu entscheiden, ob die Einführung von einer oder von zwei magnetooptischen Constanten nothwendig und hinreichend ist. Erneute Beobachtungen würden sowohl bei möglichst viel verschiedenen Einfallswinkeln anzustellen sein, als auch wäre für möglichste Reinhaltung des Spiegels zu sorgen. Ich glaube in der That, dass entweder durch letzteres, oder durch Beobachtungsfehler die Zahlen Zeemann's etwas entstellt sein müssen. Auffallend ist nämlich, dass Zeemann für s_r keine gleichmässige Annahme bei wachsendem Einfallswinkel beobachtet, während dies nach Righi bei Eisen der Fall ist, und ebenso nach der Theorie (auch der Goldhammer'schen). — Ebenso hat Righi die nach der Rechnung folgende starke Abnahme von γ zwischen 45° und

73° beobachtet bei Eisen, während sie nach Zeemann nur sehr gering ist.

Die Verhältnisse können natürlich bei Kobalt etwas anders liegen, als bei Eisen; indess ist sicher, dass nach jeder Theorie die Nulldréhungen für kleine Einfallswinkel sehr gross werden müssen. Wenn die Erfahrung dem widersprechen sollte, so wäre es das nächste, mathematisch zu discutiren, ob die Anwesenheit von Oberflächenschichten diese Abweichungen erklären kann.

Wahrscheinlich ist dies wohl deshalb, weil bei Stahl, für welchen man leicht einen grossen Werth des Haupteinfallswinkels erreicht, d. h. Oberflächenschichten vermeidet, die Abweichungen zwischen allen bisher angestellten Beobachtungen und meiner Theorie, ausserordentlich gering sind.

Es würde also mit Freude zu begrüßen sein, wenn auch bei Nickel und Kobalt die Beobachtungen in der vollständigen Weise, wie z. B. die Righi'schen Beobachtungen am Stahl, ausgeführt und die Wirkungen von Oberflächenschichten auf diese magnetooptischen Phänomene in experimenteller und mathematischer Hinsicht untersucht würden. Erst dann kann man die Frage entscheiden, ob man zwei magnetooptische Constanten einführen muss, oder mit einer ausreicht.

Bezogen sich die vorigen Auseinandersetzungen auf den Vergleich der Resultate der Goldhammer'schen Theorie und der meinigen mit den citirten Beobachtungen, so möchte ich jetzt noch betreffs der Darstellung der ersteren Theorie einige Bemerkungen äussern, welche sich beziehen auf eine Entgegnung Goldhammer's¹⁾ gegen meine letzte, die magnetooptischen Erscheinungen betreffende Notiz.²⁾

1. Ich vermuthete nicht, dass die 12 Gleichungen der p. 80 der Goldhammer'schen Arbeit (Wied. Ann. 46) durch Druckfehler entstellt waren und nahm daher an, dass Goldhammer die Continuität von U , V , W an Stelle der von U , V , W schliesslich setzte. Nach den Formeln (1) jener Arbeit muss ja nun allerdings bei Stetigkeit von f und V

1) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. 48. p. 740. 1893.

2) P. Drude, Wied. Ann. 48. p. 122. 1893.

auch Q stetig sein. Die Stetigkeit von f stösst jedoch auf Widersprüche.

Die erste der dortigen Formel (19) ergibt nämlich (vorausgesetzt, dass sie keinen Druckfehler enthält) mit Berücksichtigung von (9):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mathfrak{B}^2 \Delta U + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} \right),$$

gültig im ganzen Raume. Daraus folgt, dass φ und U Exponentialfunctionen sind, deren Exponenten dieselben (linearen) Functionen der Coordinaten und der Zeit sind. Da nun (nach (10)) $\Delta \varphi = 0$ sein soll, so folgt $\varphi = 0$, folglich nach (18) $f'' = 0$, also nach (17) $f = f''$. Da nun f''' unstetig ist, so muss es auch f sein, und daher nach (1) auch Q .

Enthalten dagegen die Formeln (19) den Druckfehler, dass auf ihrer linken Seite U statt U stehen soll, so würde folgen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \mathfrak{B}^2 \Delta U + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} \right),$$

und zwei analoge Gleichungen. — Mit diesen drei Gleichungen ist aber schon für den Fall magnetisch nicht activer Medien die Stetigkeit an der Grenze von U , V , W und ihrer Derivirten nach x , y , z unvereinbar¹⁾, eine Thatsache, welche Goldhammer selbst bei Besprechung der electromagnetischen Theorie von Tumlriz erwähnt hat.²⁾

2. Den Goldhammer'schen Nachweis, dass meine Formeln (66)³⁾ mit den seinigen (30)⁴⁾ identisch seien, halte ich deshalb nicht für richtig, weil bei den von Goldhammer angewandten Substitutionen H_2 an Stelle meines D_1 , und H_1 an Stelle meines D_2 zu setzen wäre. Man erkennt dieses durch Berücksichtigung meiner Formeln (16).

Diese Schwierigkeiten vermeidet man, wenn man, wie ich es gethan habe, diejenigen Formeln in beiden Theorien miteinander vergleicht, welche die Amplituden der gebrochenen

1) Daher behauptete ich, dass die Grenzbedingungen (1) bis (12) mit (19) in Widerspruch seien, weil ich nicht den von Goldhammer jetzt richtig gestellten Druckfehler vermuthen konnte.

2) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **47**. p. 266. 1892.

3) P. Drude, Wied. Ann. **46**. p. 387. 1892.

4) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **46**. p. 81. 1892.

Wellen nicht mehr enthalten. Man gelangt dann zu der von mir erwähnten Zeichendifferenz in beiden Theorien. Da diesser Punkt bei der Kleinheit der magnetooptischen Constanten völlig unwesentlich ist, so glaube ich, dass es nicht im Interesse der Leser der „Annalen“ liegt, diese Rechnung in extenso vorzuführen.

Sieht man von dieser unwesentlichen Differenz ab, so gebe ich zu, dass man die Schlussresultate meiner Theorie als (formell) speciellen Fall der Resultate der Goldhammer'schen Theorie ansehen kann. — In formeller Hinsicht scheinen mir jedoch meine Formeln vor denen Goldhammer's den Vorzug einer bequemerer Anwendung auf die Beobachtungen zu besitzen. — Auf die Unterschiede beider Theorien, welche nicht formeller Art sind, will ich nicht eingehen, da sie für die Vorhersagung von Beobachtungen keine Bedeutung besitzen.

Göttingen, 3. Mai 1893.