Binäranalyse zur Geometrie des Dreiecks.

Von Emil Waelsch in Brunn.

Im folgenden wird die Dreiecksgeometrie¹⁾ „binäranalytisch“, das heißt unter Anwendung der Methoden der Theorie der binären Formen²⁾ behandelt. Zu diesem Zwecke werden zunächst Punkte und Gerade, Kurven zweiter und dritter Ordnung resp. Klasse, sowie Kreise unter Zugrundelegung eines Normkreises durch ihre „Binärbilder“ dargestellt, worauf auch Beziehungen dieser Gebilde, und ihre Polarentheorie erörtert werden.

Das Dreieck ∇ ist in bekannter Weise durch eine kubische Form $\varphi \equiv \varphi_{\xi}^3$ einer binären Veränderlichen ξ gegeben, die auf seinem Umkreise $\mathcal{C}$ ausgebreitet ist, und die beiden absoluten Punkte der Ebene sind durch eine quadratische Form $u \equiv u_{\xi}^2$ dieser Veränderlichen dargestellt. Wird nun das Dreieck ∇ durch eine Ähnlichkeitstransformation der Ebene in das Dreieck ∇' transformiert, so übergeht der Kreis $\mathcal{C}$ in den Umkreis $\mathcal{C}'$ von ∇' , und die Formen φ und u übergehen in Formen φ' und u' der Veränderlichen ξ' auf $\mathcal{C}'$, wobei ξ und ξ' durch lineare Transformation verbunden sind. Die merkwürdigen Punkte und Geraden von ∇ , die bei Ähnlichkeitstransformationen mit ∇ invariant verknüpft sind, werden daher auf $\mathcal{C}$ quadratische Formen bestimmen, die beim Übergang von φ, u zu φ', u' , also für die linearen Transformationen von ξ in ξ' invariant oder binärinvariant zu φ und u sein werden.

Diese Punkte und Geraden, weiters auch höhere Gebilde, die invariant sind zu ∇ bei Ähnlichkeitstransformationen der Ebene, ergeben sich hiernach als darstellbar im simultanen System der Formen u und φ ; sie lassen sich vermöge ihrer Stellung in diesem System klassifizieren. So repräsentiert vor allem die Form u das Zentrum des Umkreises $\mathcal{C}$ des Dreiecks ∇ und die Hessesche

¹⁾ Bezüglich dieser vgl. A. Emmerich, Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks, Berlin 1891, und E. Vigarié, Géométrie du triangle, Étude bibliographique et terminologique, Journ. de Math. spec., III. Sér. t. 1, 2, 3.

²⁾ Für die Anwendung der Theorie der ternären Formen und invariantentheoretischen Gesichtspunkte in der Dreiecksgeometrie und bei elementargeometrischen Fragen s. E. Study, Über Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie, Sitzungsber. der Kgl. sächs. Gesellsch. der Wissensch. 1896 und: Das Apollonische Problem, Math. Annal. Bd. 49, p. 497.

Form Δ von φ den Lemoineschen Punkt desselben, woraus sich schon die Wichtigkeit dieses Punktes für die Dreiecksgeometrie ergibt. Die einfachste lineare Kovariante, nämlich die zweite Überschiebung der Formen u und φ liefert einen Punkt p des Umkreises $\mathbb{C}$, der bisher noch nicht als wesentlich für die Dreiecksgeometrie betrachtet worden zu sein scheint, und der im folgenden in zahlreichen Bedeutungen auftritt.

Aus den Punkten u , Δ und p lassen sich die bekanntesten merkwürdigen Punkte von ∇ linear ableiten mit Hilfe von Zahlen, die Invarianten sind von ∇ für alle Ähnlichkeitstransformationen der Ebene. Es ergibt sich, daß sich auch die Dreiecksform φ im System der Formen u , Δ und p darstellen läßt, weshalb dann alle merkwürdigen Gebilde von ∇ in letzterem System darstellbar sind.

Entsprechend dem Umstande, daß es sich im folgenden um Gebilde handelt, die bei Ähnlichkeitstransformationen invariant sind zu ∇ , werden auch nur Verhältnisse von Strecken und nicht Entfernungen, Radien, Flächen in Betracht gezogen.

Es werden auch nur rationale Gebilde des Dreiecks ∇ betrachtet¹⁾, und dem entsprechend wird auch die Dreiecksform φ nicht in ihre linearen Faktoren, die den Ecken des Dreiecks entsprechen, zerlegt, sondern es wird die Kurve dritter Ordnung eingeführt, die von den Seiten des Dreiecks gebildet wird, und die aus den Ecken des Dreiecks bestehende Kurve dritter Klasse.

1. Binäre Quadriken als Koordinaten von Punkten und Geraden in der Ebene. Es ist in der Ebene eine nicht zerfallende Kurve zweiter Ordnung $\mathbb{C}$, die Normkurve, gegeben. Die Polare eines Punktes bezüglich $\mathbb{C}$ heiße dessen Normpolare und der Pol einer Geraden deren Normpol. Ein Punkt von $\mathbb{C}$ heiße: Normpunkt, eine ihrer Tangenten: Normgerade.

Auf $\mathbb{C}$ sei die binäre Veränderliche $\xi = \xi_1 / \xi_2$ ausgebreitet. Man kann dann einer Quadrik (binären quadratischen Form)

$$a \equiv a_{\xi}^2 \equiv (a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2)^2$$

den Punkt a der Ebene zuordnen, dessen homogene Koordinaten sind:

$$(1) \quad X_1 = a_1^2, X_2 = -2 a_1 a_2, X_3 = a_2^2$$

Ebenso kann die Quadrik a als eine Gerade a bestimmend angesehen werden, deren Koordinaten sind:

$$(2) \quad \Xi_1 = a_2^2, \Xi_2 = a_1 a_2, \Xi_3 = a_1^2$$

„Der Punkt a und die Gerade b sind incident, wenn ihre Quadriken apolar sind“; denn dann ist

$$(3) \quad \sum X_i \Xi_i = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = [a b] = 0$$

¹⁾ Auf die einfache und der Eleganz nicht entbehrende binäranalytische Behandlung irrationaler Gebilde des Dreiecks, wie der dem Dreiecke eingeschriebenen Kreise, ferner des Apollonischen und Malfattischen Problems wurde nicht eingegangen.

Ist $[a] = 0$,¹⁾ so ist a das Quadrat einer Linearform $a \equiv \alpha_{\xi}$. Der zu dieser Linearform gehörige Punkt α liegt auf $\mathfrak{C}$, ist der Normpunkt α .

Da die Quadrik $a = \alpha\beta$ apolar zu α^2 und β^2 ist, so enthält die Gerade a die Punkte α, β .

Die Gerade mit der Quadrik $\alpha\alpha$ berührt daher $\mathfrak{C}$ im Punkte α , ist die Normgerade α ; sie soll als zur Linearform α gehörig mit α bezeichnet werden.

Da $a = \alpha\beta$ apolar zu α^2, β^2 ist, so liegt der Punkt a auf der Geraden α, β ; er ist demnach der Normpol der Geraden a , welche die Punkte α, β von $\mathfrak{C}$ verbindet und die Gerade a ist seine Normpolare.

Ist x der laufende Punkt der Geraden a , so ist nach (3) $[ax] = 0$ ihre Gleichung. Werden hierin die Koeffizienten der Quadrik x als ternäre Koordinaten des Punktes x angesehen, so stellt $[ax]$ die ternäre Form der Geraden a dar. Es soll nun die Überschiebung

$$[ax]$$

d. i. die Abbildung der Geraden a oder ihrer ternären Form im binären Gebiete als das Binärbild der Geraden a oder deren ternärer Form bezeichnet werden.

Dual ist $[ax]$, wenn a die Quadrik eines Punktes, x die einer Geraden ist, das Binärbild des Punktes a .

Die erste Überschiebung (a, b) der Quadriken a, b ist apolar zu jeder derselben; daher ist (a, b) die Quadrik des Schnittpunktes der Geraden a, b oder die Quadrik der Verbindungslinie der Punkte a, b .

Sind die Quadriken in $[ab] = 0$ solche von Punkten (Geraden), so sind diese bezüglich $\mathfrak{C}$ konjugiert, normkonjugiert.

2. Kurven zweiten Grades. Durch die Gleichung

$$(4) \quad x' = [vx] + cx$$

in der v ein Biquadrik (binäre biquadratische Form), c eine Konstante ist, ist dem Punkte x die Gerade x' der Ebene zugewiesen. Diese Beziehung ist eine Korrelation; denn, wenn der Punkt x auf einer Geraden läuft, also seine Quadrik linear variiert, so auch die seiner entsprechenden Geraden x' , weshalb diese ein Büschel beschreibt.²⁾

Ein Punkt y liegt auf dieser Geraden, wenn (Art. 1):

$$(5) \quad [x'y] = [[vx]y] + c[xy] = [v, xy] + c[xy] = 0$$

ist. Da aber diese Beziehung in x und y symmetrisch ist, so ist die obige Korrelation eine Polarität bezüglich einer Kurve zweiter Ordnung $\mathfrak{C}_2$ und die Gerade x' ist die Polare des Punktes x be-

¹⁾ Sind a, b Formen resp. der n ten und m ten Ordnung, und ist $m \leq n$, so soll die m te Überschiebung dieser beiden Formen mit $[ab]$ bezeichnet werden, und mit $[a]$ die n te Überschiebung der Form a über sich selbst.

²⁾ Vgl. E. Waelsch, Über binäre Formen und die Korrelationen mehrdimensionaler Räume, d. Monatshefte, Jahrgg. VI. p. 381 ff.

züglich $\mathfrak{C}_2$. Hieraus folgt: „Sind die beiden Punkte x und y bezüglich $\mathfrak{C}_2$ konjugiert, so besteht zwischen ihren Quadriken x und y die Beziehung (5).“

Die Gleichung der $\mathfrak{C}_2$ wird erhalten, wenn in (5) gesetzt wird: $y = x$ als:

$$(6) \quad [v x^2] + c[x] = 0$$

Die Kurve zweiter Ordnung $\mathfrak{C}_2$ ist demnach bestimmt durch die Formen v, c , durch ihre Biquadrik und ihre Konstante; ihr Binärbild ist:

$$(7) \quad [v x^2] + c[x].$$

Verschwindet v identisch, so ist $\mathfrak{C}_2$ die Normkurve $\mathfrak{C}$.

Ist ε ein Linearfaktor von v , also $v = \varepsilon \delta$, so hat die Polare bezüglich $\mathfrak{C}_2$ des Punktes ε auf $\mathfrak{C}$ die Quadrik:

$$[\varepsilon \delta, \varepsilon^2] + c \varepsilon^2 = \frac{1}{2} [\delta \varepsilon] \varepsilon + c \varepsilon^2,$$

also den Faktor ε , weshalb diese Polare ihren Pol ε enthält. Folglich sind die vier Wurzelpunkte der Biquadrik v auf $\mathfrak{C}$ die Normpunkte der $\mathfrak{C}_2$. Ist v das Quadrat einer Quadrik, so berührt $\mathfrak{C}_2$ die $\mathfrak{C}$ in den Wurzelpunkten dieser Quadrik.

Ist in (7) x die Quadrik einer Geraden, so ist (7) das Binärbild einer Kurve zweiter Klasse $\mathfrak{C}^2$; die Linearfaktoren von v sind dann die Formen der gemeinsamen Tangenten von $\mathfrak{C}^2$ und $\mathfrak{C}$. In (4) ist dann die x' die Quadrik des Poles bezüglich $\mathfrak{C}^2$ der Geraden mit der Quadrik x .

Die aus den zwei Geraden (Punkten) a, b bestehende Kurve zweiter Ordnung (Klasse) hat die Formen: $a b, \frac{1}{3} [a b]$; denn ihr Binärbild ist:

$$(8) \quad [a x] [b x] = [a b, x^2] + \frac{1}{3} [a b] [x].$$

Demnach hat die Kurve, die a doppeltgezählt enthält, die Formen $a^2, \frac{1}{3} [a]$.

Die Kurve zweiter Klasse, die aus den Schnittpunkten α, β der Normkurve und der Geraden a mit der Quadrik $a = \alpha \beta$ besteht, hat die Formen $\alpha^2 \beta^2 = a^2, \frac{1}{3} [\alpha^2 \beta^2] = \frac{1}{3} (\alpha \beta)^2 = -\frac{2}{3} [a]$.

„Die Kurve zweiter Ordnung mit den Formen v, c , trägt¹⁾ die Kurve zweiter Klasse mit den Formen v', c' , wenn die Gleichung besteht:

$$(9) \quad [v v'] + 3 c c' = 0;$$

denn der doppeltgezählte Punkt a bildet eine $\mathfrak{C}^2$ mit den Formen $a^2, \frac{1}{3} [a]$; soll er auf $\mathfrak{C}^2$ mit den Formen v, i liegen, so muß

$$[v a^2] + c [a] = [v v'] + 3 c c' = 0$$

sein, welche Relation auch allgemein gelten muß.

¹⁾ Eine Kurve zweiter Ordnung „trägt“ nach einer Bezeichnungsweise von Reye (s. Geometrie der Lage, Bd. I. 3. Aufl., p. 225) eine Kurve zweiter Klasse, wenn sie einem und somit unendlich vielen Polardreiecken der letzteren umschrieben ist.

Ist speziell die Kurve zweiter Klasse mit der Normkurve identisch, so ist $v' = 0$, $c' = 1$ und es ergibt sich: „Verschwindet für eine Kurve zweiter Ordnung $\mathfrak{C}_2$ deren Konstante c , so trägt diese Kurve die Normkurve; sie hat dann das Binärbild $[v x^2]$.“^a Dual: Die Normkurve trägt $\mathfrak{C}^2$, wenn die Konstante c der $\mathfrak{C}^2$ verschwindet.

Sind zwei Punkte konjugiert bezüglich einer $\mathfrak{C}_2$, so trägt diese die $\mathfrak{C}^2$, die aus den beiden Punkten besteht. Sind die beiden Punkte, die Wurzelpunkte α, β der Quadrik $a = \alpha \beta$, so hat die letztere $\mathfrak{C}^2$ nach Obigem die Formen $a^2, -\frac{2}{3}[a]$, weshalb sich nach (8) ergibt: „Die Wurzelpunkte der Quadrik a sind dann bezüglich der $\mathfrak{C}_2$ mit den Formen v, c konjugiert, wenn gilt:

$$(10) \quad [v a^2] - 2 c [a] = 0.$$

Drückt man aus Gleichung (4) den Koeffizienten x'_α der Quadrik x' durch die Koeffizienten x_α der Quadrik x aus, so erhält man drei Gleichungen, aus welchen sich x_0 berechnet. Da aber x_0 das Leitglied der Quadrik x ist, so ergibt sich nach einer einfachen Umformung:

$$x = \{[\Delta_v - c v, x'] + (c^2 - \frac{1}{6} i) x'\} / \{\frac{1}{3} c - \frac{1}{2} c i + c^3\}$$

worin die Kovarianten der Form v auftreten:

$$\Delta_v = (v, v)^2, i = [v], j = [v, \Delta_v].$$

Daher: Durch die Gleichung (10) ist die zu (4) inverse Transformation gegeben. Der Nenner des Bruches rechts ist die Determinante der $\mathfrak{C}_2$. Oder: „Sind v, c die Formen einer $\mathfrak{C}_2$, so bilden ihre Tangenten eine $\mathfrak{C}^2$ mit den Formen:

$$\Delta_v - c v, c^2 - \frac{1}{6} i.$$

3. Einführung der unendlichfernen Geraden. Ist u die Quadrik der unendlichfernen Geraden u , so ist u auch die Quadrik ihres Normpoles, also des Zentrums u der Normkurve $\mathfrak{C}$.

Die Überschiebung $[u \alpha]$, wo α eine Linearform ist, ist die Linearform des zu α diametralen Punktes der $\mathfrak{C}$, weil das Produkt dieser Linearformen apolar ist zu u .

Der unendlichferne Punkt der Geraden a hat (Art. 1) die Quadrik (a, u) . Daher ist (a, u) die Quadrik eines beliebigen unendlichfernen Punktes oder die Quadrik seiner Normpolare, d. i. des zu ihm konjugierten Durchmessers der $\mathfrak{C}$.

Zwei Gerade sind parallel, wenn die ersten Überschiebungen ihrer Quadriken mit u sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, oder anders ausgedrückt, wenn sich ihre Quadriken voneinander nur um ein Vielfaches von u unterscheiden. Sind a und b die Quadriken zweier Punkte, so ist $a + \lambda b$ die Quadrik eines Punktes der Verbindungslinie dieser Punkte. Soll der Punkt der unendlichferne der Geraden $a b$ sein, so muß sein:

$$[a + \lambda b, u] = [a u] + \lambda [b u] = 0;$$

seine Quadrik ist demnach:

$$[b u] a - [a u] b = 2 (u, (a, b)).$$

Folglich ist auch

$$(11) \quad c = [b u] a + \mu [a u] b$$

die Quadrik desjenigen Punktes der Geraden ab , der den Vektor ab im Verhältnis $ac/bc = \mu$ teilt. Demnach ist

$$(12) \quad [b u] a + [a u] b$$

die Quadrik des Mittelpunktes der Strecke ab .

Durch die Gleichung

$$(13) \quad x' = [b u] x + \mu [a u] b$$

ist eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum b gegeben, bei der die Punkte x und x' entsprechende sind.

Für die Kurve $\mathcal{C}^2$ zweiter Klasse mit den Formen v, c ist nach (4)

$$[v u] + c u$$

die Quadrik ihres Mittelpunktes, als Pol der unendlichfernen Geraden u .

4. $\mathcal{C}$ ist ein Kreis; absolute Punkte; Kreise. Es werde nun in der Folge angenommen, daß die Normkurve $\mathcal{C}$ ein Kreis sei, der Normkreis. Die Normpunkte der unendlichfernen Geraden sind die Punkte π, ω , die absoluten Punkte (unendlichfernen imaginären Kreispunkte) der Ebene. Es ist demnach die Quadrik u der unendlichfernen Geraden gleich dem Produkte der Linearformen dieser Punkte, also $u = \pi \omega$. Es werde gesetzt:

$$[u] = -\frac{1}{2} (\pi \omega)^2 = A.$$

Die Quadrik des Zentrums des Normkreises ist u , und ist α die Linearform eines Normpunktes, so ist (u, α) die Linearform des ihm diametral gegenüberliegenden Normpunktes (Art. 3).

Um die Zuordnung von Punkten und Geraden zu Quadriken des ersten Art. herzustellen, werde ein Cartesisches Koordinatensystem zu Grunde gelegt, in dem der Punkt X die Koordinaten x, y hat. Es werde dann der Kreis $\mathcal{C}$ mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ angenommen und gesetzt:

$$(14) \quad x + iy = \rho a_0, \quad r = \rho a_1, \quad x - iy = \rho a_2,$$

wobei ρ eine beliebige Zahl ist. Hiedurch ist dann dem Punkt X die Quadrik $a_0^2 \equiv a_0 \xi_1^2 + 2 a_1 \xi_1 \xi_2 + a_1 \xi_2^2$ zugeordnet. Ist der Punkt X reell, sind also die Zahlen x, y reell, so hat diese Quadrik nach (14) die Eigenschaft, daß ihre äußeren Koeffizienten

resp. ihr mittlerer Koeffizient proportional sind konjugierten komplexen Zahlen resp. einer reellen Zahl; eine solche Quadrik soll eine „Realquadrik“ heißen. An den letzten Gleichungen ergibt sich dann:

$$x = \frac{r}{2} \frac{a_0 + a_2}{a_1}, \quad y = \frac{r}{2i} \frac{a_0 - a_2}{a_1}.$$

Dem Mittelpunkt des Normkreises entspricht die Realquadrik: $\xi_1 \xi_2$.

Es besteht für den Punkt X die Gleichung:

$$x^2 + y^2 - r^2 = \frac{1}{2} \rho^2 [a],$$

so daß, wenn X Normpunkt ist, $[a]$ verschwindet und umgekehrt. Es kann dann gesetzt werden:

$$a_0 = \alpha_2^2, \quad a_1 = \alpha_1 \alpha_2, \quad a_2 = \alpha_1^2,$$

worauf X die Koordinaten hat:

$$\frac{r}{2} \frac{\alpha_2^2 + \alpha_1^2}{\alpha_1 \alpha_2}, \quad \frac{r}{2i} \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_1 \alpha_2}.$$

Ist X ein reeller Normpunkt, so muß das Quadrat seiner Linearform eine Realquadrik sein; daher sind dann α_1, α_2 proportional konjugiert-imaginären Zahlen, und umgekehrt entspricht einer solchen Linearform, die eine „Reallineare“ heißen soll, ein reeller Normpunkt.

Jeder Linearform $\alpha \equiv \alpha_\xi \equiv \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$, mit den komplexen Zahlen $\alpha_1 = \lambda + i\mu, \alpha_2 = \sigma + i\tau$ als Koeffizienten, die nicht gerade konjugiert sind, entspricht ein nicht reeller Normpunkt. Sind $\bar{\alpha}_\eta$ die zu α_η konjugierten Zahlen, so soll die Linearform $\bar{\alpha} \equiv \bar{\alpha}_\xi \equiv \bar{\alpha}_2 \xi_1 + \bar{\alpha}_1 \xi_2$ „zu α konjugiert“ heißen. Es gilt: „Konjugierten Linearformen entsprechen konjugiert-imaginäre Normpunkte.“ Denn vermöge (14) ergeben sich als Koordinaten der den Formen α und $\bar{\alpha}$ entsprechenden Punkte:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{2} \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \sigma^2 - \tau^2 \pm 2i(\lambda\mu + \sigma\tau)}{\lambda\sigma - \mu\tau \pm i(\mu\sigma + \lambda\tau)}, \\ & \pm \frac{r}{2i} \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \sigma^2 - \tau^2 \pm 2i(\lambda\mu - \sigma\tau)}{\lambda\sigma - \mu\tau \pm i(\mu\sigma + \lambda\tau)} \end{aligned}$$

Eine Reallineare ist sich selbst konjugiert.

Dem Produkt zweier Linearformen α, β oder der Quadrik $a \equiv \alpha\beta$ kann nun der Punkt der Ebene zugeordnet werden, in dem sich die Tangenten des Normkreises für die Punkte α, β schneiden. Die Realquadrik eines reellen Punktes erscheint auf diese Weise als Produkt der konjugierten Linearformen der Normpunkte

seiner Normpolare: $a \equiv \alpha \bar{\alpha}$,¹⁾ sobald der Punkt innerhalb des Normkreises liegt und sonst als Produkt zweier Reallinearen.

Die Normpolare des Punktes X schneiden die x - resp. y -Achse im Punkte mit der Abscisse a resp. Ordinate b . Dann können die Werte r^2/a , r^2/b als Koordinaten dieser Geraden angesehen werden, so daß diese Koordinaten entsprechend gleich sind den Cartesischen Koordinaten des Normpoles der Geraden. Dann kann ihr auch die Quadrik ihres Normpoles zugeordnet werden, so daß zwischen ihren Koordinaten und den Koeffizienten ihrer Quadrik auch die Gleichungen (14) bestehen.

Liegt der Punkt X mit den Cartesischen Koordinaten x , y und der Quadrik a auf der Geraden mit den soeben definierten Koordinaten ξ , η und der Quadrik a' , so besteht die Gleichung $x\xi + y\eta = r^2$, woraus vermöge (14) folgt: $[aa'] \equiv a_0 a_2 - 2a_1 a'_1 + a_2 a'_0 = 0$; daher sind Punkt und Gerade mit apolaren Quadriken inzident.

Bezüglich der Darstellung der Quadrik einer Geraden als Produkt von Linearformen, die zu Normgeraden gehören, reeller Geraden durch Realquadriken, deren Faktoren Reallineare sind, die zu den reellen Normpunkten der Geraden gehören oder konjugierte Linearformen sind, die zu den konjugiert-imaginären Normpunkten der Geraden gehören, gilt Analoges zu dem soeben für Punkte gesagten.

Die unendlichferne Gerade u hat dieselbe Quadrik $u \equiv \xi_1 \xi_2$ wie das Zentrum u des Normkreises. Soll die Kurve zweiter Ordnung $\mathbb{C}_2$ eine Gleichung in Cartesischen Koordinaten mit nur reellen Koeffizienten besitzen, so müssen ihre Normpunkte entweder reell oder paarweise konjugiert-imaginär sein. Die Produkte der in gerader Anzahl vorhandenen reellen Normpunkte der $\mathbb{C}_2$ geben Produkte von halbsovielen Realquadriken, während jedes Paar von konjugiert-imaginären Normpunkten der $\mathbb{C}_2$ eine Realquadrik gibt, die Faktor der Biquadrik v der $\mathbb{C}_2$ sind. Ferner ist, wenn x eine Realquadrik ist, $[v x]$ auch eine solche, und wenn dann vermöge (4) einem reellen Punkte x eine reelle Gerade x' entsprechen soll, wie dies bei einer solchen Kurve der Fall ist, so muß der Realquadrik x vermöge (4) die Realquadrik x' zugehören, weshalb c reell sein muß; daher: „Die Biquadrik einer solchen $\mathbb{C}_2$ ist immer darstellbar als Produkt von Realquadriken, worauf dann ihre Konstante c reell ist.“

¹⁾ Vgl. hiezu E. Waelsch, Über Binäranalyse, III. Mitteilung, Sitzungsber. der Kais. Akad., Wien, Bd. CXII, Abt. II a, p. 1541, wo es sich um Quadriken auf dem absoluten Kegelschnitt des Euklidischen Raumes handelt, die Raumpunkte repräsentieren. Auch im Obigen kann eine reelle Transformation der Ebene, die den Normkreis in sich transformiert, analog zur Darstellung der reellen Dochstreckungen des Raumes um einen Punkt (s. Über Binäranalyse II. Mitteilg., ebenda p. 660) dadurch gegeben werden, daß die binären Veränderlichen ξ_1 , ξ_2 durch konjugierte Linearformen der neuen binären Veränderlichen ersetzt werden.

Soll die Kurve $\mathfrak{C}_2$ ein Kreis sein, so muß v den Faktor u haben; denn v gibt die Schnittpunkte der $\mathfrak{C}_2$ mit dem Normkreis und soll $\mathfrak{C}_2$ ein Kreis sein, so muß $\mathfrak{C}_2$ die absoluten Punkte π , ω , das sind die Wurzelpunkte von u , enthalten. Daher: „Ein Kreis $\mathfrak{K}$ hat eine Biquadrik von der Gestalt $u\mathfrak{z}$, wo $\mathfrak{z}$ eine Quadrik ist, und zwar die Quadrik derjenigen Geraden, welche die außer π und ω noch vorhandenen Normpunkte von $\mathfrak{K}$ enthält; „diese Gerade ist daher die Potenzlinie des Kreises $\mathfrak{K}$ mit dem Normkreise oder die Normchordale von $\mathfrak{K}$.“ Die Quadrik $\mathfrak{z}$, die mit der Konstanten c den Kreis $\mathfrak{K}$ bestimmt, soll als „Quadrik von $\mathfrak{K}$ “ bezeichnet werden. Ist $\mathfrak{K}$ reell so ist nach obigem $\mathfrak{z}$ eine Realquadrik und c reell. Ist $\mathfrak{z}$ das Quadrat einer Linearform α , so berührt $\mathfrak{K}$ den Normkreis im Punkte α . Der Normkreis hat die Quadrik u und die Konstante 0.

Die Polare des Punktes x bezüglich des Kreises $\mathfrak{K}$ hat nach (4) die Quadrik:

$$(15) \quad x' = [u\mathfrak{z}, x] + c x$$

und nach (7) ist das Binärbild dieses Kreises:

$$(16) \quad [u\mathfrak{z}, x^2] + c [x].$$

Nun ist

$$(17) \quad [u\mathfrak{z}, x^2] = [ux] [\mathfrak{z}x] - \frac{1}{3} [u\mathfrak{z}] [x]$$

daher kann, wenn

$$(18) \quad E \equiv c - \frac{1}{3} [u\mathfrak{z}]$$

gesetzt wird, das Binärbild (16) des Kreises auch geschrieben werden als:

$$(19) \quad [ux] [\mathfrak{z}x] + E [x]$$

„Ist $E=0$, so enthält $\mathfrak{K}$ die Gerade $\mathfrak{z}$ “; denn dann hat das Binärbild von $\mathfrak{K}$ den Faktor $[\mathfrak{z}x]$.

Der Kreis mit dem Binärbilde

$$(20) \quad [u\mathfrak{z}] [\mathfrak{z}x] - [u\mathfrak{z}] [x]$$

enthält die Punkte u und $\mathfrak{z}$ und hat die Normchordale $\mathfrak{z}$; daher sind u , $\mathfrak{z}$ diametrale Punkte dieses Kreises.

Ein Punkt der Zentrale der Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ hat die Quadrik $\lambda u + \mathfrak{z}$, und seine Polare bezüglich $\mathfrak{K}$ hat nach (15) die Quadrik:

$$[u\mathfrak{z}, \lambda u + \mathfrak{z}] + c (\lambda u + \mathfrak{z})$$

oder da gilt:

$$(21) \quad 6 [u\mathfrak{z}, u] = [u\mathfrak{z}] u + 3 A\mathfrak{z}, \quad 6 [u\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] = [u\mathfrak{z}] \mathfrak{z} + 3 [\mathfrak{z}] u$$

die Quadrik:

$$(22) \quad ([\mathfrak{z}] + \lambda D) u + (D + \lambda A) \mathfrak{z}$$

mit

$$(23) \quad D = \frac{1}{3} [u\mathfrak{z}] + 2c$$

Soll diese Polare identisch sein mit der unendlichfernen Geraden u , so muß der Koeffizient von z in (23) verschwinden; daher ist der Parameter λ des Zentrums c von $\mathfrak{K}$ gleich $-D/A$, also: „Die Quadrik des Zentrums c von $\mathfrak{K}$ ist:

$$(24) \quad c \equiv Du - A z. "$$

Ist $D = 0$, so ist dieses Zentrum identisch mit dem Punkte z , d. i. dem Normpole der Normchordale des Kreises $\mathfrak{K}$; daher: „Ist $D = 0$, so schneidet $\mathfrak{K}$ den Normkreis orthogonal.“ Die Formen des Kreises $\mathfrak{K}$ sind dann c und $c = -\frac{1}{6}[uc]$.

Die doppeltgezählte unendlichferne Gerade u hat als Kurve zweiter Ordnung (nach Art. 2) die Formen $u^2, \frac{1}{3}A$; demnach hat sie als Kreis betrachtet die Formen: $u, \frac{1}{3}A$.

Ein Kreis mit dem Zentrum c gehört dem Büschel an, das durch die beiden letzten Kreise bestimmt ist und hat daher die Formen:

$$(25) \quad c + \lambda u, -\frac{1}{6}[uc] + \frac{1}{3}\lambda A \text{ mit } E = -\frac{1}{2}[uc].$$

Soll $\mathfrak{K}$ mit den Formen z, c ein Punktkreis sein, so muß die Polare seines Zentrums identisch verschwinden. Daher muß für $\lambda = -D/A$ auch der Koeffizient von u in (23) verschwinden; folglich: „Die Bedingung dafür, daß $\mathfrak{K}$ ein Punktkreis sei, ist:

$$(26) \quad P \equiv D^2 - A[z] = 0. "$$

Die Kreise $\mathfrak{K}', \mathfrak{K}''$ mit den Formen z', c' und z'', c'' bestimmen ein Büschel, dessen Kreise die Formen haben:

$$\lambda z' + z'', \lambda c' + c''.$$

Soll der Kreis des Büschels eine Gerade enthalten, so muß nach Obigem die Konstante E des Kreises verschwinden, u muß also

$$\frac{1}{3}[\lambda z' + z'', u] - (\lambda c' + c'') = \lambda E' + E'' = 0$$

sein, daher: „Die Quadrik der Potenzlinie der Kreise $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ ist:

$$(27) \quad E'' z' - E' z''. "$$

Für die Parameter λ_1, λ_2 der Punktkreise des Büschels hat man dann nach (26) die Gleichung

$$(28) \quad L' \lambda^2 + 2 M \lambda + L'' = 0$$

wobei

$$L' = D'^2 - A[z'], \quad M = D' D'' - \frac{1}{2} A[z' z''], \quad L'' = D''^2 - A[z''].$$

Schneiden sich die beiden Kreise orthogonal, so trennen sich die Punktkreise harmonisch, daher: „Es ist $M = 0$ die Bedingung dafür, daß sich die Kreise $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ orthogonal schneiden.“

Für $\lambda_1 = \lambda_2$ folgt: „Es ist

$$(29) \quad L' L'' - M^2 = 0$$

die Bedingung für die Berührung der Kreise $\mathfrak{R}' \mathfrak{R}''$ oder

$$A R \mathfrak{z}' \mathfrak{z}'' = [D' \mathfrak{z}'' - D'' \mathfrak{z}']$$

wobei $R \mathfrak{z}' \mathfrak{z}'' = [\mathfrak{z}' \mathfrak{z}'']^2 - [\mathfrak{z}'] [\mathfrak{z}'']$ die Resultante der Quadriken $\mathfrak{z}', \mathfrak{z}''$ ist.

Der Potenzpunkt dreier Kreise $\mathfrak{R}_\infty$ mit den Formen $\mathfrak{z}^{(u)}$, $c^{(u)}$ hat die Quadrik

$$E'(\mathfrak{z}'', \mathfrak{z}''') + E''(\mathfrak{z}''', \mathfrak{z}') + E'''(\mathfrak{z}', \mathfrak{z}''),$$

denn dies ist die erste Überschiebung der Quadriken $E'' \mathfrak{z}' - E' \mathfrak{z}''$, $E''' \mathfrak{z}'' - E'' \mathfrak{z}'''$ der Potenzlinien der Kreispaaire $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}''$ und $\mathfrak{R}'', \mathfrak{R}'''$ (nach (27)), also die Quadrik des Schnittpunktes dieser Potenzlinien.

In dem Strahlenbüschel der Kreise des Büschels, das durch den Normkreis $\mathfrak{C}$ und den Kreis $\mathfrak{R}$ mit den Formen $\mathfrak{z}$, c gebildet wird, ist nach (16) die Konstante c Parameter. Nach (26) ergeben sich die Parameter c_1 , c_2 der Punktkreise dieses Büschels aus der Gleichung

$$(\frac{1}{3} [u \mathfrak{z}] + 2 c)^2 - A [\mathfrak{z}] = 0$$

als

$$c_{1,2} = -\frac{1}{3} [u \mathfrak{z}] \pm \sqrt{A [\mathfrak{z}]}$$

Nun haben die Tangenten der Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{R}$ und der Punktkreise des Büschels die Parameter ∞ , c , c_1 , c_2 ; demnach ist das Doppelverhältnis dieser vier Tangenten

$$\frac{c - c_1}{c - c_2} = \frac{D - \sqrt{A [\mathfrak{z}]}}{D + \sqrt{A [\mathfrak{z}]}}.$$

Da nun die Tangenten an die beiden Punktkreise nach den absoluten Punkten π , ω gehen und bekanntlich der Winkel zweier Geraden gleich ist $\frac{1}{2} i$ mal dem natürlichen Logarithmus des Doppelverhältnisses der Geraden mit den unendlichfernen Kreispunkten, so gilt: „Der Winkel, unter welchem der Kreis $\mathfrak{R}$ den Normkreis schneidet ist:

$$\varphi = \frac{1}{2i} \ln \frac{D - \sqrt{A [\mathfrak{z}]}}{D + \sqrt{A [\mathfrak{z}]}}$$

weshalb

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm i \sqrt{A [\mathfrak{z}]} / D$$

Ist $E=0$ oder $D=[u \mathfrak{z}]$, so enthält $\mathfrak{R}$ nach Obigem die Gerade $\mathfrak{z}$ und es folgt: „Für den Winkel φ , unter welchem die Gerade $\mathfrak{z}$ den Normkreis schneidet, oder den Peripheriewinkel φ des Normkreises, dessen Schenkel durch die Wurzelpunkte der Quadrik $\mathfrak{z}$ der Geraden $\mathfrak{z}$ gehen, gilt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm i \sqrt{A [\mathfrak{z}]} / [u \mathfrak{z}]$$

Für den Peripheriewinkel des Normkreises, der über den Normpunkten α, β steht, ist demnach, da $[\beta] = -(\alpha\beta)^{2/2}$ ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{1/2} A (\alpha\beta) / (u\alpha)(u\beta).$$

Die Biquadrik des Kreises $\mathfrak{K}$ mit den Formen β, c ist $u\beta$, daher ist hier:

$$\begin{aligned} \Delta_v &\equiv (u\beta, u\beta)^2 = 1/4 \{[u\beta] u^2 + A\beta^2\} - 1/6 [u\beta] u\beta \\ &\equiv 1/2 A [\beta] + 1/6 [u\beta]^2 \end{aligned}$$

Demnach hat $\mathfrak{K}$ als Kurve zweiter Klasse die Formen

$$(30) \quad [\beta] u^2 + A\beta^2 - 2Du\beta, 16c - 4/3 A [\beta] - 4/9 [u\beta]^2$$

Vermöge (24) und (26) ist die letzte Biquadrik auch:

$$(c^2 - Pu^2) / A.$$

Nach Art. 3 sind die Linearfaktoren dieser Form die Linearformen der Normgeraden, die $\mathfrak{K}$ berühren, folglich sind

$$c \pm \sqrt{P}u$$

die Quadriken der Ähnlichkeitspunkte des Kreises $\mathfrak{K}$ und des Normkreises.

Soll der Normkreis den Kreis $\mathfrak{K}$ tragen, so muß $\mathfrak{K}$ als Kurve zweiter Klasse eine verschwindende Konstante haben, daher muß nach (9) sein:

$$4c - 1/3 A [\beta] - 1/9 [u\beta]^2 = 0$$

Soll derjenige Kreis mit dem Zentrum c gefunden werden, der den Normkreis trägt, so gibt die letzte Gleichung eine lineare Gleichung in λ mit der Wurzel

$$-[c] / 4 [u c],$$

so daß für den gesuchten Kreis gilt:

$$(31) \quad \beta \equiv 4 [u c] c - [c], E = -2 [u c]^2$$

Für eine gleichseitige Hyperbel sind die absoluten Punkte π, ω , die Wurzelpunkte der Quadrik u , konjugiert, daher gilt nach (10): Die $\mathfrak{C}_2$ mit den Formeln v, c ist eine gleichseitige Hyperbel, wenn ist:

$$(32) \quad [v u^2] - 2cA = 0.$$

Eine Kurve zweiter Klasse $\mathfrak{C}^2$ mit den Formen v, c ist gegeben, es sollen die Formen β', c' des Direktorkreises¹⁾ der $\mathfrak{C}^2$ gefunden werden.

Damit die Gerade, welche die Normpunkte α, β verbindet, Tangente an $\mathfrak{C}^2$ sei, muß nach (6)

¹⁾ „Direktorkreis einer $\mathfrak{C}^{2n}$ ist (s. Dingeldey, Enzykl. III. C. 1. 16) der Ort des Punktes, von dem sich an $\mathfrak{C}^2$ zueinander senkrechte Tangenten legen lassen.

$$[v, \alpha^2 \beta^2] + c [\alpha \beta, \alpha \beta] = [v \alpha^2] \beta^2 - \frac{1}{2} c (\alpha \beta)^2 = 0$$

sein. Demnach sind die Linearformen der beiden Punkte β , in welchen die Tangenten der $\mathfrak{C}^2$, die α enthalten, den Normkreis nochmals schneiden, Faktoren der Quadrik:

$$[v \alpha^2] - \frac{1}{2} c \alpha^2.$$

Sollen diese Tangenten aufeinander senkrecht sein, so müssen die beiden Punkte β auf dem Normkreis diametral sein, also muß die letzte Quadrik apolar zur Quadrik u sein oder es ist:

$$[v \alpha^2] u - \frac{1}{2} c [\alpha^2 u] = 0;$$

folglich haben die Normpunkte des Direktorkreises der $\mathfrak{C}^2$ Linearformen, die Faktoren der Quadrik

$$z' \equiv [v u] - \frac{1}{2} c u$$

sind.

Der Mittelpunkt dieses Kreises ist derjenige der $\mathfrak{C}^2$, hat also nach Art. (2) die Quadrik: $[v u] + c u$. Ein Kreis mit diesem Zentrum hat aber nach (25) die Formen

$$[v u] + c u + \lambda u, -\frac{1}{6} [v u^2] - \frac{1}{6} c A + \frac{1}{3} \lambda A;$$

soll nun die erste dieser Formen mit z' identisch sein, so muß $\lambda = -\frac{3}{2} c$ sein; daher: „Der Direktorkreis der $\mathfrak{C}^2$ mit den Formen v, c hat die Formen:

$$(33) \ z' \equiv [v u] - \frac{1}{2} c u, c' \equiv \frac{1}{6} [v u^2] - \frac{2}{3} c A \text{ mit } E = -\frac{1}{2} ([v u^2] + c A)$$

Ist $E = 0$, so enthält dieser Kreis eine Gerade; dann ist aber auch $[v u^2] + c A = 0$, d. h. die unendlichferne Gerade u ist Tangente an $\mathfrak{C}^2$, oder $\mathfrak{C}^2$ ist eine Parabel, der Direktorkreis enthält deren Direktrix.

Eine Kurve zweiter Ordnung $\mathfrak{C}_2$, deren Direktorkreis durch das Zentrum u des Normkreises geht, ist normpolar zu einer gleichseitigen Hyperbel; demnach muß für die Formen v, c einer solchen $\mathfrak{C}_2$ die Beziehung (32) gelten.

Die Potenzlinie des Büschels, das die Direktorkreise einer Schar von Kurven $\mathfrak{C}^2$ zweiter Klasse bilden, ist die Direktrix der Parabel, die der Schar angehört. Die Mittelpunkte der $\mathfrak{C}^2$ der Schar liegen auf einer Geraden, und zwar auf der Newtonschen Geraden¹⁾ die der Schar umschriebenen Vierseits; denn jedes Paar von Gegenpunkten des Vierseits bildet eine Kurve der Schar, für deren Direktorkreis diese Gegenpunkte diametral sind.²⁾

Ein Kreis, der $\mathfrak{C}^2$ trägt, schneidet deren Direktorkreis orthogonal;³⁾ denn die Kreise, die $\mathfrak{C}^2$ tragen, bilden ein Netz, dessen

¹⁾ Nach einer Benennung von de Longchamps (s. Vigarié, l. c.) ist dies die Gerade, welche die Mittelpunkte der Gegenpunktpaare des Vierseits enthält.

²⁾ S. Dingeldey, Enzykl. l. c. Art. 60.

³⁾ Bezüglich dieses Satzes, der von Faure herrührt, vgl. Reye, l. c. p. 248.

Punktkreise auf dem Direktorkreis liegen müssen, weil die Geraden, die von einem Punkte dieses Kreises nach den absoluten Punkten gehen, konjugiert sind bezüglich $\mathfrak{C}^2$.

Die Direktorkreise der $\mathfrak{C}^2$ einer Scharschar bilden ein Netz, dessen Orthogonalkreis K alle $\mathfrak{C}^2$ derselben trägt. Die Direktorkreise einer Schar innerhalb der Scharschar bilden in diesem Netze ein Büschel, dessen Basispunkte bezüglich des Orthogonalkreises invers sind.

Die $\mathfrak{C}^2$ der Scharschar, deren Direktorkreise durch einen Punkt a gehen, bilden eine Schar; diese Direktorkreise schneiden sich außer in a noch in einem Punkte a' , der zu a bezüglich K invers ist. Der Ort der Mittelpunkte der Kurven der Schar, die Newtonsche Gerade des ihr umschriebenen Vierseits, ist die Potenzlinie des Punktes a und des Kreises K . Die Potenzlinie aa' des Büschels, das ist die Verbindungslinie des Punktes a mit dem Zentrum von K , ist die Direktrix der in der Schar enthaltenen Parabel. Die Direktrixen aller Parabel der Scharschar gehen demnach durch das Zentrum von K .

5. Die Dreiecksform und ihre Polaren. Es seien α, β, γ die Ecken des Dreiecks ∇ , der ihm umschriebene Kreis werde als Normkreis $\mathfrak{C}$ angenommen; den Eckpunkten des Dreiecks entsprechen die Linearformen α, β, γ , deren Produkt, die Kubik $\varphi \equiv \alpha\beta\gamma$, als „Dreiecksform“ bezeichnet werden möge.

Die Tangenten α, β, γ des Normkreises in den Eckpunkten von ∇ schneiden sich in den Ecken a, b, c eines Dreiecks D , die resp. den Seiten $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ des Dreiecks ∇ gegenüberliegen sollen. Die Punkte a, b, c haben die Quadriken $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$.

Der Normpunkt a' , der außer a auf der Geraden aa liegt, ist der vierte harmonische von a bezüglich der Punkte β, γ ; demnach ist seine Linearform

$$a' = (\beta\alpha)\gamma + (\gamma\alpha)\beta$$

Die Grade g , die einen beliebigen Normpunkt ζ mit dem Punkte a' verbindet, hat die Quadrik $a'\zeta$; da aber

$$(\beta\alpha)\zeta = -(\alpha\zeta)\beta + (\beta\zeta)\alpha, \quad (\gamma\alpha)\zeta = -(\alpha\zeta)\gamma + (\gamma\zeta)\alpha,$$

so ist

$$a'\zeta = -3(\alpha\zeta)\beta\gamma + \sum(\alpha\zeta)\beta\gamma = x\beta\gamma + 3(\varphi, \zeta).$$

Hieraus folgt, daß die Geraden $g, \beta\gamma$ und die Gerade ζ' deren Quadrik (φ, ζ) ist, d. i. die erste Polare des Poles ζ bezüglich der Dreiecksform φ , sich in einem Punkte x schneiden; daher: „Die Projektionen aus ζ der Punkte a', β', γ' auf die Seiten $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ des Dreiecks ∇ liegen auf der Geraden ζ' mit der Quadrik $\zeta' = (\varphi, \zeta) = \varphi\zeta$, die also aus dem Grundkreise die erste Polargruppe des Punktes ζ bezüglich des Tripels α, β, γ ausschneidet.“

Da sich die Geraden ax und $a\zeta$ im Normpunkte a' schneiden, so folgt auch: „Projiziert man aus dem Punkte ζ das Dreieck

a, b, c auf den Normkreis nach a', b', c' , so liegen die Schnittpunkte dieser Gradenpaare: $\alpha a', \beta \gamma; \beta b', \gamma \alpha; \gamma c', \alpha \beta$ auf ζ' .⁴⁾

Die Gerade $\alpha a'$ ist die vierte harmonische zu $\alpha \zeta$ bezüglich $\alpha \beta$ und $\alpha \gamma$; demnach liegt der Punkt ζ auch auf der Harmonikale (linearen Polare) des Punktes ζ bezüglich der Kurve dritter Ordnung ∇_3 , die aus den drei Seiten des Dreiecks besteht; daher: „Die Gerade ζ' ist die Harmonikale des Punktes ζ bezüglich der ∇_3 “¹⁾

Umgekehrt ist ζ der Pol der Geraden ζ' bezüglich der Kurve dritter Klasse²⁾ ∇^3 , die aus den drei Eckpunkten von ∇ besteht.

Für die Punkte a', b' gilt

$$a'b' = \{(\beta \zeta) \gamma + (\gamma \zeta) \beta\} \{(\alpha \zeta) \gamma + (\gamma \alpha) \zeta\} = (\beta \zeta)(\alpha \zeta) \gamma^2 + 3(\gamma \zeta)(\varphi, \zeta),$$

weshalb die Gerade $a'b'$ durch den Schnittpunkt der Geraden γ und ζ' geht; daher: „In der Perspektivität, in der sich die Dreiecke abc und $a'b'c'$ entsprechen, ist ζ Zentrum und ζ' Achse.“

Da die erste Polargruppe des Punktes ζ eine Involution beschreibt, deren Doppelemente die Wurzelpunkte der Hesseschen Form Δ von φ sind, so beschreibt die Gerade ζ' ein Büschel mit dem Punkte Δ als Zentrum. Für $\zeta = \alpha, \beta, \gamma$ erhält man die Geraden $\alpha a, \beta b, \gamma c$ des Büschels; der Schnittpunkt dieser Geraden ist aber der Lemoinesche Punkt des Dreiecks Δ ; daher: „Der Lemoinesche Punkt des Dreiecks ∇ hat die Quadrik ∇ “³⁾

Da die lineare Polare eines jeden Normpunktes bezüglich ∇_3 durch den Punkt Δ geht, so ist ζ die erste Polare des Punktes Δ bezüglich ∇_3 und da die Harmonikale dieses Punktes bezüglich ∇ dessen Polare bezüglich dieser ersten Polare ist, so ist die Gerade mit der Quadrik Δ die Lemoinesche Gerade.

Die Punkte $\alpha' \beta' \gamma'$ sind Wurzelpunkte der Kovariante $Q = (\varphi, \Delta)$ von φ .

6. System der Formen u, φ . Das volle System der Quadrik u und der Kubik φ besteht aus folgenden Formen:⁴⁾

$$u, \varphi, \Delta = (\varphi \varphi)^2, \Theta = (u, \Delta) = [\varphi p], \vartheta = (u, \varphi), Q = (\varphi, \Delta)$$

$$p = [u \varphi], q = [u p] = [u^2 \varphi], r = [p \Delta] = [u Q], s = [\Theta p],$$

$$A = [u], B = [u \Delta], C = [\Delta]$$

$$F = [u p^2] = [q p], M = -[\Theta p^2] = [u, p r] = \Delta, p q = [q r]$$

Die Resultante der Formen u, φ ist:

$$R = F - 2AB$$

¹⁾ Vgl. E. Waelsch, Zur Konstruktion der Polargruppen „Sitzungsber. d. K. Ak. d. Wissensch., Wien 1891, Bd. 100 Abt. II., p. 317.

²⁾ Vgl. E. Waelsch, Geom. Darstellung d. Theorie der Polargruppen, Sitzungsber. d. K. Ak. Wien 1883, Bd. 88, Abt. II., p. 423.

³⁾ Der Lemoinesche Punkt ist auch definiert als Schnittpunkt der „Symmedianen von ∇ : ein Kreis, der durch die Punkte β, γ geht, schneidet die Seiten $\alpha \beta, \alpha \gamma$ in je einem weiteren Punkte; diese beiden Punkte haben eine Verbindungslinie, die parallel ist zur Normtangente α und deren Mittelpunkt auf der Symmediane des Punktes α liegt, die demnach die vierte harmonische von α bezüglich der Geraden $\beta \alpha, \alpha \gamma$ ist, oder die Gerade αa .

⁴⁾ S. etwa Gordan, Invarianten II, p. 324.

Es bestehen zwischen den obigen Formen die im folgendem verwendeten Beziehungen:

$$(34) \quad [\varphi \Delta] = 0;$$

$$(35) \quad [\varphi^2 \Delta] = -\frac{3}{10} \Delta^2, [\varphi^2 \Delta^2] = -\frac{1}{5} C \Delta, \\ [\varphi^2 \Delta^3] = -\frac{1}{5} C^2;$$

$$(36) \quad 6[u, u \Delta] = B u + 3 A \Delta, [u^2 \Delta] = B u - \frac{1}{3} A \Delta, \\ [u^2, u \Delta] = \frac{2}{3} A B;$$

$$(37) \quad 6[\Delta, u \Delta] = B \Delta + 3 C u, [\Delta^2 u] = B \Delta - \frac{1}{3} C u, \\ [\Delta^2, u \Delta] = \frac{2}{3} B C;$$

$$(38) \quad [\Delta^2 u] = B \Delta - \frac{1}{3} C u, [\Delta^2 u^2] = B^2 - \frac{1}{3} A C, \\ [\Delta^2 \Delta] = \frac{2}{3} C \Delta;$$

$$(39) \quad [u \Theta] = [\Delta \Theta] = 0, (u, \Theta) = \frac{1}{2} (B u - A \Delta), \\ (\Delta, \Theta) = [\varphi r] = \frac{1}{2} (C u - B \Delta);$$

$$(40) \quad [\Theta] = L = [\Delta p^2] = [p r] = \frac{1}{2} (A C - B^2);$$

$$(41) \quad -2 \Theta^2 = A \Delta^2 - 2 B u \Delta + C u^2;$$

$$(42) \quad [q s] = \frac{1}{2} (B F - A L);$$

$$(43) \quad [u, p q] = [\Delta, p r] = 0, [u, q r] = [u q] r \\ = -\frac{1}{2} A [p r] = -\frac{1}{2} A L;$$

$$(44) \quad [u r] = \frac{1}{2} B p - s, [\Delta r] = \frac{1}{2} C p, [\Delta, q r] = -\frac{1}{2} F C;$$

$$(45) \quad \left. \begin{aligned} [\varphi^2 u] &= p \varphi - \frac{3}{10} \Delta u, \\ [\varphi^2 u^2] &= \frac{1}{5} B u - \frac{2}{5} A \Delta + p^2, \\ [\varphi^2 u^3] &= F - \frac{1}{5} A B; \end{aligned} \right\}$$

$$(48) \quad p s = [\Theta p] p = (\Theta, p^2) = (u, \Delta, p^2) = \frac{1}{2} (F \Delta - L u).$$

Es ist ferner

$$p^2 q r = - (u, p^2) (\Delta, q^2) = \text{nach Gordan, l. c. p. 52, Formel II:} \\ = \frac{1}{2} (B p^2 - F \Delta - L u) p^2;$$

daher ist:

$$(49) \quad q r = \frac{1}{2} (B p^2 - F \Delta - L u),$$

woraus folgt:

$$(50) \quad [\varphi, q r] = \frac{1}{2} (B [\varphi p^2] - L [\varphi u]) = \frac{1}{2} (B [\Theta p] - L p) \\ = \frac{1}{2} (B s - L p).$$

Weiters ist nach Gordan, l. c. p. 327:

$$(\varphi, q) = (\Theta, u) - p^2 = \frac{1}{2} (A \Delta - B u) - p^2$$

daher ist:

$$\begin{aligned} [\varphi, p q] &= [\varphi q] p = -\frac{1}{2}(A + B q) = \text{nach G o r d a n, l. c. p. 325} \\ (51) \quad &= -[u s]. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} [\varphi \Theta] &= [\varphi [\varphi p]] = [\varphi_{\xi}^3, (\varphi p) \varphi_{\xi}^2] = (\varphi \varphi')^2 (\varphi' p) \varphi_{\xi}^2 = \\ &= (\varphi \varphi')^2 \{ [\varphi_{\xi} \varphi'_{\xi} p] + \frac{1}{2} (\varphi \varphi') p_{\xi} \} = (\text{da } (\varphi \varphi')^3 = 0 \text{ ist}) \\ (52) \quad &= [\Delta p] = -r. \end{aligned}$$

7. Die Punkte p, q, r, s des Dreiecks ∇ . Ist n eine Quadrik, so ist der Normpunkt v mit der Linearform

$$v = [\varphi n]$$

nach Art. 5 der Pol bezüglich ∇^3 der Geraden mit der Quadrik (φ, v) , welche Gerade durch den Punkt Δ geht. Da aber

$$[[\varphi v] n] = [[\varphi n] v] = [v] = 0,$$

muß diese Gerade den Punkt n enthalten; daher: „Der Punkt v ist der Pol der Geraden Δn bezüglich ∇^3 .“ Diese Gerade schneidet die Seite $\beta \gamma$ des Dreiecks ∇ in einem Punkte, der mit α' und v auf einer Geraden liegt; oder: „Die Gerade Δn schneidet die Seiten des Dreiecks ∇ in einem geradlinigen Dreieck, das perspektivisch ist zu dem Dreieck $\alpha' \beta' \gamma'$ mit dem Punkte v als Perspektivitätszentrum.“

Ist speziell $n = u$, so wird

$$v = p = [\varphi u]$$

gleich der ersten linearen Kovariante von φ und u . Der Punkt p ist ein merkwürdiger Punkt des Dreiecks ∇ , der nach dem eben in Art. 7 Gesagten in folgender Weise gefunden wird: „Die Gerade Θ , die den Lemoineschen Punkt Δ mit dem Mittelpunkt u verbindet, welche auch Brocardscher Durchmesser des Dreiecks ∇ genannt wird, und deren Quadrik die Kovariante $\Theta = (u, \Delta)$ ist, schneidet die Seiten des Dreiecks ∇ in einem geradlinigen Dreiecke, das zum Dreieck $\alpha' \beta' \gamma'$ perspektivisch ist mit dem Perspektivitätszentrum p .“ Dieser Punkt p ist auch der Pol der Geraden Θ bezüglich der Kurve ∇^3 , oder seine Harmonikale bezüglich ∇ ist die Gerade Θ . Projiziert man das Dreieck D aus p auf den Normkreis, so erhält man ein neues Dreieck, das zu D perspektivisch ist mit der Achse Θ .

Das Vorstehende ergibt sich auch daraus, daß $\Theta = [\varphi p]$ ist.

Dual folgt: „Die Senkrechten auf Θ aus den Ecken des Dreiecks D schneiden die homologen Normgeraden α', β', γ' in Punkten der Geraden p .“

Die Punkte q, r, s haben resp. die Linearformen $[u p]$, $[p \Delta]$, $[\Theta p]$; daher ist q diametral zu p auf $\mathfrak{C}$, r der zweite Normpunkt der Geraden Δp , und s symmetrisch zu p bezüglich der Geraden Θ .

8. Kurven dritter Ordnung und Kurven dritter Klasse. In der Gleichung

$$(53) \quad [\mathfrak{f} x^3] + [\mathfrak{z} x] [x] = 0,$$

wo $\mathfrak{f}, \mathfrak{z}$ allgemeine Formen sechster resp. zweiter Ordnung mit sieben resp. drei Konstanten sind, steht links die in den Koeffizienten der Quadrik x allgemeinste Form oder, vermöge der Gleichungen (1), eine in den Koordinaten X_1, X_2, X_3 des Punktes x allgemeinste ternäre Form einer Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{C}_3$. Demnach kann

$$(54) \quad \mathfrak{C}_3 \equiv [\mathfrak{f} x^3] + [\mathfrak{z} x] [x]$$

als das „Binärbild“ der $\mathfrak{C}_3$ bezeichnet werden, die Form $\mathfrak{f}$ als deren Sextik, und $\mathfrak{z}$ als ihre Quadrik. (Vgl. Art. 1 u. 3 bezüglich Gerade und $\mathfrak{C}_2$).

„Die Wurzelpunkte der Sextik $\mathfrak{f}$ der $\mathfrak{C}_3$ auf dem Normkreis $\mathfrak{C}$ sind die Schnittpunkte der $\mathfrak{C}_3$ mit $\mathfrak{C}$;“ denn ist $\mathfrak{f} = \alpha f$, wo α eine Linearform ist, so genügt der Normpunkt α der Gleichung (53), da seine Quadrik α^2 ist, und

$$[\alpha f, \alpha^6] + [\mathfrak{z} \alpha^2] [\alpha^2] = 0,$$

weil $[\alpha f, \alpha^6] = [\alpha] [f \alpha^5] = 0$, $[\alpha^2] = 0$.

Das Binärbild der ersten Polare des Punktes b bezüglich der $\mathfrak{C}_3$ erhält man, wenn man mit der Form b bezüglich des Binärbildes (54) der $\mathfrak{C}_3$ den Aronhold'schen Prozeß anwendet als:

$$(55) \quad \delta_b \mathfrak{C}_3 \equiv \sum b_k \frac{\partial \mathfrak{C}_3}{\partial a_k} = [\mathfrak{f}, b x^2] + \frac{1}{3} [\mathfrak{z} b] [x] + \frac{2}{3} [\mathfrak{z} x] [b x].$$

Da nun

$$[\mathfrak{z} x] [b x] = [\mathfrak{z} b, x^2] + \frac{1}{3} [\mathfrak{z} b] [x]$$

ist, so ist das Binärbild dieser ersten Polare der $\mathfrak{C}_3$:

$$\delta_b \mathfrak{C}_3 = [\mathfrak{f} b] + \frac{2}{3} [\mathfrak{z} b, a^2] + \frac{5}{9} [\mathfrak{z} b] [x],$$

so daß sie die Formen hat:

$$(56) \quad [\mathfrak{f} b] + \frac{2}{3} \mathfrak{z} b, \frac{5}{9} [\mathfrak{z} b].$$

Vertauscht man in (55) b mit x , so ergibt sich durch zweimalige Anwendung desselben Aronhold'schen Prozesses:

$$(57) \quad \delta_{x^2} \mathfrak{C}_3 = [\mathfrak{f} b^2] + \frac{1}{3} [b] [\mathfrak{z} x] + \frac{2}{3} [\mathfrak{z} b] [b x]$$

oder: „Die lineare Polare des Punktes b bezüglich $\mathfrak{C}_3$ hat die Quadrik:

$$(58) \quad [\mathfrak{f} b^2] + \frac{1}{3} [b] \mathfrak{z} + \frac{2}{3} [\mathfrak{z} b] b^2.$$

Eine $\mathbb{C}_3$, deren Gleichung in Cartesischen Koordinaten nur reelle Koeffizienten hat, welche demnach nur reelle oder konjugiert-imaginäre Normpunkte enthält, besitzt eine Sextik, welche das Produkt von Realquadriken ist; dies läßt sich ähnlich wie das bezüglich der Biquadrik der $\mathbb{C}_2$ Gesagte beweisen. Es ist dann $[\mathfrak{f} b^2]$ eine Realquadrik, sobald b eine solche ist, und da die lineare Polare eines jeden Punktes bezüglich dieser $\mathbb{C}_3$ eine reelle Gerade ist, so folgt nach (58), daß dann die Quadrik $\mathfrak{z}$ der $\mathbb{C}_3$ auch eine Realquadrik sein muß.

Dual ergibt sich: Ist in (54) die Quadrik x die einer Geraden, so stellt (54) das Binärbild einer Kurve $\mathbb{C}^3$ dritter Klasse dar, die mit dem Normkreis sechs Tangenten gemein hat, deren Linearformen Faktoren von $\mathfrak{f}$ sind. Die Gerade b hat als Polare zweiter Klasse bezüglich $\mathbb{C}^3$ eine Kurve mit den Formen (56) und als Pol den Punkt mit der Quadrik (58) ¹⁾.

9. Die Kurve ∇^3 . Soll eine Gerade durch einen der Eckpunkte des Dreiecks ∇ gehen, so muß ihre Quadrik mit der Dreiecksform φ einen Linearfaktor haben. Demnach gibt die Resultante der Formen x und φ das Binärbild der Kurve ∇^3 als:

$$[p_x^2 x] - 2[\Delta x][x], \text{ wobei } p_x = [\varphi x].$$

Vermöge der Gleichung, die man aus (47) erhält, indem man x statt u setzt, folgt demnach: „Die Kurve ∇^3 hat das Binärbild

$$(59) \quad \nabla^3 \equiv 5[\varphi^2 x^2] - 9[\Delta x][x]$$

oder die Formen

$$(60) \quad 5\varphi^2, -9\Delta^4.$$

Nach Art. 8. hat demnach die Gerade b als erste Polare bezüglich ∇^3 die Kurve zweiter Klasse mit dem Binärbild:

$$(61) \quad \delta_b \nabla^3 \equiv [5[\varphi^2 b] - 6\Delta b, x^2] - 5[\Delta b][x]$$

oder mit den Formen

$$(62) \quad 5[\varphi^2 b] - 6\Delta b, -5[\Delta b].$$

und als Pol den Punkt mit dem Binärbild:

$$(63) \quad \delta_b \nabla^3 \equiv [5[\varphi^2 b^2] - 3[b]\Delta - 6[\Delta b]b, x]$$

¹⁾ Die Resultate dieses Artikels gelten selbstverständlich auch bei Zugrundelegung einer beliebigen Normkurve zweiter Ordnung (Art. 1 und 2) und lassen sich leicht für Kurven höherer Ordnung oder Klasse verallgemeinern. Das Binärbild einer Kurve n^{ter} Ordnung C_n ist

$$C_n \equiv [f x^n] + C_{n-2}[x],$$

wo f eine Form 2^{ter} Ordnung ist und C_{n-2} das Binärbild einer Kurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Wurzelpunkte von f sind die Normpunkte der C_n . Hat die Gleichung der C_n in Cartesischen Koordinaten nur reelle Koeffizienten, so ist f und jede der in C_{n-2} auftretenden weiteren Formen der Ordnungen $2n-4, 2n-6, \dots$ das Produkt von Realquadriken.

oder mit der Quadrik

$$(64) \quad 5 [\varphi^2 b^2] - 3 [b] \Delta - 6 [\Delta b] b.$$

Wird speziell für b die Gerade Δ genommen, so folgt hieraus vermöge (3), daß ihr Pol bezüglich ∇^3 die Quadrik $-30 C \Delta$ hat, also der Punkt Δ ist, wie sich auch leicht geometrisch ergibt.

Geht b durch den Punkt Δ , so verschwindet $[\Delta b]$, daher folgt nach (62) und Art. 2, daß dann die Polare von b bezüglich ∇^3 vom Normkreis getragen wird.

Die erste Polare der Geraden Δ bezüglich ∇^3 berührt jede Seite des Dreiecks ∇ in ihren Schnittpunkten mit der Symmediane der gegenüberliegenden Eckpunktes von ∇ und ist demnach die Brocardsche Ellipse $\mathfrak{B}$ von ∇ . Daher folgt nach (62) und vermöge (35): „Die Brocardsche Ellipse $\mathfrak{B}$ des Dreiecks ∇ hat als Kurve zweiter Klasse die Formen

$$(65) \quad 3 \Delta^2, 2 C.$$

Diese Ellipse berührt folglich (Art. 3) den Normkreis in den Normpunkten der Geraden Δ , weshalb eine der Achsen der Ellipse durch den Punkt Δ und den Mittelpunkt u des Normkreises geht, also die Gerade Θ ist. Der Mittelpunkt v der Ellipse hat als Pol der unendlichfernen Geraden u (Art. 3) die Quadrik:

$$(66) \quad v \equiv 3 [\Delta^2 u] + 2 C u = (\text{nach (38)}) = 3 A \Delta + C u.$$

Ein beliebiger Punkt der Geraden Θ hat, da sie die Punkte u und Δ enthält die Quadrik $\Delta + \lambda u$; für den Schnittpunkt Δ' dieser Geraden mit der Geraden Δ ist dann: $[\Delta + \lambda u, \Delta] = C + \lambda B = 0$, also hat Δ' die Quadrik $B \Delta - C u$. Vermöge (66) folgt dann, daß in der Punktreihe von Punkten mit der Quadrik $C u - \mu B \Delta$ den Punkten u, Δ, Δ', v die Parameter $\mu = 0, \infty, 1, -3$ zukommen. Demnach kann v leicht konstruiert werden, wenn u, Δ, Δ' gegeben sind, wie folgt: Ist Δ'' der vierte harmonische von Δ' bezüglich u und Δ , so ist v der vierte harmonische von Δ' bezüglich $\Delta \Delta''$.

Der Direktorkreis (Art. 4) der Ellipse $\mathfrak{B}$ hat mit dem Normkreis die Potenzlinie mit der Quadrik

$$(67) \quad 3 [\Delta^2 u] - C u = (\text{nach (38)}) = 3 B \Delta - 2 C u,$$

und es ist für ihn

$$E = -\frac{3}{2} [\Delta^2 u^2] - C A = (\text{nach (38)}) = -\frac{1}{2} (A C + 3 B^2).$$

Die zweite Achse Θ' der Ellipse $\mathfrak{B}$, die sogenannte Brocardsche Gerade des Dreiecks ∇ , ist parallel zur Geraden Δ , hat also die Quadrik $u + \mu \Delta$; und da Θ den Punkt v enthält, muß $[u + \mu \Delta, v] = 0$, also $\mu = -[u v] / [\Delta v] = (3 B^2 + A C) / 4 B C$ sein; daher: „Die Quadrik der Achse Θ' der Ellipse $\mathfrak{B}$ ist:

$$4 B C u - (3 B^2 + A C) \Delta.$$

„Als Kurve zweiter Ordnung hat $\mathfrak{B}$ die Formen Δ^2 , $-C$;“ denn da sie den Normkreis in den Schnittpunkten mit der Geraden Δ berührt, so hat sie die Form Δ^2 ; da ferner die Quadrik ihres Mittelpunktes durch (66) gegeben ist, so hat die Polare dieses Mittelpunktes die Quadrik:

$$[\Delta^2, 3B\Delta + Cu] + c[3B\Delta + Cu] = (\text{nach (38)}) = \\ = 3B(C + c)\Delta + C(c - \frac{1}{3}C)u$$

Da aber die Polare des Mittelpunktes die unendlichferne Gerade mit der Quadrik u ist, so muß $c = -C$ sein.

„Der Brocardsche Kreis des Dreiecks ∇ hat die Formen Δ , $-\frac{2}{3}B$;“ denn für diesen Kreis sind die Punkte u , Δ diametral, er hat folglich nach (20) das Binärbild

$$(68) \quad [ux][\Delta x] - B[x] = [u\Delta, x^2] - \frac{2}{3}B[x].$$

Ein Punkt der Achse Θ' hat die Quadrik $v + \mu\Theta$ und der zu ihm bezüglich des Punktes v symmetrische hat die Quadrik $v - \mu\Theta$. Demnach hat die Kurve zweiter Klasse, die aus den Brennpunkten der Ellipse $\mathfrak{B}$ besteht, die auf Θ' liegen (Art. 2), die Biquadrik

$$v^2 - \mu^2\Theta^2 = (\text{nach (66) und (41)}) = (9B^2 + \frac{1}{2}\mu^2A)\Delta^2 + \\ + B(6C - \mu^2)u\Delta + C(1 + \frac{1}{2}\mu^2C)u^2.$$

Anderseits gehört diese Kurve zweiter Klasse der Schar an, die durch $\mathfrak{B}$ und die Kurve bestimmt ist, die aus den absoluten Punkten besteht, welche Kurven die Biquadriken $3\Delta^2$ resp. u^2 haben; also hat sie eine Biquadrik von der Gestalt: $3\Delta^2 + \gamma u^2$. Durch Vergleichung mit der vorigen Biquadrik ergibt sich, daß in dieser der Koeffizient des Gliedes mit dem Faktor $u\Delta$ verschwinden muß, daß also $\mu^2 = 6C$ ist; daher: „Die Brennpunkte der Ellipse $\mathfrak{B}$, die sogenannten Brocardschen Punkte des Dreiecks ∇ , haben die Quadriken:

$$v \pm \sqrt{6} \sqrt{C} \Theta'.$$

sie sind auch die reellen Brennpunkte der Ellipse $\mathfrak{B}$, denn diese Quadriken sind aus den Quadriken der reellen Punkte v , Θ mit reellen Zahlen abgeleitet.

10. Die Kurve ∇_3 besteht aus den drei Seiten des Dreiecks ∇ und schneidet den Normkreis daher doppelt in den Ecken des Dreiecks ∇ . Folglich ist ihre Sextik: $\mathfrak{f} = \varphi^2$. Um ihre Quadrik $\mathfrak{z}$ zu bestimmen, beachte man, daß (Art. 5) die erste Polare des Punktes Δ für ∇_3 mit dem Normkreise identisch sein muß, ihr Binärbild also bis auf einen konstanten Faktor mit $[x]$. Daher verschwindet die Biquadrik dieser Polare identisch, welche aber nach (56) ist:

$$9[\varphi^2\Delta] + 6\mathfrak{z}\Delta = (\text{nach (35)}) = -\frac{27}{10}\Delta^2 + 6\mathfrak{z}\Delta,$$

folglich ist $\mathfrak{z} = \frac{9}{20}\Delta$, und es ergibt sich: „Die Kurve ∇_3 hat die

Formen:

$$(69) \quad 20 \varphi^2, 9 \Delta;$$

ihr Binärbild ist:

$$(70) \quad \nabla_3 \equiv 20 [\varphi^2 x^3] + 9 [\Delta x] [x].^{“1”}$$

Da nun:

$$(71) \quad \partial_{\Delta} \nabla_3 = 5 C[x], \partial_{\Delta^2} \nabla_3 = 5 C[\Delta x], \partial_{\Delta^3} \nabla_3 = 5 C^2$$

ist, so folgt nach Art. 8: „Die erste Polare des Punktes b bezüglich ∇_3 hat die Formen

$$(72) \quad 4 [\varphi b] \varphi, [\Delta b]^{“};$$

denn nach (56) und (69) sind die Formen:

$$(73) \quad 20 [\varphi^2 b] + 6 \Delta b, 5 [\Delta b],$$

woraus sich unter Anwendung von (45) die obigen Formen ergeben.

„Diese erste Polare des Punktes b bezüglich ∇_3 schneidet den Normkreis außer in den Ecken des Dreiecks ∇ noch in dem Punkte mit der Linearform $[\varphi b]$;“ denn diese Form ist Faktor der Biquadrik der Polare (Art. 8). Z. B. wenn b mit dem Zentrum u des Normkreises identisch ist, so folgt, daß „die erste Polare des Punktes u bezüglich ∇_3 den Normkreis im Punkte p schneidet,“ denn dessen Linearform ist $p \equiv [\varphi u]$.

„Die lineare Polare des Punktes b bezüglich ∇_3 hat nach (58) und (69) die Quadrik:

$$(74) \quad 20 [\varphi^2 b^2] + 3 [b] \Delta + 6 [\Delta b] b.^{“}$$

11. Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt des Dreiecks ∇ . „Der Schwerpunkt m des Dreiecks ∇ hat die Quadrik

$$(75) \quad m \equiv p^2 - A \Delta - B u;^{“}$$

denn er ist der Pol der unendlichfernen Geraden u bezüglich der Kurve ∇^3 , hat daher nach (64) die Quadrik

¹⁾ Die Kurve dritter Ordnung C_3 , welche den Normkreis in den Ecken von ∇ berührt und den Punkt Δ zum Doppelpunkt hat, wird erzeugt durch den Schnittpunkt der Tangente ζ des Punktes ζ des Normkreises mit der linearen Polare ζ' des letzteren (Art. 5) bezüglich ∇_3 ; sie hat die Formen $5 \varphi^2, \Delta$. Denn die lineare Polare ihres Doppelpunktes Δ muß identisch verschwinden; diese hat aber nach (58) die Quadrik:

$$3 [\varphi^2 \Delta^2] + C_3 + 2 [\zeta \Delta] \Delta = (\text{nach (35)}) = (-\frac{3}{5} \Delta + \zeta) \Delta + 2 [\zeta \Delta] \Delta,$$

die identisch verschwindet, wenn $\zeta = \frac{1}{5} \Delta$ ist. Das Binärbild der C_3 ist

$$\Delta 5 [\varphi^2 x^3] + [\Delta x] [x] = (\text{nach (47)}) = 5 [p_x^2 x];$$

daher: „Die Invariante F im System der Kubik φ und der Quadrik x ist das Binärbild der C_3 .“ Diese C_3 hat die Geraden, welche durch den Punkt Δ gehen und den Normkreis berühren zu Doppelpunktstangenten; sie liegt in dem Büschel, das bestimmt ist durch die Kurve ∇_3 und die in den Normkreis und die Gerade Δ zerfallende Kurve.

$$5 [\varphi^2 u^2] - 3 A \Delta - 6 u,$$

woraus sich unter Anwendung von (46) die Quadrik m ergibt.

Es ist:

$$(76) \quad [u m] = R, [m] = -2 B R.$$

Der Höhenschnittpunkt h des Dreiecks ∇ hat die Quadrik

$$h \equiv 2 R u - 3 A m;''$$

denn er teilt die Strecke $u m$ im Verhältnis $-\frac{3}{2}$, weshalb nach (11) ist:

$$h \equiv [m u] u - \frac{3}{2} A m = ([p^2 u] - 2 A B) u - \frac{3}{2} A m.$$

Es ist:

$$(77) \quad [u h] = -A R, [h] = -2 A R (4 F + A B).$$

„Die Eulersche Gerade e des Dreiecks ∇ hat die Quadrik

$$(78) \quad e \equiv p q - A \Theta;''$$

denn sie verbindet den Schwerpunkt m mit dem Mittelpunkt u , hat also die erste Überschiebung der Quadriken u und m oder u und $p^2 - A \Delta$ als Quadrik, d. i.:

$$p(u, p) - A \Theta = p q - A \Theta.$$

Demnach liegt auch der Punkt w mit der Quadrik

$$(79) \quad w = p^2 - A \Delta.$$

auf der Geraden e ; und da diese Quadrik aus p^2 und Δ abgeleitet ist, so liegt er auch auf der Geraden $p \Delta$, d. i. auch (nach Art. 7) die Gerade $p r$.

„Die Harmonikale h' des Höhenschnittpunktes h bezüglich des Dreiecks ∇ hat die Quadrik:

$$(80) \quad h' \equiv p^2 - A \Delta + \frac{1}{2} B u = w + \frac{1}{2} B u = m + \frac{3}{2} B u''.$$

Denn h' ist der Ort des Punktes b , dessen erste Polare bezüglich der Kurve ∇_3 durch h geht, also eine der gleichseitigen Hyperbeln ist, die durch die Ecken von Δ gehen. Die Formen dieser Polare sind durch (73) gegeben, und sie ist nach (32) eine gleichseitige Hyperbel, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= [20 [\varphi^2 b] + 6 \Delta b, u^2] - 10 A [\Delta b] = \\ &= [20 [\varphi_2 u^2] + 6 \Delta u^2, b] - 10 A [\Delta b] = (\text{nach (46) u. (79)}) \\ &= 10 [2 w + B u, b]. \end{aligned}$$

Es ist:

$$(81) \quad [h' u] = F - \frac{1}{2} A B, [h'] = \frac{1}{4} B (4 F + A B),$$

$$(82) \quad h = \frac{1}{2} (4 F + A B) u - 3 A h'.$$

Da die Quadrik h' aus w und u linear abgeleitet ist, liegt der Punkt h' auf der Eulerschen Geraden e , und die Gerade h' steht senkrecht zu ihr. Der Punkt h' teilt nach (80) und (11) den Faktor mw im Verhältnis -3 .

„Die Kurve zweiter Klasse $\mathfrak{M}^2$, welche die Seiten des Dreiecks ∇ in deren Mitten berührt, hat die Formen

$$(83) \quad p\varphi - \frac{3}{2}u\Delta = \text{nach (45)} = [\varphi^2 u] - \frac{6}{5}u\Delta, -B;''$$

denn diese Kurve ist die erste Polare der unendlichfernen Geraden u bezüglich der Kurve ∇^3 , hat demnach nach (62) die Formen

$$5[\varphi^2 u] - 6\Delta u, -5B,$$

woraus sich unter Anwendung von (45) die Formen (83) ergeben.

„Der Direktorkreis der Kurve $\mathfrak{M}^2$ hat die Formen:

$$(84) \quad h', \frac{1}{6}(5AB - F) \text{ mit } E = -\frac{1}{2}R;$$

er hat demnach mit dem Normkreis die Potenzlinie h'^1 ; denn nach (33) sind seine Formen:

$$[\varphi^2 u^2] - \frac{6}{5}[u\Delta, u] + \frac{1}{2}Bu, -\frac{5}{6}[\varphi^2 u^3] - [\Delta u, u^2] + \frac{10}{3}AB,$$

woraus sich nach (46) und (36) die Formen (84) ergeben.

Der Fußpunkt h_a der Höhe des Dreiecks ∇ auf dessen Seite $\beta\gamma$ ist normkonjugiert zu dem Schnittpunkt der Geraden h' mit $\beta\gamma$, da h' die Harmonikale des Punktes h bezüglich ∇ ist. Da ferner der Normpol a der Geraden $\beta\gamma$, d. i. ein Eckpunkt des Dreiecks D , auch zu diesem Schnittpunkte normkonjugiert ist, so ist die Gerade $h_a a$ Normpolare dieses Punktes; daher: „Der Punkt h' ist der Schnittpunkt der Geraden $h_a a$, $h_\beta b$, $h_\gamma c$.“ Es ist ferner die Gerade $h_a h_\beta$ parallel zur Normgeraden γ ; daher: „Das Dreieck $h_a h_\beta h_\gamma$ ist ähnlich gelegen zu D für das Zentrum h' .“

12. Der Steinersche und der Tarrysche Punkt. Die erste Polare des Schwerpunktes m des Dreiecks ∇ bezüglich ∇_3 ist die Steinersche Ellipse; sie berührt in den Eckpunkten von ∇ Parallele zu den gegenüberliegenden Seiten; denn die Tangente im Punkte α ist die vierte harmonische zur Verbindungslinie von α mit m , demnach parallel zur Geraden $\beta\gamma$.

Da nun der vierte Schnittpunkt dieser Ellipse mit dem Normkreis der sogenannte Steinersche Punkt ist, so folgt nach Art. 10, da nach (75) und (34)

$$[\varphi m] = [\varphi, p^2 - Bu - A\Delta] = s - Bp$$

ist: „Der Steinersche Punkt σ des Dreiecks ∇ hat die Linearform:

$$(85) \quad \sigma \equiv s - Bp.$$

¹⁾ S. Study, l. c.

„Der Tarrysche Punkt t des Dreiecks ∇ hat die Linearform:

$$(86) \quad t \equiv Ar - Bq; "$$

denn dieser Punkt ist auf dem Normkreis diametral zum Steinerschen Punkt, hat also (Art. 4) die Linearform:

$$[u, s - Bp] = [us] - B[up] = \text{nach (51)} = \frac{1}{2} \{Ar - Bq\}.$$

Der Mittelpunkt z der Strecke $u\Delta$, d. i. das Zentrum des Brocardschen Kreises hat nach (12) die Quadrik: $z \equiv A\Delta + Bu$; daher liegt der Schwerpunkt m , dessen Quadrik nach (75): $m \equiv p^2 - z$ ist, auf der Geraden g , welche die Punkte p und z verbindet. Diese Gerade hat die Quadrik:

$$g \equiv (p^2, z) = A(p^2, \Delta) + B(p^2, u) = Apr - Bpq = p(Ar - Bq),$$

welche die Linearform des Punktes p und nach (86) des Tarryschen Punktes zu Faktoren hat; daher: „Die Verbindungslinie des Tarryschen Punktes mit dem Schwerpunkt oder mit dem Zentrum z des Brocardschen Kreises des Dreiecks Δ schneidet den Normkreis außer im Tarryschen Punkte noch im Punkte p .“

Die Polare des Schwerpunktes m des Dreiecks ∇ bezüglich des Brocardschen Kreises schneidet nach einem Satze des Herrn de Longchamps den Normkreis im Steinerschen Punkte des Dreiecks; „sie schneidet ihn weiters im Punkte p .“ Denn ihre Quadrik ist nach (19) und (68):

$$\frac{1}{2} [um] \Delta + \frac{1}{2} [\Delta m] u - Bu = (\text{nach (76) und da nach (40)}:$$

$$[\Delta m] = L - AC - B^2 = -\frac{1}{2} (AC + 3B^2))$$

$$= \frac{1}{2} (F'\Delta - Lu) - B^2 p^2 = \text{nach (48)} = p(s - Bp);$$

sie zerfällt demnach in die Linearform des Punktes p und nach (85) in die des Steinerschen Punktes.

Da m und p auf einer Zentrale des Brocardschen Kreises liegen, und die Polare von m bezüglich dieses Kreises nach dem oben Gesagten durch p geht, so folgt: „Der Punkt p ist invers zum Schwerpunkt m des Dreiecks ∇ bezüglich des Brocardschen Kreises von ∇ .“

Jede Kurve zweiter Ordnung, welche die Ecken von ∇ enthält und den Punkt h , ist eine gleichseitige Hyperbel; ihr Pol bezüglich ∇_3 liegt auf der Harmonikale h' des Punktes h . Der unendlichferne Punkt von h' gibt als erste Polare bezüglich ∇_3 diejenige dieser Hyperbeln, die durch m geht; denn die unendlichferne Gerade u ist die Harmonikale von m bezüglich ∇ . Diese sogenannte Kiepertsche Hyperbel des Dreiecks ∇ schneidet den Normkreis bekanntlich im Tarryschen Punkt t des ∇ ; denn der unendlichferne Punkt von h' ist Normpol der Eulerschen Geraden e , hat also die Quadrik (78) und nach (72) ist dann:

$$[\varphi, pq - A \Theta] = (\text{nach (51), (52) und (86)}) = \frac{1}{2} t$$

die Linearform des fraglichen Schnittpunktes. Die Harmonikale des Punktes t bezüglich ∇ ist (Art. 7) die durch Δ zur Eulerschen Geraden gelegte Senkrechte.

Das Binärbild der Kiepertschen Hyperbel ist vermöge (72), und da nach (39) gilt: $[\Delta, pq - A \Theta] = \bar{M}$, das folgende:

$$(87) \quad 2[t\varphi, x^2] + M[x].$$

Bekanntlich ist der Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel, welche ∇ umschrieben ist und den Normkreis außer in den Ecken von ∇ noch im Punkte ζ schneidet, der Mittelpunkt der Strecke $h\zeta^1$. Folglich ist der Mittelpunkt m der Kiepertschen Hyperbel der Mittelpunkt der Strecke ht .

13. Bestimmung von ∇ und φ aus u, Δ, p . Es zeigte sich im vorhergehenden, daß sich die Quadriken der bekanntesten merkwürdigen Punkte des Dreiecks ∇ durch die Quadriken u, Δ, p^2 allein ausdrücken lassen. Es erwächst daher die Frage: „Ist das Dreieck ∇ , von dem vorausgesetzt werden möge, daß es reell sei, durch die Angabe dreier reeller Punkte u, Δ, p , die für dasselbe je Zentrum des Umkreises, Lemoinescher Punkt und Punkt p sein sollen, bestimmt?“

Zunächst ist für das fragliche Dreieck ∇ der Umkreis $\mathfrak{C}$ gegeben; denn dieser hat den gegebenen Punkt u zum Zentrum und geht durch den gegebenen Punkt p . Die Tangenten, die sich dann von dem gegebenen Punkt Δ an diesen Kreis legen lassen, berühren ihn in den Wurzelpunkten der Form Δ der Dreiecksform φ des Dreiecks ∇ . Soll demnach das Dreieck reell sein, so sind die Punkte u, Δ, p nicht ganz beliebig zu wählen; denn dann müssen die Wurzelpunkte der Form Δ konjugiertimaginär sein, weshalb der Punkt Δ innerhalb des konstruierten Kreises liegen muß, also die Strecke $u\Delta$ kleiner als up ist. Fällt Δ mit u zusammen, so ist ∇ gleichseitig; denn bekanntlich ist ein Tripel auf einem Kreise, dessen Hessesche Gruppe in die absoluten Punkte fällt, ein gleichseitiges. Dann verschwindet die Linearform p nach (34) identisch, also ist auch der Punkt p auf dem konstruierten Kreise beliebig.

Wird nunmehr angenommen, daß u von Δ verschieden ist, so kann die Konstruktion des Dreiecks ∇ weiter in folgender Weise geführt werden. Zunächst ist der Schwerpunkt m von ∇ nach obigem der inverse zum Punkte p bezüglich des Brocardschen Kreises, d. i. des Kreises, für welchen die Punkte u und Δ diametral sind. Hierauf werde der Höhenschnittpunkt h als derjenige bestimmt, der den Vektor um im Verhältnis $-\frac{3}{2}$ teilt, dann der Tarrysche Punkt t von ∇ , welcher der zweite Schnittpunkt der Geraden pm mit dem Kreise $\mathfrak{C}$ ist. Nunmehr kann die Kiepert-

¹⁾ Der Punkt ζ entspricht diesem Mittelpunkt der Hyperbel in der Inversion bezüglich des Kreises $\mathfrak{B}$.

sche Hyperbel konstruiert werden, da sie die Punkte m, h, t enthält und den Mittelpunkt der Strecke ht zum Mittelpunkt hat; diese schneidet dann den Kreis $\mathfrak{C}$ außer in t in den Ecken des fraglichen Dreiecks ∇ .

Das Dreieck ∇ ist demnach, falls die Punkte u und Δ nicht zusammenfallen, eindeutig bestimmt. Dementsprechend ist auch dessen Form φ eindeutig bestimmt. In der Tat besteht die Identität:

$$L\varphi \equiv (Cu - B\Delta)p + \Delta s,$$

die man durch Überschiebung von (45) über r und vermöge der letzten der Gleichungen (39) erhalten kann.¹⁾ Ist $L = 0$, wo dann diese Identität versagt, so ist wegen $L = [\Delta p^2] = 0$ der Punkt p entweder einer der Wurzelpunkte von Δ , und dies ist für ein reelles Dreieck nicht möglich, da für dieses p ein reeller Punkt ist, während die Wurzelpunkte von Δ imaginär sind; oder es verschwindet p identisch, wo nach obigem ∇ gleichseitig wird. Es läßt sich demnach die Dreiecksform φ , falls ∇ ein ungleichseitiges reelles Dreieck ist, vermöge der letzten Identität im System der Formen u, Δ, p ausdrücken, denn es ist noch $s = [\Theta p] = [(u, \Delta)p]$; daher: „Sämtliche merkwürdige Gebilde des Dreiecks ∇ lassen sich auch im System der Formen u, Δ, p ausdrücken.“

14. Kreise, welche die Normchordale h' haben. In der Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum m , bei der dem Punkte x der Punkt x' entspricht, der den Vektor xm im Verhältnis $-\frac{3}{2}$ teilt, entspricht dem Feuerbachschen Kreise $\mathfrak{F}$ der Normkreis $\mathfrak{C}$. Es ist dann nach Art. 2

$$x' = 2[um]x - 3[ux]m.$$

Soll nun x' ein Normpunkt sein, so muß $[x'] = 0$ sein, daher ist:

$$(9[m][ux] - 12[um][mx])[ux] + 4[um]^2[x]$$

das Binärbild des Kreises $\mathfrak{F}$; folglich nach (20): Für den Feuerbachschen Kreis $\mathfrak{F}$ des Dreiecks ∇ ist:

$$(88) \quad \mathfrak{F} \equiv h', \quad E = -\frac{1}{3}R,$$

also hat er die Normchordale h' .

Da m einer der Ähnlichkeitspunkte der Kreise $\mathfrak{C}, \mathfrak{F}$ ist, so ist der Kreis $\mathfrak{M}$, der dem Büschel angehört, das durch $\mathfrak{C}, \mathfrak{F}$ bestimmt ist und der m zum Zentrum hat, einer der Potenzkreise

¹⁾ Aus dieser Identität folgt auch, daß das Tripel ∇ der Involution angehört, die bestimmt ist durch das Tripel Δs und das Tripel, das p enthält und das Punktepaar, das aus dem Umkreise $\mathfrak{C}$ von der Polare des Schnittpunktes der Geraden $u\Delta$ mit der Polare des Punktes Δ bezüglich $\mathfrak{C}$ ausgeschnitten wird. Ferner, da auch

$$L\varphi \equiv (Cu - B\Delta)p + \Delta s \equiv -\sigma\Delta - Cup$$

ist, daß das Tripel ∇ der Involution angehört, die bestimmt ist durch das aus dem Steinerschen Punkt (nach 85) und dem Punktepaare Δ bestehende Tripel und das Tripel, welches aus p und den absoluten Punkten besteht.

der Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$. Für ihn ist h' die Normchordale, also muß seine Quadrik bis auf einen konstanten Faktor mit der Quadrik h' identisch sein. Nun ist nach (25) für diesen Kreis $\mathfrak{z} \equiv m + \lambda u$, $E = -\frac{1}{2}(um)$, weshalb sich, da nach (80) $h' \equiv m + \frac{3}{2}Bu$ ist, ergibt: $\lambda \equiv \frac{3}{2}B$, und vermöge (76): „Für den Potenzkreis $\mathfrak{M}$ der Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, der m zum Zentrum hat, ist:

$$(89) \quad \mathfrak{z} \equiv h', \quad E = -\frac{1}{2}R;$$

nach (84) ist er daher mit dem Direktorkreise der Kurve $\mathfrak{M}^2$ identisch¹⁾.

Der zweite Potenzkreis $\mathfrak{P}$ der Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$ ist in deren Büschel der vierte harmonische des ersten Potenzkreises bezüglich $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F}$. Da nun in diesem Büschel E als Parameter angesehen werden kann, und nach obigem die Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ die Parameterwerte ∞ , $-\frac{1}{3}R$, $-\frac{1}{2}R$ haben, so kommt dem Kreise $\mathfrak{M}$ der Parameter $-\frac{1}{6}R$ zu; daher: „Für den Potenzkreis $\mathfrak{P}$ der Kreise $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$ ist:

$$(90) \quad \mathfrak{z} \equiv h', \quad E = -\frac{1}{6}R, \text{ folglich } c = \frac{1}{6}(F + AB)."$$

Einer der Kreise, die den Höhenschnittpunkt h des Dreiecks ∇ zum Zentrum haben, ist derjenige, der ∇ zum Polardreieck besitzt. Für diesen Kreis, der vom Normkreis getragen wird, muß nach (31):

$$\mathfrak{z} \equiv 4[h u]h - [h]u = \text{nach (27)} = 2AR\{(4F + AB)u - 2h\}, \\ E = -2A^2R^2$$

sein; daher ergibt sich durch Division mit $\frac{1}{12}A^2R$ nach (82) h' als Quadrik dieses Kreises und $E = -\frac{1}{6}R$, so daß er mit $\mathfrak{P}$ identisch ist.²⁾

Für spätere Anwendung sei noch bewiesen, daß die Identität besteht:

$$(91) \quad 5[\varphi^2, uh'] \equiv 6[uh', \Delta] + \frac{5}{2}(F + AB)\Delta;$$

denn die ∇ eingeschriebenen Kurven zweiter Klasse, welche die Form (62) haben, werden von dem Kreise $\mathfrak{P}$ mit den Formen h' , $\frac{1}{6}(F + AB)$ getragen, daher besteht nach (9) für jede Quadrik b :

¹⁾ S. Study, l. c.

²⁾ Man kann zur Bestimmung des Kreises $\mathfrak{P}$ auch auf folgendem irrationalen Wege gelangen. Der Schnittpunkt der Geraden h' mit der Seite $\beta\gamma$ des Dreiecks ∇ hat die Quadrik $[h'\beta^2]\gamma^2 - [h'\gamma^2]\beta^2$; der vierte harmonische dieses Punktes bezüglich β, γ ist der Höhenfußpunkt h_a ; daher hat letzterer die Quadrik:

$$(a) \quad h_a \equiv [h'\beta^2]\gamma^2 + [h'\gamma^2]\beta^2.$$

Nun liegt der Punkt h_a auf dem Kreise $\mathfrak{F}$, also ist nach (88):

$$[h'h_a][uh_a] - \frac{1}{3}R[h_a] = 0.$$

Folglich ist nach der letzten Gleichung:

$$(\beta) \quad [h'\beta^2][u\gamma^2] + [h'\gamma^2][u\beta^2] - \frac{1}{3}R[\beta\gamma]^2 = 0.$$

Daher sind die Punkte β, γ konjugiert bezüglich des Kreises mit dem Binärбилde $[h'x][ux] - \frac{1}{6}R[x]$, d. i. des Kreises $\mathfrak{P}$.

$$[5[\varphi^2 b] - 6\Delta b, uh'] - \frac{5}{2}(F + AB)[\Delta b] = 0,$$

oder es besteht für jede Quadrik b die Gleichung:

$$[5[\varphi^2, uh'] - 6[\Delta, uh'], b] - \frac{5}{2}(F + AB)[\Delta b] = 0,$$

weshalb sich die obige Identität ergibt.

14. Das Dreieck D , dessen Seiten den Normkreis in den Ecken α, β, γ des Dreiecks ∇ berühren, hat die diesen Punkten gegenüberliegenden Ecken a, b, c (Art. 5). Es sollen die Binärbilder bestimmt werden: der Harmonikale H' bezüglich D , des Höhenschnittpunkts h_D von D , des Umkreises K und des Feuerbachschen Kreises F von D , des Direktorkreises M der Ellipse M^2 , die D in dessen Seitenmitten berührt, und des Kreises P , der D zum Polardreieck hat.

Die Ecken von D bilden eine Kurve dritter Klasse D^3 , seine Seiten eine Kurve dritter Ordnung D_3 ; es ist D^3 resp. D_3 norm-polar zu ∇_3 resp. ∇^3 . Ist demnach x' die Harmonikale des Punktes x bezüglich ∇ , so ist die Gerade x die Harmonikale des Punktes x' bezüglich D .

Die Gerade H' ist der Ort des Punktes b , dessen erste Polare bezüglich D_3 eine gleichseitige Hyperbel ist. Diese Hyperbel ist normpolar zur ersten Polare bezüglich ∇^3 der Geraden b , deren Direktorkreis den Punkt u enthält. Diese Polare hat die Formen (62) und soll ihr Direktorkreis durch u gehen, so ist nach Art. 4

$$5[\varphi^2 b] u^2] - 6[\Delta b, u^2] + 10A[\Delta b] = 0.$$

Daher geht die Gerade b durch den Punkt H' mit der Quadrik

$$5[\varphi^2 u^2] - 6[u^2 \Delta] + 10A\Delta,$$

und es folgt nach (46) und (36): „Die Gerade H' hat die Quadrik

$$(92) \quad H' \equiv p^2 - H = m + 3A\Delta,$$

wobei

$$(93) \quad H = Bu - 2A\Delta;$$

der Punkt H' , d. i. der Normpol der Geraden H' liegt auf der Verbindungslinie des Schwerpunkts m und des Lemoinischen Punktes Δ des Dreiecks ∇ .“

Aus (11) und (13) folgt, daß der Punkt Δ der Mittelpunkt der Strecke uH ist; daher: „Die Gerade H ist die Mittellinie zwischen dem Zentrum u und der Lemoinischen Geraden Δ des Dreiecks ∇ .“

Aus (92) folgt, daß die Geraden p, H, H' sich in einem Punkte schneiden; durch diesen Punkt Σ geht auch die Gerade h' des Dreiecks ∇ , da sie nach (80) die Quadrik $p^2 + \frac{1}{2}H$ hat. Ferner folgt aus (92), daß sich auch die Geraden m, Δ, H' in einem Punkte schneiden.

Der Punkt Σ hat als Schnittpunkt der Geraden p , H die Quadrik:

$$(p^2, H) = p(p, H) = -p(Bq + 2Ar);$$

er ist demnach der Schnittpunkt der Geraden p mit der Tangente des Normkreises für den Punkt mit der Linearform $Bq + 2Ar$. Der letztere Punkt ist derjenige, in dem die durch den Punkt p und den Punkt, der den Vektor $u\Delta$ im Verhältnis 3 teilt, gezogene Gerade den Normkreis außer in p noch schneidet.

Die Ellipse M^2 ist die erste Polare der unendlichfernen Geraden u bezüglich D^3 ; sie hat dasselbe Binärbild wie die erste Polare des Punktes u bezüglich ∇_3 . Diese hat aber nach (73) die Formen

$$20[\varphi^2 u] + 6\Delta u, 5B;$$

daher folgt nach (33) und unter Anwendung von (46), (36), (47): „der Direktorkreis M der M^2 hat die Quadrik

$$(94) \quad \delta_M = p^2 + \frac{1}{8}H \text{ und } E \equiv \mathfrak{E} = -\frac{1}{8}(4F + AB)."$$

Dieser Kreis bestimmt mit der Geraden H' ein Büschel, dem nach Art. 13 die Kreise K , F , P angehören. Die Normchordalen dieser Kreise haben dann die Quadriken:

$$\delta + \lambda H' = (1 + \lambda)p^2 + (\frac{1}{8} - \lambda)H,$$

so daß für diese Kreise gilt:

$$(95) \quad \begin{cases} \delta = p^2 + \mu H \text{ mit } \mu = (\frac{1}{8} - \lambda) / (1 + \lambda), \\ E = \frac{8}{9}(1 + \mu)\mathfrak{E} = -\frac{1}{9}(4F + AB)(1 + \mu). \end{cases}$$

Der Kreis P nun hat D zum Polardreieck, weshalb er den Normkreis trägt; daher verschwindet (Art. 4) seine Konstante c , die nach (18) ist:

$$c = E + \frac{1}{3}[u\delta] = -\frac{1}{9}(4F + AB)(1 + \mu) + \frac{1}{3}(F - \mu AB);$$

folglich ist $\mu = -\frac{1}{4}$ und es ergibt sich: „Der Kreis P hat die Quadrik:

$$(96) \quad \delta_P \equiv p^2 - \frac{1}{4}H \text{ und } E = \frac{2}{3}\mathfrak{E} = -\frac{1}{12}(4F + AB)."$$

Nach Art. 14 haben die Kreise h' , $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$ in deren Büschel vermöge der Werte ihrer Konstanten E die Parameter $0, \infty, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}$. Die analogen Kreise H' , M , P haben nach dem eben Gesagten in ihrem Büschel die Parameter $\mu = -1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{4}$; demnach haben die anderen Kreise K , F dieses Büschels die Parameter $\mu = \frac{1}{2}, 0$, so daß sich ergibt: „Der Umkreis K des Dreiecks D hat die Formen:

$$(97) \quad \delta_K \equiv p^2 + \frac{1}{2}H \equiv h', c_K = -F \text{ mit } E = \frac{4}{3}\mathfrak{E} = -\frac{1}{6}(4F + AB)$$

er hat demnach die Normchordale h' (vgl. Art. 13)."

Die Ellipse, welche dem Dreieck ∇ eingeschrieben ist und den Punkt u zum Brennpunkt hat, ist normpolar zum Kreise K ; sie hat demnach als Kurve zweiter Klasse dessen Formen (97).¹⁾

„Der Feuerbachsche Kreis F des Dreiecks D hat die Quadrik:

$$(98) \quad \mathfrak{z}_F \equiv p^2 \text{ und } E = \frac{8}{9} \mathfrak{E} = -\frac{1}{9} (4F + AB), \text{ daher } c_F = \frac{1}{3} F^u$$

Für die Kreise K, F, M, P ist demnach:

$$(99) \quad D = -\frac{1}{6} (2F + 5AB), \quad F, \quad F - \frac{1}{3} AB, \quad F + \frac{1}{4} AB.$$

Daher hat nach (24) „der Mittelpunkt u_D des Kreises K die Quadrik:

$$(100) \quad u_D \equiv 3A(p^2 - A\Delta) - 8\mathfrak{E}u = \text{nach (79)} = \\ = 3Aw - 8\mathfrak{E}u, = 3Ah' + \frac{1}{2} (8F - AB)u;$$

er liegt demnach auf der Eulerschen Geraden des Dreiecks Δ .“

„Der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises F von D hat nach (98) und (99) die Quadrik:

$$(101) \quad 9Ap^2 - Ru^u$$

und da $\mathfrak{z}_F \equiv p^2$ ist, folgt: „Dieser Kreis berührt den Normkreis in p .“

Der Normkreis ist Inkreis für D ; daher folgt der bekannte Satz, daß der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks den Inkreis des Dreiecks berührt. Hier ergibt sich ferner: „Dieser Berührungspunkt ist der Punkt p des Dreiecks der Berührungspunkte des Inkreises mit den Dreiecksseiten.“ Analoges gilt für die Ankreise des Dreiecks D , so daß folgt: „Die vier Kreise $\mathfrak{C}_i$, welche einem Dreieck D eingeschrieben sind, berühren die Seiten desselben je in den Ecken eines Dreiecks ∇_i ; die Punkte p_i dieser Dreiecke ∇_i sind die Berührungspunkte der Kreise $\mathfrak{C}_i$ mit dem Feuerbachschen Kreise von D .“ Ferner folgt nach (97): „Der Umkreis von D hat mit den Kreisen $\mathfrak{C}_i$ Potenzlinien h'_i , welche die Harmonikalen bezüglich der Dreiecke ∇_i von deren Höhenschnittpunkten h_i sind.“

Der Mittelpunkt des Kreises M ist der „Schwerpunkt m_D des Dreiecks D “; dieser hat nach (94), (99) und (24) die Quadrik

$$(102) \quad m_D \equiv 4p^2 - A\Delta + 2Bu.$$

¹⁾ Zur Bestimmung dieses Kreises K kann man auch auf irrationalem Wege wie folgt gelangen. Es ist nach der Fußnote von S. 28

$$h_a = ((h'\beta)\gamma - (h'\gamma)\beta)^2 + 2(h'\beta)(h'\gamma)(\beta\gamma) = (\beta\gamma)^2 h' + 2[h', \beta\gamma]\beta\gamma;$$

demnach folgt durch zweite Überschiebung mit u :

$$[h'\beta^2][\gamma^2u] + [h'\gamma^2][\beta^2u] = (\beta\gamma)^2[h'u] + 2[h', \beta\gamma][u, \beta\gamma];$$

folglich ist nach (β)

$$[h', \beta\gamma][u, \beta\gamma] + \frac{1}{2}([h'u] - \frac{1}{3}R)(\beta\gamma)^2 = 0.$$

Daher (unter Anwendung von (81)) liegt der Punkt mit der Quadrik $\beta\gamma$ auf dem Kreise, der durch (97) bestimmt ist.

Der Mittelpunkt des Kreises P ist der „Höhenschnittpunkt h_D des Dreiecks D “; er hat nach (96), (99) und (24) die Quadrik (103)

$$h_D \equiv 3 A (p^2 + \frac{1}{2} A \Delta) - (F + A B) u.$$

Das Büschel des Kreises K, F, M, P , das die Potenzlinie H' hat, hat mit dem Normkreis den obigen Punkt Σ , d. i. den Schnittpunkt der Geraden p, h', H als Potenzpunkt.

Da ferner in dem Büschel der Geraden p, H nach (92), (97), (96), (94) den Geraden $p, H, H', \beta_K, \beta_P, \beta_M$ die Parameter $0, \infty, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ zukommen, so folgt: „Man suche die Gerade H'' des Büschels, welche die vierte harmonische ist zu h' bezüglich p und H ; dann ist H' die vierte harmonische von p bezüglich H und H'' . Die Gerade β_P ist die vierte harmonische von H bezüglich p , und H'' und β_M die vierte harmonische von β_P bezüglich p und h' .“ Oder da h' senkrecht ist zur Eulerschen Geraden e des Dreiecks ∇ : „Man zeichne das Parallelogramm, das die Geraden p, H zu Seiten hat und als Diagonale eine Gerade, die senkrecht ist zu e ; die Mittelpunkte der Seiten dieses Parallelogramms, die p resp. H gegenüberliegen, sind Punkte von H' resp. β_P . Der Punkt, welcher den Vektor, der den ersten dieser Mittelpunkte mit dem zweiten verbindet, im Verhältnis $-\frac{3}{2}$ teilt, ist ein Punkt der Geraden β_M .“

Die Kurven zweiter Klasse, die dem Dreieck ∇ eingeschrieben sind, haben (Art. 4) Direktorkreise, die orthogonal sind zu dem Kreis, der alle diese Kurven trägt, d. i. der Kreis P , der ∇ zum Polardreieck hat (Art. 13). Die Parabeln, die ∇ eingeschrieben sind, haben daher Direktrizen, die das Zentrum von P , d. i. den Höhenschnittpunkt h von ∇ enthalten. Ferner gilt, da ein Kreis als Direktorkreis einen ihm konzentrischen mit $\sqrt{2}$ mal so großen Radius hat: Sind K_i die vier Kreise, die ∇ eingeschrieben sind, und ist U_i ein Kreis, der zu K_i konzentrisch ist und einen $\sqrt{2}$ mal so großen Radius hat als K_i , so geht die Potenzlinie zweier der Kreise U_i durch den Höhenschnittpunkt h des Dreiecks ∇ und die vier Kreise U_i haben den Kreis P , der ∇ zum Polardreieck hat, zum Orthogonalkreis.

Die Kurven E^2 zweiter Klasse, welche ∇ eingeschrieben sind, und die der Normkreis trägt, bilden eine Schar, zu der drei Punktepaare gehören, deren jedes einen Eckpunkt von ∇ und einen Punkt der gegenüberliegenden Seite von ∇ enthält. Die Punkte α, α_1 eines solchen Paares, das der Normkreis trägt, sind normkonjugiert, weshalb α_1 auf der Tangente α des Normkreises liegt. Da aber der Punkt α_1 auch auf der Seite $\beta\gamma$ des Dreiecks ∇ liegt, so liegt er auch auf der Geraden Δ ; daher: „Die Kurven E^2 berühren außer den Seiten des Dreiecks ∇ noch die Lemoinische Gerade Δ des Dreiecks ∇ .“ Da diese E^2 auch vom Kreise P , der ∇ zum Polardreieck hat, getragen

werden und daher (Art. 4) deren Direktorkreise den Normkreis $\mathfrak{C}$ und den Kreis P orthogonal schneiden, so bilden diese Direktorkreise ein Büschel; daher: „Der Ort der Mittelpunkte der E^2 ist die Normchordale h' des Kreises P , welche demnach die Newtonsche Gerade des Vierseits $\nabla\Delta$ ist.“ Ist E^2 eine Parabel, so folgt: „Die Parabel P^2 , die ∇ eingeschrieben ist, und die der Normkreis trägt, berührt die Gerade Δ und hat als Direktrix (nach Art. 4 die Potenzlinie des letzten Kreisbüschels) die Eulersche Gerade des Dreiecks ∇ .“

Ähnliches ergibt sich für die Kurven zweiter Klasse E'^2 , welche dem Dreieck D eingeschrieben sind, die der Normkreis trägt, und die auch vom Kreise P getragen werden, der D zum Polardreieck hat; sie bilden eine Schar und berühren noch die Lemoinesche Gerade Δ von ∇ . Ihre Mittelpunkte liegen auf der Geraden $\mathfrak{p}_P$, die demnach die Newtonsche Gerade des Vierseits $D\Delta$ ist.

Die Parabel P'^2 unter den E'^2 hat als Direktrix die Verbindungslinie des Punktes u mit dem Höhenschnittpunkt h_D von D ; sie hat also die Quadrik (u, h_D) oder nach (103) die Quadrik

$$(u, p^2 + \frac{1}{2} A \Delta) = pq + \frac{1}{2} A \theta.$$

Da $pq - A\theta$ nach (78) die Quadrik der Eulerschen Geraden von ∇ ist, so ist die Direktrix die vierte harmonische der Geraden θ bezüglich der Geraden pq und der Geraden e' , welche die vierte harmonische von θ bezüglich pq und e ist.

Die Kurven $\mathfrak{E}^2$ zweiter Klasse, welche ∇ eingeschrieben sind und deren Direktorkreis durch u geht, die also normpolar sind zu den gleichseitigen Hyperbeln, die durch die Ecken von D gehen, bilden eine Schar. Da die gleichseitigen Hyperbeln noch durch den Höhenschnittpunkt h_D des Dreiecks D gehen, so berühren die $\mathfrak{E}^2$ noch die Normpolare des Punktes h_D , d. i. die Gerade mit der Quadrik h_D . Durch Betrachtung der Punktepaare der Schar ergibt sich: „Die Geraden, die im Zentrum u des Normkreises senkrecht sind zu den Verbindungslinien von u mit den Ecken des Dreiecks ∇ , schneiden die diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten von ∇ in Punkten der Geraden h_D .“ Die Direktorkreise der $\mathfrak{E}^2$ schneiden nach Art. 4 den Kreis P , der ∇ zum Polardreieck hat, orthogonal und bilden ein Büschel, dessen Potenzlinie die Eulersche Gerade von ∇ ist. Diese Gerade ist demnach die Direktrix der Parabel unter den $\mathfrak{E}^2$, welche folglich mit der obigen P^2 identisch ist. Die Mittelpunkte der Kurven $\mathfrak{E}^2$ liegen auf der Newtonschen Geraden des Vierseits ∇h_D ; sie ist die Potenzlinie des Punktes u und des Kreises P ; oder: die Kreise, welche die Höhen von ∇ zu Sehnen haben und durch u gehen, haben ihre Zentren auf diesen Geraden; oder: das Dreieck der Seitenmitten von ∇ und das Dreieck der Mittelpunkte der Strecken, die u mit den Ecken von D verbinden, sind perspektivisch mit dieser Geraden als Perspektivitätsachse.

Die Kurven $\mathcal{C}^2$ zweiter Klasse, welche D eingeschrieben sind und deren Direktorkreis durch u geht, sind normpolar zu den ∇ umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln; sie berühren die Normpolare h des Höhenschnittpunktes h von ∇ . Durch Betrachtung der Punktepaare der Schar ergibt sich: Die durch u zu den Seiten von ∇ gezogenen Parallelen schneiden die gegenüberliegenden Seiten von D in Punkten der Geraden h . Die Mittelpunkte der Kurven $\mathcal{C}^2$ liegen auf der Potenzlinie des Punktes u und des Kreises P . Die Parabel unter den $\mathcal{C}^2$ ist die obige P^2 .

Zu den Parabeln $\mathfrak{P}^2$, die ∇ eingeschrieben sind, gehören die Punktepaare, die aus den Ecken von ∇ und den unendlichfernen Punkten der diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten bestehen. Die Direktrix eines solchen Punktepaares ist Höhe von ∇ . Die Direktorkreise dieser Parabeln, das sind die Direktrizen der Parabeln, die eine Schaar bilden, erfüllen (Art. 4) ein Büschel, dessen Zentrum der Höhenschnittpunkt h von ∇ ist.

Eine Gerade b durch den Schwerpunkt m von ∇ hat als erste Polare bezüglich ∇^3 eine dieser Parabeln $\mathfrak{P}^2$ mit der durch h gehenden Direktrix d . Zwischen b und d besteht projektive Beziehung. Ist b identisch mit $m\alpha$, so ist diese Polare das Punktepaar, dem α angehört, also ist die entsprechende d identisch mit der Höhe $h\alpha$; demnach liegt α und ebenso β und γ auf der durch die projektiven Büschel b, d erzeugten Kurve zweiter Ordnung, die durch die Zentren h und m der Büschel geht, die demnach die Kiepertische Hyperbel ist, die ∇ umschrieben ist und den Schwerpunkt m von ∇ enthält. Der Brennpunkt f der Parabel $\mathfrak{P}^2$ liegt auf dem Normkreis, und er beschreibt eine zu b projektive Punktreihe; seine Verbindungslinie mit dem Tarryschen Punkte t , dem Schnittpunkte der Kiepertischen Hyperbel mit dem Normkreise Art. 12) gibt ein Büschel, das projektiv ist zum Büschel d ; den Strahlen, welche den Tarryschen Punkt mit den Ecken von ∇ verbinden, entsprechen Gerade d , die nach denselben Ecken gehen; folglich erzeugen die projektiven Büschel der Geraden tf und d die Kiepertische Hyperbel, und es ergibt sich: „Ist f , ein Normpunkt, der Brennpunkt der Parabel $\mathfrak{P}^2$, so schneidet die Gerade tf die Kiepertische Hyperbel in einem Punkte k , der mit h verbunden die Direktrix und mit m verbunden diejenige Gerade b gibt, deren Polare bezüglich ∇^3 die $\mathfrak{P}^2$ ist.“ Ist b identisch mit der Tangente der Kiepertischen Hyperbel im Punkte m , so entspricht ihr in den obigen Projektivitäten als Gerade d die Eulersche Gerade e von ∇ und als Gerade tf die Gerade tm , welche den Normkreis außer in t noch in p schneidet; daher: „Die obige Parabel $\mathfrak{P}^2$, die ∇ eingeschrieben ist, und die Eulersche Gerade von ∇ als Direktrix besitzt, hat den Punkt p als Brennpunkt; sie ist die Polare bezüglich ∇^3 der die Kiepertische Hyperbel im Punkte m berührenden Geraden.“

Der Lemoinesche Punkt von D . Die Kurven zweiter Klasse C^2 , die D eingeschrieben ist, ist Polare einer Geraden b .

und hat dieselben Formen wie ihre Normpolare C_2 , d. i. die Polare des Punktes b bezüglich ∇_3 , also die Formen (73). Trägt der D umschriebene Kreis K die C^2 , so geht die Gerade b durch den Lemoineschen Punkt Δ_D des Dreiecks D ; dann wird C_2 die Kurve K^2 tragen, welche normpolar ist zu K , und welche dieselben Formen h' , $-F$ hat wie K . Da nun C_2 die K^3 trägt, besteht nach (9) die Gleichung:

$$\begin{aligned} & [20 [\varphi^2 b] + 6 \Delta b, u h'] - 15 F [\Delta b] = \\ & 20 [\varphi^2, u h'] b + 6 [u h', \Delta] b - 15 [\Delta b] = 0, \end{aligned}$$

also ist

$$20 [\varphi^2, u h'] + 6 [u h', \Delta] - 15 F \Delta$$

die Quadrik des Punktes, durch welchen b geht, des Punktes Δ_D . Vermöge der Identität (91) folgt weiter, daß die Quadrik auch ist:

$$\begin{aligned} 3 [u h', \Delta] - R \Delta &= \{ \frac{3}{2} B h' + \frac{3}{2} [h' \Delta] u - [u h'] \Delta \} - R \Delta \\ &= (\text{da } [h' \Delta] = -\frac{1}{2} A C \text{ und nach (80, 81, 40)}) \\ &= L u + F \Delta - B p^2 = (\text{nach (49)}) = -2 q r; \end{aligned}$$

daher: „Der Lemoinesche Punkt Δ_D des Dreiecks D hat die Quadrik $q r$; er ist der Schnittpunkt der Normgeraden q und r .“

15. Die Tuckerschen Kreise des Dreiecks ∇ . Nach (13) ist durch die Gleichung

$$x' = [u x] \Delta + \mu B x$$

eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum Δ gegeben, bei welcher der Punkt x' den Vektor Δx im Verhältnis μ teilt.

Liegt nun der Punkt x auf einer Seite des Dreiecks ∇ , so liegt x' auf einer Seite eines Dreiecks ∇' , dessen Seiten parallel sind zu denen von ∇ , und die eine Kurve dritter Ordnung ∇'_3 bilden. Um das Binärbild von ∇'_3 zu erhalten, setze man in dem Binärbilde (70) von ∇_3 die Quadrik x' statt x und dann statt x' weiter: $[u x] \Delta + \mu B x$, wodurch sich ergibt:

$$\nabla'_3 \equiv [u x] C_2 + \mu^3 B_3 \Delta_3,$$

worin

$$C_2 \equiv 3 B^2 \mu^2 \delta_\Delta \Delta_3 + 3 B [u x] \mu \delta_{\Delta^2} \nabla_3 + [u x]^2 \delta_{\Delta^3} \nabla_3.$$

Demnach ist ∇'_3 in dem Büschel enthalten, das bestimmt ist durch die Kurve ∇_3 und die Kurve, die zerfällt in die Gerade mit dem Binärbilde $[u x]$, d. i. die unendlichferne Gerade und die Kurve zweiter Ordnung mit dem Binärbilde C_2 . Dieses ist aber nach (71) und nach Ausscheidung des Faktors C :

$$(104) \quad \{3 B \mu [\Delta x] + C [u x]\} [u x] + 3 B^2 \mu^2 [x],$$

also nach (19) das Binärbild eines Kreises. Die Kurve C_2 ist demnach ein Kreis, und da dieser mit der unendlichfernen Geraden eine Kurve des Büschels bildet, das ∇_3 und ∇'_3 enthält, so geht er durch die 6 im Endlichen gelegenen Schnittpunkte der Dreiecksseiten der Dreiecke ∇, ∇' , ist demnach einer der Tuckerschen Kreise. Daher: „Der Tuckersche Kreis T_μ hat die Formen:

$$(105) \quad 3B_\mu \Delta + Cu, \mu(3 + \mu)B^2 + \frac{1}{3}AC \text{ mit } E = 3B^2\mu^2;$$

der Mittelpunkt u_μ dieses Kreises hat die Quadrik:

$$(106) \quad u_\mu \equiv (2\mu + 1)Bu - A\Delta,$$

liegt demnach auf der Verbindungslinie Θ der Punkte u und Δ und teilt den Vektor Δu im Verhältnis $-(2\mu + 1)$.“

Ist speziell $\mu = 0$, so ergibt sich als Tuckerscher Kreis der Kreis mit den Formen $u, \frac{1}{3}A$, d. i. nach Art. 4 die doppelt gezählte unendlichferne Gerade. Für $\mu = \infty$ ergibt sich der Normkreis.

Ist $\mu = -1$, so fallen alle Punkte x' der obigen Ähnlichkeitstransformation ins Unendliche, das Dreieck ∇' übergeht in die durch Δ zu den Seiten von ∇ parallel gezogenen Geraden und der entsprechende Tuckersche Kreis ist der erste Lemoinesche Kreis, der nach (105) als Mittelpunkt den Punkt mit der Quadrik $u_{-1} \equiv -(Bu + A\Delta)$ hat, d. i. den Mittelpunkt der Strecke Δu .

Ist $\mu = -\frac{1}{2}$, so ist die obige Ähnlichkeitstransformation eine zentrale Symmetrie mit dem Zentrum Δ ; der entsprechende Tuckersche Kreis ist der zweite Lemoinesche Kreis, dessen Normchordale nach (105) die Quadrik $3B\Delta - 2Cu$ hat, weshalb er nach (67) mit dem Normkreis und dem Direktorkreis der Brocardschen Ellipse in demselben Büschel liegt. Sein Zentrum hat nach (105) die Quadrik Δ , ist also mit dem Lemoineschen Punkte Δ des Dreiecks ∇ identisch.

Das Binärbild der Enveloppe der Tuckerschen Kreise ist die Discriminante von (104) bezüglich μ , d. i. bis auf einen konstanten Faktor

$$[ux]^2 \{4C[x] - 3[\Delta x]^2\}.$$

Nach Ausscheidung der unendlichfernen Geraden u ergibt sich demnach als Enveloppe der Kreise T_μ die Kurve mit dem Binärbilde

$$3[\Delta x]^2 - 4C[x] = \{3[\Delta^2 x^2] + C[x]\} - 4C[x] = 3\{[\Delta^2 x^2] - C[x]\},$$

oder mit den Formen $\Delta^2, -C$; daher nach Art. 9: „Die Enveloppe der Tuckerschen Kreise ist die Brocardsche Ellipse $\mathfrak{B}$ des Dreiecks ∇ .“

Die Berührungssehne des Kreises T_μ mit $\mathfrak{B}$ wird gefunden als Potenzlinie dieses Kreises mit dem Kreise, dessen Binärbild man erhält, indem man (104) nach μ differentiirt als:

$$(107) \quad [\Delta x][ux] + 2B_\mu[x];$$

diese Potenzlinie hat nun nach (27) die Quadrik

$$(108) \quad 3 B \mu \Delta + 2 C u.$$

Wird $\mu = -\frac{1}{2}$ gesetzt, so ergibt sich speziell nach (107) und (68), daß der Brocardsche Kreis durch die Berührungspunkte des zweiten Lemoineschen Kreises mit $\mathfrak{B}$ geht. Für $\mu = -1$ folgt, daß der erste Lemoinesche Kreis die Ellipse $\mathfrak{B}$ berührt in Punkten, die auf der Normchordale des zweiten Lemoineschen Kreises (oder nach obigem des Direktorkreises der Ellipse $\mathfrak{B}$) liegen.

Der Taylorsche Kreis $\mathfrak{T}$ ist einer der Tuckerschen Kreise; er schneidet jede Seite von ∇ in den Punkten, deren Lote zu dieser Seite durch die Höhenfußpunkte der anderen Seite gehen. Nach einem Satze des Herrn Neuberg ist sein Zentrum t der Mittelpunkt der Strecke $u h_0$, wenn h_0 der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ∇ der Höhenfußpunkte $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ ist. Dieses Dreieck entspricht nach Art. 11 dem Dreiecke D in einer Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum h' , in der dem Punkte h_0 der Höhenschnittpunkt h_D von D entspricht. Daher liegt h_0 auf der Geraden $h'h_D$; die Quadrik h_0 ist demnach linear abgeleitet aus den Quadriken (80) und (103) der Punkte h' und h_D , hat also die Gestalt:

$$(109) \quad \lambda \{p^2 - A \Delta + \frac{1}{2} B u\} + \{3 A (p^2 + \frac{1}{2} A \Delta) - (F + A B) u\}.$$

Nun muß aber t als Zentrum eines Tuckerschen Kreises auf der Geraden $u \Delta$ liegen, daher auch nach dem Neubergschen Satze der Punkt h_0 ; folglich ist die Quadrik von h_0 linear abgeleitet aus u und Δ , es verschwindet in (109) der Koeffizient von p^2 , so daß $\lambda = -3 A$ ist, und sich als Quadrik von h_0 ergibt:

$$9 A^2 \Delta - (2 F + 5 A B) u.$$

Der Punkt t hat dann als Mittelpunkt der Strecke $u h_0$ die Quadrik:

$$(110) \quad 9 A^2 \Delta - (4 F + A B) u.$$

Durch Vergleichung dieser Quadrik mit der von u_u in (106) folgt, daß der Parameter μ des Taylorsche Kreises ist

$$(111) \quad \mu = 2 R / 9 A B.$$

Daher ist die Quadrik dieses Kreises nach (105): $2 R \Delta + 3 A C u$, und die Quadrik der Berührungssehne desselben mit der Ellipse $\mathfrak{B}$, nach (108): $R \Delta + 3 A C u$.

16. Die zu ∇ kobrocardalen Dreiecke. So heißen¹⁾ Dreiecke, welche dieselbe Brocardsche Ellipse $\mathfrak{B}$ wie ∇ haben. Unter diesen seien zunächst diejenigen Dreiecke $\bar{\nabla}$ bestimmt, die wie ∇ dem Normkreis eingeschrieben sind; dann sei die Kubik des Dreiecks $\bar{\nabla}$ mit $\bar{\varphi}$ bezeichnet. Da die Ellipse $\mathfrak{B}$ den Umkreis

¹⁾ S. Emmerich, l. c., p. 123, wo auf dem Verfasser unzugängliche Arbeiten von Artzt und Simmons verwiesen wird.

von $\bar{\nabla}$ in den Wurzelpunkten der Hesseschen Form $\bar{\Delta}$ die Dreiecksform $\bar{\varphi}$ berührt, so muß $\bar{\Delta}$ bis auf einen konstanten Faktor mit Δ identisch sein; daher ist bekanntlich¹⁾, wenn $\Theta = \lambda^2 + \frac{1}{2}C$ gesetzt wird:

$$(112) \quad \bar{\varphi} = Q + \lambda \varphi, \quad \bar{\Delta} = \Theta \Delta, \quad \bar{B} = \Theta B, \quad \bar{C} = \Theta^2 C.$$

Für $\lambda = 0$ erhält man als Dreieck $\bar{\nabla}$ das Dreieck mit der Kubik Q , das zu ∇ perspektivisch ist mit dem Zentrum Δ (Art. 5).

Die Dreiecke $\bar{\nabla}$ mit Formen, deren Hessesche Form der Quadrik Δ proportional sind, bilden bekanntlich auf dem Normkreis die Zyklen der zyklischen Projektivität, welche ∇ in sich transformiert und deren Doppelpunkte die Wurzelpunkte von ∇ sind.

Vor alle Binärbilder von Gebilden des Dreiecks ∇ , die außer u noch Δ , und zwar in α^{ter} Dimension enthalten, tritt, sobald sie für $\bar{\nabla}$ gebildet werden, nach (112) der Faktor Θ^α . Daher sind diese Gebilde allen Dreiecken $\bar{\nabla}$ gemeinsam; also nach (65) die Brocardsche Ellipse $\mathfrak{B}$, nach (68) der Brocardsche Kreis, nach (104) die Tuckerschen Kreise für denselben Parameter μ , demnach auch speziell der erste und der zweite Lemoinesche Kreis.

Unter den Dreiecken $\bar{\nabla}$ gibt es zwei rechtwinklige, deren Hypothenusen Durchmesser des Normkreises sind und die auch $\mathfrak{B}$ berühren, da $\bar{\nabla}$ der Ellipse $\mathfrak{B}$ umschrieben ist. Ihre Katheten berühren $\mathfrak{B}$ ebenfalls, also sind die Scheitel dieser Dreiecke Punkte des Direktorkreises der $\mathfrak{B}$; daher: „Die Scheitel der rechtwinkligen Dreiecke $\bar{\nabla}$ sind die Normpunkte des Direktorkreises der Ellipse $\mathfrak{B}$ oder des zweiten Lemoineschen Kreises;“ sie liegen nach (67) auf der Geraden mit der Quadrik $3B\Delta - 2Cu$, die auch Berührungssehne des ersten Lemoineschen Kreises mit $\mathfrak{B}$ ist.

Jedes Dreieck, das zu einem Dreieck $\bar{\nabla}$ bezüglich der Achse θ der Ellipse $\mathfrak{B}$ symmetrisch ist, ist wieder ein Dreieck $\bar{\nabla}$. Die zwei Dreiecke $\bar{\nabla}$ mit den Ecken θ_1, θ_2 , in welchen θ den Normkreis schneidet, sind sich selbst symmetrisch; sie sind die gleichschenkligen unter den $\bar{\nabla}$ und ihre Grundlinien berühren $\mathfrak{B}$ in deren Scheiteln s_1, s_2 .

Der Punkt p des Dreiecks $\bar{\nabla}$ ist Normpunkt und der Schwerpunkt $\bar{m}$ dieses Dreiecks ist nach Art. 13 der inverse von $\bar{p}$ bezüglich des allen Dreiecken $\bar{\nabla}$ gemeinsamen Brocardschen Kreises; daher: „Der Ort des Schwerpunktes des Dreiecks $\bar{\nabla}$ ist der zum Normkreise bezüglich des Brocardschen Kreises inverse Kreis, welcher (da sich Normkreis und Brocardscher Kreis auf der Lemoineschen Geraden Δ schneiden) durch die Schnittpunkte der

¹⁾ S. Gordan, I. c. p. 173 und Clebsch, Binäre Formen, p. 212.

Geraden Δ mit dem Normkreis geht.“ Oder: „Die Schwerpunkte der Dreiecke $\bar{\nabla}$ liegen auf dem Kreise, der durch die Normpunkte der Geraden Δ und durch den Schwerpunkt m von ∇ geht“. Die Polare dieses Kreises bezüglich des Brocardschen Kreises ist eine Ellipse, welche den Mittelpunkt des letzteren zum Brennpunkt hat und eingehüllt wird von den de Longchampschen Geraden (Art. 13) der Dreiecke $\bar{\nabla}$, und für welche die Punkte θ_1, θ_2 die Scheitel ihrer großen Achse sind.

Der Schwerpunkt des Dreiecks Q liegt mit m auf einer Geraden durch Δ ; ebenso liegen die Schwerpunkte eines Dreiecks $\bar{\nabla}$ und des zu ihm mit dem Zentrum Δ perspektivischen auf einer Geraden durch Δ .

Die Schnittpunkte m_1, m_2 der obigen gleichschenkligen Dreiecke $\bar{\nabla}$ teilen die Vektoren $\theta_\kappa s_\kappa$ im Verhältnis 2; sie sind invers zu den Ecken θ_κ dieser Dreiecke. Daher erhält man die Scheitel s_κ der Ellipse $\mathfrak{B}$, die auf ihrer Achse θ liegen, wie folgt: Man suche für die Normpunkte θ_κ der Geraden θ die vierten harmonischen v_κ bezüglich u und Δ ; dann ist derjenige Punkt, der den Vektor $\theta_\kappa v_\kappa$ im Verhältnis -3 teilt, der Scheitel s_κ .

Der Ort des Höhenschnittpunkts $\bar{h}$ des Dreiecks $\bar{\nabla}$ ist ein Kreis, der aus dem Kreise der Schwerpunkte $\bar{m}$ durch Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum u und mit dem Verhältnis $-\frac{3}{2}$ hervorgeht. Da die Scheitel der rechtwinkligen Dreiecke $\bar{\nabla}$ solche Höhenschnittpunkte sind, so folgt nach obigem, daß auch dieser Kreis dem Büschel angehört, das den Normkreis, den zweiten Lemoineschen Kreis und den Direktorkreis der Ellipse $\mathfrak{B}$ enthält.

Außer den Dreiecken $\bar{\nabla}$ gibt es noch andere zu ∇ kobrocardale, nämlich die zu den $\bar{\nabla}$ bezüglich der Achse $\bar{\theta}$ der Ellipse $\mathfrak{B}$ symmetrischen; und ist eine beliebige Ellipse $\mathfrak{B}$ vorgelegt, so gibt es zwei Scharen von Dreiecken $\bar{\nabla}_1, \bar{\nabla}_2$, welche sie zur Brocardschen Ellipse haben. Wird auf der kleinen Achse θ der Ellipse der Punkt Δ' zunächst beliebig angenommen, so ist Δ auf θ zu Δ' konjugiert bezüglich $\mathfrak{B}$, und u liegt mit Δ und den Brennpunkten der Ellipse $\mathfrak{B}$ auf einem Kreise. Es muß nun nach Art. 9 Δ' so gewählt werden, daß, wenn v der Mittelpunkt von $\mathfrak{B}$ ist, das Doppelverhältnis:

$$(u, \Delta, \Delta', v) = \frac{u \Delta'}{\Delta \Delta'} : \frac{u v}{\Delta v} = (0, \infty, 1, -3) = -\frac{1}{3}$$

ist, was auf zwei Weisen möglich ist. Demnach ergeben sich auch zwei Punkte u_1, u_2 als Zentren vom Umkreisen der Dreiecke der Scharen $\bar{\nabla}_1, \bar{\nabla}_2$, welche Kreise die Ellipse $\mathfrak{B}$ doppelt berühren müssen und die symmetrisch bezüglich ihrer großen Achse θ' sind. Die Dreiecke $\bar{\nabla}_1, \bar{\nabla}_2$ sind dann noch der Ellipse $\mathfrak{B}$ umschrieben.