Neue Formeln von *Jacobi*, für einen Fall der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.

Von Herrn Geh. Rath und Ritter *Bessel*.

Wenn drei unbekannte Größen vorhanden, also die Gleichungen

$$\begin{aligned} (an) &= (aa)x + (ab)y + (ac)z \\ (bn) &= (ab)x + (bb)y + (bc)z \\ (cn) &= (ac)x + (bc)y + (cc)z \end{aligned}$$

aufzulösen, und auch die Gewichte X, Y, Z der daraus hervorgehenden Werthe von x, y, z zu bestimmen sind, so kann dieses nach folgenden Formeln geschehen:

$$\begin{aligned} r &= \pm \sqrt{\pm (bc)(ac)(ab)}; & \alpha &= \frac{r}{(bc)}, & \beta &= \frac{r}{(ac)}, & \gamma &= \frac{r}{(ab)} \\ A &= (aa) + \alpha\alpha, & B &= (bb) + \beta\beta, & C &= (cc) + \gamma\gamma \\ \alpha &= \frac{\alpha}{A}, & \beta' &= \frac{\beta}{B}, & \gamma' &= \frac{\gamma}{C} \\ R &= 1 + (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'); & a &= \frac{(an)}{R}, & b &= \frac{(bn)}{R}, & c &= \frac{(cn)}{R} \\ \rho &= \alpha'a + \beta'b + \gamma'c; & x &= \frac{(an)}{A} + \alpha'\rho, & y &= \frac{(bn)}{B} + \beta'\rho, & z &= \frac{(cn)}{C} + \gamma'\rho \\ X &= \frac{RA}{R + \alpha\alpha'}, & Y &= \frac{RB}{R + \beta\beta'}, & Z &= \frac{RC}{R + \gamma\gamma'} \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler kann nach der bekannten Formel

$$(nn_2) = (nn) - (an)x - (bn)y - (cn)z$$

berechnet werden, welche auch mit

$$(nn_2) = (nn) - \frac{(an)^2}{A} - \frac{(bn)^2}{B} - \frac{(cn)^2}{C} + \frac{\rho\rho}{R}$$

übereinstimmen muß. In allen diesen Formeln gilt entweder das obere oder das untere Zeichen, ersteres wenn $(bc)(ac)(ab)$ positiv, letzteres wenn dieses Product negativ ist.

Diese Formeln führen zu den Werthen von x, y, z und X, Y, Z durch eine Rechnung, die etwa so viele Arbeit kostet, als die Anwendung der bekannten, von *Gauss* in den allgemeinen Gebrauch gebrachten Formeln, deren Gang aber

$$\begin{array}{llll} (an) = +11,5785 & (aa) = 186,6383 & (ab) = -7,7760 & (bc) = +28,4660 \\ (bn) = -3,0276 & (bb) = 26,2794 & (ac) = +3,3000 & \\ (cn) = +24,4975 & (cc) = 69,7767 & & \end{array}$$

Die Ueberschriften $l(bc), l\alpha, (aa)$, u. s. w., welche ich den verschiedenen Columnen der folgenden Rechnung gegeben habe, sollen andeuten, daß diese Größen auf ihrer ersten Zeile ste-

gänzlich verschieden von dem Gange ist, welchen diese vorschreiben; sie haben die Eigenthümlichkeit, *alle drei* unbekannten Größen und die Gewichte ihrer Bestimmung durch ein ganz symmetrisches Verfahren zu ergeben. Sie erscheinen so merkwürdig, daß ich von meinem verehrten Freunde, Herrn Professor *Jacobi*, die Erlaubniß erbeten habe, sie den Lesern der Astr. Nachr. mittheilen zu dürfen.

Ich setze diesen Formeln noch ein Beispiel ihrer Anwendung hinzu, welches ich aus §. 4 der Abhandlung in Nr. 401 d. Journals entlehne. Nachdem aus den, durch die Beobachtungen des Sterns α gegebenen Gleichungen die erste der vier unbekannten Größen eliminirt worden ist, erhält man nämlich (in den jetzigen Bezeichnungen ausgedrückt):

hen, während die analogen sich auf den beiden folgenden Zeilen befinden.

	$l(bc)$	$l\alpha$	(aa)	$(\alpha\alpha)$	A	lA	$l\alpha'$	$\alpha\alpha'$	$l(an)$
	0,51351	0,91329 n	186,6383	67,0783	253,7166	2,40435	8,50894 n	0,26438	1,06365
	1,45433	9,97747 n	26,2794	0,9014	27,1808	1,43426	8,54321 n	0,03317	0,48110 n
	0,89076 n	0,54104	69,7767	12,0803	81,8570	1,91306	8,62798	0,14758	1,38912
Summe	2,86360 n						Summe	0,44513	
lr	1,43180 n						R	0,55487	
							lR	9,74419	

la	$\alpha'a$	$\frac{(an)}{A}$	$\alpha'p$	x	$l(R + \alpha\alpha')$	$l\frac{R}{R + \alpha\alpha'}$	X
1,31946	— 0,67360	+ 0,04564	— 0,04492	+ 0,00072	9,91342	9,83077	171,84
0,73691 _n	+ 0,19060	— 0,11139	— 0,04861	— 0,16000	9,76941	9,97478	25,65
1,64493	+ 1,87461	+ 0,29927	+ 0,05909	+ 0,35836	9,84662	9,89757	64,66
ρ	+ 1,39161						
$l\rho$	0,14352						

Um x , γ , z und X , Y , Z zu erhalten, hat man hier 32mal von den Zahlen zu den Logarithmen, oder umgekehrt übergehen müssen. Die *Gaussische* Auflösung ergibt x , γ , z durch 23 solche Uebergänge und X , Y , Z durch noch 12 *). Beide Abzählungen setzen die gewöhnlichen Logarithmentafeln

*) *Gauss* Theoria combin. observ. §. 32.

als *einziges* Hülfsmittel voraus, würden aber etwas verschiedenen ausfallen, wenn man den Besitz noch anderer Hülfsmittel annehmen wollte. Uebrigens ist nicht meine Meinung, daß die Arbeit, welche eine Rechnung kostet, die Anzahl der Uebergänge von den Zahlen zu den Logarithmen, oder umgekehrt, genau proportional wäre.

Bessel.

Beobachtungen von Flecken auf der Venus im Collegio Romano von Herrn *de Vico* S. I. (jetzt Director dieser Sternwarte.)

Appena del *chmo* Sign. Cav. *Schumacher* fui accitato a far nuove osservazioni sulla rotazione di Venere, posi immantamente la mano all' opera, ma non senza molta incertezza intorno al loro esito. Mi confortava nondimeno la speranza, che per la grande prossimità a cui verrebbe il pianeta quest' anno mi si renderebbe meno difficile un lavoro, che solo sotto il cielo d'Italia sembrò agli astronomi non essere del tutto impossibile.

Senza intrare in minuti dettagli, di cui si darà in appresso più ampia notizia, mi restringo a dire per ora le cose seguenti:

Le osservazioni furono cominciate ai 4 di febbrajo, e da quell' epoca vengono proseguite con sommo impegno più volte il giorno.

Molto si è studiato per trovar la maniera di veder le macchie il meglio che si potesse; e da una lunga costante esperienza di parecchi mesi abbiamo imparato, che nel discernerele più e meno nettamente influisce moltissimo, oltre lo stato atmosferico, 1° il tempo nel quale si osservano, 2° la costruzione delle lenti oculari, 3° la costituzione fisica dell' occhio.

Il tempo più a proposito per noi è quando il Sole sta sopra l'orizzonte, e Venere abbastanza alta, e molto più quando passa al meridiano. Prima del nascere o dopo il tramonto del sole è incredibile quanto le macchie ci si rendono più difficili a vedere, attesa la vivacità della luce tramandata dal pianeta la quale nelle tenebre della notte ferisce l'occhio d'uno splendore, per cui ricevere la pupilla, e forse ancor la retina, non si trova disposta allo stesso modo, come quando è già avvezza alla piena luce del giorno. I diaframmi, di cui allora conviene

far uso, sebbene giovino alcun poco; pure l'utilità n' è quasi insensibile al paragone.

Le osservazioni di *Bianchini* hanno da questo lato meno vantaggio sopra le nostre. Per altro non senza grande ammirazione dobbiam confessare ch' egli fece i disegni delle macchie con una grande esattezza, benchè il tempo delle sue osservazioni non fosse, secondo me, il più favorevole. Ma per ciò stesso glie n' è, cred' io, sfuggita qualcuna; che per la sua maggior piccolezza gli fu forse rubata alla vista dal troppo vivido lume che Venere tramanda di notte. Due di queste sono da qualche giorno visibili, le quali di certo da *Bianchi* non furono disegnate.

2° Quanto alla costruzione degli oculari ci sembra d'aver osservato, che cogli oculari acromatici alla maniera di *Ramsden* si provi maggiore difficoltà, che non con quelli, dove l'immagine cade fra le due lenti. Di più: se al canocchiale di una eccellente ma piccola macchina equatoriale di *Dollond* con un obbiettivo acromatico di tre lenti noi poughiamo un oculare costruito alla maniera di *Ramsden*, le più grosse macchie che prima coll' oculare di *Dollond* si vedevano, spariscono interamente. Fortunatamente ciò non accade nel gran Canocchiale di *Cauchoix*; ma tuttavia con questa sorta d'oculari le macchie s'indebolescono. Gli ingrandimenti per noi più utili sono: 80:120:150:240:300: ma quest' ultimo è già troppo forte.

Generalmente le macchie si presentano sotto l'aspetto di una sfumatura assai carica verso il centro; ma le cui estremità si perdono insensibilmente.

3° È poi un fenomeno digno di annotazione quello che appartiene alla diversa sensibilità dell' occhio di chi osserva.