jenige der inneren Rolle beträgt etwa 30 Q.-E. Der Strom von einem Daniell in 1000 Q.-E. gibt bei hintereinander geschalteten äusseren Rollenhälften und 2000 mm Abstand der Scala etwa 300 mm Ausschlag. Das Dämpfungsverhältniss mit Electrode betrug etwa 1,5. Durch grössere oder kreuzförmige Electroden kann man die Dämpfung vergrössern.

Die hier beschriebenen Instrumente sind von Hrn. Eugen Hartmann in Würzburg ausgeführt worden.

Würzburg, Februar 1882.

**V. Bemerkungen über die mechanischen Grundlagen der Gesetze von Ohm und Joule;
von E. Budde.**

§ 1. Das bekannteste aller electrodynamischen Phänomene, der stationäre galvanische Strom, ist nach der Kirchhoff'schen Theorie durch die Eigenthümlichkeit ausgezeichnet, dass bei ihm ruhende Electricitätsmengen mit bewegten in Wechselwirkung treten. Fälle dieser Art sind bekanntlich für die Theorie der electrodynamischen Anziehung von besonderem Interesse; es schien daher wünschenswerth, die Grundgesetze von Weber, Riemann und Clausius auf den galvanischen Strom als solchen anzuwenden. Um aber die Bedingungen des Problems diesen Gesetzen entsprechend zu formuliren, ist zunächst erforderlich, dass man sich eine bestimmte mechanische Vorstellung von den Beziehungen der freien Electricität zur strömenden mache, und dabei stellen sich erhebliche Schwierigkeiten heraus. Diese ganz zu lösen, ist mir nicht gelungen, doch glaube ich, dass die folgenden Betrachtungen wenigstens einiges zur Klärung des Weges beitragen können.

§ 2. Die allgemeinen Bedingungen der Beharrlichkeit. Bei Behandlung des Stromes stellt man sich die Electricität als eine continuirliche und continuirlich bewegte Flüssigkeit vor. Diese Annahme, die eine Fiction sein mag,

ist nicht bloß erlaubt, sondern, streng genommen, geboten. Denn das Ampère'sche Elementargesetz und dessen Varianten, auf denen in letzter Linie die electrodynamischen Grundgesetze beruhen, sind im Grunde aufgestellt für eine fictive continuirliche Flüssigkeit, deren Strömung an die Stelle des wirklich im galvanischen Strom auftretenden Vorganges gesetzt wird. Genau genommen gelten also die electrodynamischen Gesetze für jene fictive Flüssigkeit, und es bedarf erst eines besonderen Nachweises, dass der in ihnen enthaltene Ausdruck mittlerer Strömungswirkungen auch auf die vereinzelte Bewegung discontinuirlicher Electricitätsmoleküle Anwendung findet.

Ob der Strom unitarisch oder dualistisch fließt, lassen wir vorläufig dahingestellt sein; der Leser wird das Erforderliche leicht ergänzen. Er soll immer als ruhend vorausgesetzt werden.

Es sei nun ein stationärer electricischer Strom gegeben. Die in ihm bewegte Electricität hat an jeder Stelle eines Leiters eine gewisse Dichtigkeit ρ und eine gewisse Geschwindigkeit u . Der Begriff der Beharrlichkeit verlangt, dass ρ und u bloß von den Coordinaten abhängen. Damit ist auch gesagt, dass die Electricität nach festen Stromlinien fließen muss. Ebenso verlangt jener Begriff, dass die an jeder Stelle des Stromkreises thätige Kraft eine bloße Function der Coordinaten sei, also dass sie nach unveränderlichen Kraftlinien wirke und eine Potentialfunction V habe. Mehr noch, da u von der Zeit t nicht abhängt, und in V , auch wenn man berücksichtigt, dass electrodynamische Werthe desselben einzusetzen sind, jedes u durch die Coordinaten ersetzt werden kann, so muss sich die electrodynamische Potentialfunction V für den besonderen Fall des stationären galvanischen Stromes auf eine Potentialfunction im gewöhnlichen Sinne des Wortes reduciren, d. h. auf eine solche, die die Zeit nicht enthält und die Herstellung der Kraftcomponenten durch einfache Differentiation erlaubt.¹⁾

1) Hr. J. Fröhlich in Buda-Pest hatte die Freundlichkeit, mir die Abhandlung, welche er über nahe denselben Gegenstand in den Abh. der

Dagegen folgt nicht allgemein aus dem blossen Begriff der Beharrlichkeit, dass die Stromlinien mit den Kraftlinien identisch sind (der Saturnsring ist z. B. angenähert ein stationärer Strom von Materie, bei dem die Stromlinien auf den Kraftlinien senkrecht stehen); wohl aber ergibt sich das für den electrischen Strom daraus, dass bei diesem an jeder Stelle eine widerstehende Kraft vorhanden ist, welche die dort gebildete lebendige Kraft der Strömung in unmessbar kurzer Zeit vollständig in Wärme umsetzt. Denn dem entsprechend wird die Geschwindigkeit u an jeder Stelle neu gebildet, fällt also überall in die Richtung der Kraft.

Es liegt endlich in der Natur der Electricität, dass electromotorische Kräfte im Innern eines homogenen Leiters auf freien Ladungen beruhen müssen. Diesen Ladungen schreiben wir nunmehr das vorhandene V zu. Doch muss vorläufig dahingestellt bleiben, ob die Kräfte dV/ds an jeder Stelle des homogenen Leiters die einzig wirksamen sind, oder ob neben ihnen noch verlorene Kräfte auftreten, die ihren Grund in der Constitution der strömenden Electricität, insbesondere in ihrer Beziehung zu den Molecülen des leitenden Stoffes haben. Die Beharrlichkeit der Stromerscheinungen verlangt, dass auch die Vertheilung der freien Electricität beharrlich sei.

Zu den im Vorstehenden festgelegten allgemeinen Bedingungen müssen nun noch, um die Theorie des Stromes vollständig zu machen, zwei Annahmen treten, nämlich

1) eine Formel für V ,

2) eine Annahme über den Zusammenhang zwischen je zweien von den Grössen: treibende Kraft und Geschwindigkeit oder Geschwindigkeit und Widerstandswirkung. Diese Annahme ist so zu formuliren, dass sie die von Ohm und Joule gewonnenen Erfahrungssätze wiedergibt. Als Ohm'sches Gesetz I bezeichne ich im Folgenden die alte Ohm'sche Formel $J = E/W$ (für den Gesamtstrom), als Ohm'sches

Ung. Acad. 7. p. 24. 1880 veröffentlicht hat, in deutscher Uebersetzung mitzutheilen. Er behandelt bei seinen Differentiationen V als explicite Function von t ; auf Grund des Vorstehenden kann ich mich mit diesem Verfahren nicht ganz einverstanden erklären, und glaube wenigstens, dass es mit Vortheil durch ein einfacheres zu ersetzen ist.

Gesetz II den Satz, dass auf dem einzelnen homogenen Leiterstück ein Gefälle der Potentialfunction auftritt, welches der Formel $J = (V_1 - V_2)/w$ entspricht, wo V_1 und V_2 die Potentialwerthe an den beiden Enden, w der zwischen ihnen enthaltene Widerstand ist. Das Wort „Widerstand“ hat in allem Folgenden seine galvanologische Bedeutung; wo der Begriff Widerstand im gewöhnlichen mechanischen Sinne vorkommt, bezeichne ich die Grösse, welche man in der Mechanik ponderabler Körper „Widerstand pro Mengeneinheit“ nennen würde, als „verzögernde Kraft des Widerstandes“.

§ 3. Kirchhoff-Riemann'sche Annahme. Kirchhoff geht bei seiner allbekannten Ableitung des Ohm'schen Gesetzes aus von der Annahme einer Beziehung zwischen der Stromdichte i und dem Gefälle dV/dN (wo N die Normale des betrachteten Flächenelements ist). Sie lautet

$$(1) \quad i = -\lambda \frac{dV}{dN},$$

wo λ die Leitungsconstante. Das betrachtete Flächenelement denken wir uns als Element der Niveaufläche von V ; dann ist N die Strömungsrichtung. Diese Gleichung bezieht sich bei Kirchhoff nur auf das Innere homogener Leiter, und ist gleichbedeutend mit dem Satze: „Die Stromdichte ist der wirksamen Kraft an jeder Stelle proportional“. In der Form dieses Satzes erlaubt sie eine Verallgemeinerung; sie kann auch auf die nicht homogenen Theile der Leitung angewendet werden. Riemann¹⁾ hat dies ausgeführt, aber mit der beschränkenden Voraussetzung, dass die Scheidungskräfte, welche den Anstoss zur Strömung geben, nur in einer unendlich dünnen Schicht wirksam seien. Diese Voraussetzung ist bekanntlich nicht genau und kann z. B. bei Batterien mit ineinander diffundirenden Stoffen sehr weit von der Wahrheit abweichen; ausserdem ist die gegentheilige Annahme leicht zu behandeln und liefert eine Ergänzung der Theorie, indem sie eine nähere Betrachtung der Verhältnisse in nicht homogenen Strecken gestattet. Wir nehmen also die etwas verallgemeinerte Riemann'sche Berechnung vor.

1) Riemann-Hattendorf, Schwere, Electr. u. Magnetismus. Hannover 1876. p. 221.

In einem Stromfaden s wirken an irgend einer Stelle auf die Electricität erstens eine Scheidungskraft, deren in die Stromrichtung fallende Componente S heissen möge, und zweitens das Potentialgefälle $-dV/ds$ der freien Electricität. Der Querschnitt des Fadens sei ω ; dann unterliegt die im Fadenelement enthaltene Electricitätsmenge $\omega \rho ds$ der Beschleunigung $(S - dV/ds)$. Wir machen die Grundannahme, dass die Stromdichte i dieser Beschleunigung proportional sei, also:

$$(2) \quad i = \lambda \left(S - \frac{dV}{ds} \right).$$

Die Arbeit, welche von jener Menge in der Zeit dt geleistet wird, ist dann:

$$(3) \quad dA dt = \left(S - \frac{dV}{ds} \right) \omega \rho ds \cdot u dt,$$

oder, da $\omega \rho u$ gleich der Intensität J des Stromfadens ist:

$$(4) \quad dA dt = J \left(S - \frac{dV}{ds} \right) ds \cdot dt = J^2 \cdot \frac{1}{\lambda \omega} \cdot ds dt,$$

letzteres nach Gl. (2).

Für die Arbeit A , welche die bewegenden Kräfte in der Zeiteinheit am ganzen Stromfaden leisten, ergibt sich mit (4):

$$(5) \quad A = J \int \left(S - \frac{dV}{ds} \right) ds = J^2 \int \frac{1}{\lambda \omega} ds,$$

wo die Integrale über den ganzen Fadenkreis zu nehmen sind. Da $\int dV/ds \cdot ds = 0$, bleibt:

$$(6) \quad A = J \int S ds = J^2 \int \frac{1}{\lambda \omega} ds,$$

oder, da $\int S ds$ der Definition von E und $\int (1/\lambda \omega) ds$ der von W genügt:

$$(7) \quad A = JE = J^2 W,$$

d. i.: Ohm I und Joule's Gesetz für den Gesamtstrom. Für homogene Fadenstrecken ist $S = 0$, und man erhält ohne weiteres die bekannten Ergebnisse von Kirchhoff und Clausius. Ist die Strecke $s_1 s_2$ nicht homogen, so wird, wenn ihr Widerstand w ist:

$$(8) \quad A_{1-2} = J \int_{s_1}^{s_2} \left(S - \frac{dV}{ds} \right) ds = J^2 w.$$

Bringen wir die Gleichung auf die Form:

$$(9) \quad J \int S ds = J(V_1 - V_2) + J^2 w,$$

so liefert sie einen Ausdruck für den Betrag der Arbeit, den die Scheidungskräfte auf der Strecke $s_1 s_2$ thun. Wird diese Arbeit selbst aus der im Leiter vorhandenen Wärme entnommen, wie bei thermoelectrisch wirksamen Berührungstellen, so stellt der erste Theil auf der rechten Seite das Peltier'sche Phänomen dar.

Schreiben wir Gl. (2):

$$(10) \quad \frac{dV}{ds} = S - \frac{i}{\lambda},$$

so liefert sie für eine homogene Strecke $s_1 s_2$ in bekannter Weise das Ohm'sche Gesetz II. Für eine nicht homogene Strecke wird:

$$(11) \quad V_2 - V_1 = \int_{s_1}^{s_2} S ds - \int_{s_1}^{s_2} \frac{i}{\lambda} ds$$

$$(12) \quad = \int_{s_1}^{s_2} S ds - Jw.$$

Wäre die Strecke $s_1 s_2$ allein vorhanden oder der Strom ausserhalb derselben geöffnet, so würden sich die Scheidungskräfte mit dem Potentialgefälle ins Gleichgewicht setzen, und die Bedingung dafür wäre offenbar $V_2 - V_1 = \int_{s_1}^{s_2} S ds$. Das Integral $\int_{s_1}^{s_2} S ds$ ist also die Niveaudifferenz zwischen s_2 und s_1 bei geöffneter Kette. Und Gl. (12) sagt aus: „Die Niveaudifferenz zwischen s_1 und s_2 bei geschlossener Kette ist um den durch den Strom hervorgebrachten Abfall Jw kleiner als bei geöffneter Kette“. Wendet man dies auf den Fall an, wo die Strecke $s_1 s_2$ verschwindend klein ist, und auf ihr ein rasches Ansteigen der Potentialfunction statthat (Berührungsflächen der gewöhnlichen galvanischen Kette), so verschwindet Jw , und man erhält den von Ohm hypothetisch ausgesprochenen Satz: „Die Niveaudifferenz zwischen den beiden Seiten einer Berührungsfläche ist bei geschlossener Kette ebenso gross wie bei offener“.

Wir können endlich noch i nach den Axenrichtungen

eines festen Coordinatensystems in drei Componenten i_x, i_y, i_z zerlegen. Es wird dann:

$$(13) \quad \begin{cases} i_x = \lambda \left(S \cos(x, s) - \frac{dV}{dx} \right), & i_y = \lambda \left(S \cos(y, s) - \frac{dV}{dy} \right), \\ i_z = \lambda \left(S \cos(z, s) - \frac{dV}{dz} \right). \end{cases}$$

Nun muss bekanntlich $di_x/dx + di_y/dy + di_z/dz = 0$ sein. Wendet man dies auf die vorstehenden Gleichungen an, so erhält man:

$$(14) \quad \Delta V = \frac{dS \cos(x, s)}{dx} + \frac{dS \cos(y, s)}{dy} + \frac{dS \cos(z, s)}{dz}.$$

Ist die Form von V bekannt, so kann diese Gleichung zur Bestimmung des Verhaltens der freien Electricität dienen. Für homogene Leitertheile zieht sie sich ohne weiteres auf Kirchhoff's $\Delta V = 0$ zurück. Für das Innere nicht homogener Theile sieht man aus ihr, dass daselbst freie Ladungen vorkommen.

Die Uebertragung vom Stromfaden auf körperliche Leiter übergehen wir als bekannt.

§ 4. Annahme über den Widerstand. Versucht man die Theorie der galvanischen Strömung ganz an mechanische Vorstellungen anzulehnen, so hat man die im Strome auftretenden Geschwindigkeiten als Erzeugnisse von Resultanten aufzufassen, in welche die verzögernde Kraft des Widerstandes eingeht. Es liegt also nahe, der Betrachtung eine Hypothese über die Abhängigkeit dieser verzögernden Kraft von der Strömungsgeschwindigkeit zu Grunde zu legen, und man findet leicht, dass für Drähte mit incompressibler Strömung die Hypothese genügt: „Die verzögernde Kraft des Widerstandes ist der Strömungsgeschwindigkeit proportional.“ Diese Annahme ist denn auch schon öfter (von Briot, Wiedemann, Edlund, der indessen die beiden Bedeutungen des Wortes Widerstand miteinander verwechselt hat, von v. Bezold, mir selbst) ausgesprochen und vor vier Jahren von v. Bezold in seiner Abhandlung: „Die Theorie der stationären Strömung u. s. w.“¹⁾ näher behandelt worden. Ich muss in-

1) v. Bezold, Wied. Ann. 3. p. 12. 1878.

dessen bemerken, dass mir das Ergebniss dieser interessanten Untersuchung, was die electriche Strömung angeht, nicht bindend erscheint. v. Bezold's Satz: „Die Electricität strömt in der ganzen Leitung mit constanter Geschwindigkeit“, stützt sich auf die Uebereinstimmung eines particulären Integrals seiner Differentialgleichung mit der Kirchhoff'schen Formel. Das schliesst an sich noch nicht aus, dass auch andere particuläre Integrale das Ohm'sche Gesetz enthalten. Dann aber versteht Hr. v. Bezold in seiner Abhandlung unter $-dV/ds$ ausdrücklich die Resultante aller beschleunigenden Kräfte, die an der Stelle xyz thätig sind. Wenn aber die Electricität der Compression Widerstand leistet, so treten in jener Resultante auch Kräfte auf, die aus der Incompressibilität oder Elasticität der Electricität hervorgehen; die sind also in v. Bezold's Grösse $-dV/ds$ mit enthalten, d. h. sein $-dV/ds$ ist mit Kirchhoff's Grösse $-dV/ds$ nicht identisch, und aus der Uebereinstimmung oder Nichtübereinstimmung der Formeln darf dann nicht mehr auf die Uebereinstimmung oder Nichtübereinstimmung der in ihnen enthaltenen Gesetze geschlossen werden. Daraus dass Hr. v. Bezold auch die Scheidungskräfte S nicht gesondert neben den Kräften $-dV/ds$ betrachtet hat, ergibt sich die eine seiner Alternativen, dass die Potentialfunction Discontinuitäten haben müsse, um einen Strom zu erzeugen. Das passt offenbar nicht für unsern Fall; denn man kann ganz wohl ein Thermoelement aus zwei ineinander diffundirenden Flüssigkeiten herstellen, welche keine angebbare Discontinuität des chemischen Bestandes, also auch keine der Potentialfunction aufweisen. Die andere Alternative ist die richtige: „Soll der Strom kreisen, so müssen ausser den von der Potentialfunction der freien Electricität herrührenden Kräften, deren Arbeitsintegral $\int f(dV/ds)ds$ über den ganzen Strom verschwindet, noch andere, Scheidungskräfte, vorhanden sein deren Arbeitsintegral $\int fSds$ nicht gleich Null ist.“

Mit Rücksicht auf die Thatsache nun, dass wenigstens in den nicht homogenen Theilen freie Ladungen auftreten, bedarf die eben für homogene Drähte als richtig bezeichnete Annahme über den Widerstand einer leichten Modification.

Wir setzen die verzögernde Kraft des Widerstandes $= \zeta u(\rho/\rho^*)$ wo ζ eine Constante des leitenden Stoffes bedeutet, ρ^* die natürliche Dichtigkeit der Electricität in demselben, ρ die wirklich während des Stromes herrschende Dichtigkeit, nämlich ρ^* plus der Dichtigkeit der etwa vorhandenen freien Ladung. Das Element der im Stromfaden vorhandenen Electricität, $\omega \rho ds$, erfährt dann eine Summe von Beschleunigungen, welche sich zusammensetzt aus: 1) der ds -componente S der Scheidungskraft, 2) dem Potentialgefälle der freien Electricität, $-dV/ds$, 3) der Verzögerung des Widerstandes, $-\zeta u(\rho/\rho^*)$, 4) Kräften, welche aus der Constitution des Leiters hervorgehen. Solche Kräfte können a) hemmend auf die Beweglichkeit der Electricität wirken; insofern sind sie unter $-\zeta u(\rho/\rho^*)$ schon enthalten, b) können sie danach streben, der neutralen Electricität eine gewisse Dichtigkeit im Leiter zu geben und zu erhalten. In der That, nimmt man an, dass im neutralen Leiter eine bestimmte natürliche Dichtigkeit ρ^* der Electricität vorhanden sei, so muss man auch Kräfte, und zwar sehr grosse Kräfte statuiren, welche dieselbe herstellen, und die werden dann auch während des Stromes wirken. Solche Kräfte müssen sich während der Strömung als Druckkräfte äussern, welche zur Regelung der Arbeitsvertheilung beitragen, aber an sich, über den ganzen Strom integrirt, die Arbeit der Scheidungskräfte weder vermehren noch vermindern. Wir wollen ihre in die Stromrichtung fallende Componente für die Mengeneinheit p nennen.

Die gesammte bewegende Kraft, welche auf das Stromelement wirkt, ist demnach:

$$(15) \quad \left(S - \frac{dV}{ds} + p - \zeta u \frac{\rho}{\rho^*} \right) \omega \rho ds.$$

Ihre Arbeit in der Zeit dt ist:

$$(16) \quad dA dt = \left(S - \frac{dV}{ds} + p - \zeta u \frac{\rho}{\rho^*} \right) \omega \rho ds \cdot u dt.$$

Das Wort Arbeit bezieht sich hier auf die Resultante aller Kräfte, d. h. es bezieht sich auf die Erzeugung von lebendiger Kraft der Strömung. Die Beharrlichkeit erfordert demnach, dass das Integral A über den ganzen Stromfaden gleich Null sei, also:

$$(17) \quad A = \int \left(S - \frac{dV}{ds} + p - \zeta u \frac{\varrho}{\varrho^*} \right) u \omega \varrho ds = 0,$$

oder wegen $u \omega \varrho = J$:

$$(18) \quad J \int \left(S - \frac{dV}{ds} + p \right) ds = J \int \zeta u \frac{\varrho}{\varrho^*} ds.$$

Nun sind die p , auf den ganzen Faden bezogen, wie eben gesagt, verlorene Kräfte, also $J \int p ds = 0$, ebenso ist für den ganzen Faden $\int dV/ds = 0$, also bleibt:

$$(19) \quad J \int S ds = J \int \zeta u \frac{\varrho}{\varrho^*} ds = J^2 \int \frac{\zeta}{\omega \varrho^*},$$

d. i. Gl. (16) wenn $\zeta = \varrho^*/\lambda$ genommen wird, und man sieht, dass der Widerstand $\int \zeta / \omega \varrho^*$ nur von der natürlichen Dichtigkeit der Electricität, also nicht von der Stromstärke abhängt.

Die Wärmearbeit (im galvanologischen Sinne), welche auf der Strecke $s_1 s_2$ in der Zeiteinheit geleistet wird, ergibt sich direct aus der Betrachtung der Widerstandesverzögerung $\zeta u (\varrho/\varrho^*)$, welche von der Menge $\omega \varrho ds$ auf der Strecke u überwunden wird, zu:

$$(20) \quad A_{1-2} = \int_{s_1}^{s_2} \zeta u^2 \frac{\varrho^2}{\varrho^*} \omega ds = J^2 \int \frac{\zeta}{\omega \varrho^*} ds = J^2 w.$$

Für incompressible Strömung im homogenen Leiter reducirt sich der Factor ϱ/ϱ^* auf 1.

Die Gesetze von Ohm und Joule sind also, so weit nur die strömende Electricität in Betracht kommt, in unserer Annahme vollständig enthalten, und Kirchhoff's Ableitung präsentirt sich als ihr Specialfall $p = 0$.

§ 5. Die freie Electricität des Stromes. Die Lücken in den bestehenden Ansichten stellen sich heraus, wenn wir nun auch die freie Electricität näher ins Auge fassen.

Zunächst sieht man, dass das theoretische Bedürfniss nach einer freien Ladung als bestimmender Ursache der Strombewegung wesentlich von den Kräften p abhängt. Wir betrachten die beiden Grenzfälle: a) ist p überall gleich Null, d. h. ist die Electricität absolut compressibel, so haben wir als

beschleunigende Kräfte an jeder Stelle der Strombahn nur $S - dV/ds$, und in homogenen Leitern nur $-dV/ds$. Damit also in diesen überhaupt der Strom auftritt, muss $-dV/ds$ den vom Ohm'schen Gesetz II verlangten Werth haben, d. h. die freie Ladung ist als Ursache der Strombewegung unentbehrlich und muss dem Ohm'schen Gesetz II entsprechen.

b) Ist aber die Electricität incompressibel, so bleiben, wenn $-dV/ds$ verschwindet, immer noch die Kräfte p übrig, und diese müssen, da der Strom im geschlossenen Rohr fliesst, an sich seine Vertheilung nach dem Gesetz der Beharrlichkeit regeln; die Gleichungen (18), (19), (20) bleiben bestehen, auch wenn gar kein V vorhanden ist, der Strom wird durch die Incompressibilität und die Scheidungskräfte allein geregelt, die freie Ladung, insofern sie als Ursache der Strombewegung fungirt, wird überflüssig und willkürlich.

Hier scheint also die Erfahrung kategorisch für die Annahme $p = 0$ zu sprechen; doch ist das, wie sich später zeigen wird, vorläufig nur scheinbar der Fall.

Nun fragt sich aber: Welchen Kräften unterliegt die freie Ladung, die wir erfahrungsmässig statuiren müssen? Die Antwort lautet: Befindet sich ein freies Electricitätstheilchen an einem homogenen Theile der Leitung, so unterliegt es dem daselbst herrschenden Potentialgefälle, also der beschleunigenden Kraft $\mp dV/ds$, je nachdem es positiv oder negativ ist; befindet es sich an einer nicht homogenen Stelle, so unterliegt es der Resultante $\pm (S - dV/ds)$. Nun ist sowohl dV/ds wie $S - dV/ds$ nirgendwo auf dem Stromkreise gleich Null, also ist die freie Electricität weder an sich noch in Verbindung mit den Scheidungsvorgängen im Gleichgewicht.

Es sind nun a priori, so weit blos die Beharrlichkeitsbedingungen in Betracht kommen, zwei Fälle möglich: a) die freie Electricität ist in Ruhe, b) sie gibt den treibenden Kräften nach und ist in Strömung begriffen.

§ 5_a. Die freie Electricität in Ruhe. In diesem Fall muss offenbar eine Gegenkraft nachgewiesen werden, welche die Wirkung von $-dV/ds$ auf die freie Electricität aufhebt. Die Scheidungskraft S darf offenbar nirgendwo mit

aufgehoben werden; denn dann würde die Gegenkraft den ganzen Strom aufheben. Auf die freie Electricität, welche im Innern nicht homogener Theile enthalten ist, wirken also noch immer die Kräfte S , und unser Fall ist genauer so zu beschreiben: Die freie Electricität, welche sich an homogenen Theilen der Leitung befindet, ist in Ruhe; diejenige, welche im Innern nicht homogener Theile angesammelt ist, nimmt an der Strombewegung Theil. Dies ist, ohne die Beharrlichkeit des Stromes zu schädigen, möglich, indem sie so fließt, dass das Product $\omega u \rho$ constant bleibt, wenn man unter ρ die Gesamtdichtigkeit der Electricität (natürliche Dichtigkeit ρ^* der neutralen Electricität plus Dichtigkeit der erzeugten freien Ladung) versteht. Näheres hierüber in § 5b, wo die Art einer solchen Strömung bildlich betrachtet wird.

Die Gegenkraft, welche die Wirkung von $-dV/ds$ auf die freie Electricität vernichtet, kann nun vernünftiger Weise nur in einer Gegenwirkung des Stromes selbst gesucht werden. Die Druckkräfte p sind theils senkrecht gegen die Oberfläche des Stromes gerichtet und fallen theils in dieselbe Richtung wie $-dV/ds$, können also nicht herangezogen werden. Einen unendlichen Widerstand anzunehmen, der speciell für die freie Electricität des Stromes eintreten sollte, liegt gar kein Grund vor, und die freie Electricität hätte überhaupt keine Ursache, sich ruhend anzusammeln, wenn sie nicht dazu gezwungen würde durch eine eigenthümliche Gegenwirkung des Stromes.

Wir müssen also für den vorliegenden Fall annehmen: „Der Strom übt auf seine freie Electricität eine statische Einwirkung aus, welche an jeder Stelle entgegengesetzt gleich dem daselbst herrschenden Potentialgefälle ist“.

Macht man diese Annahme, so ergibt sich sofort: 1) Ist eine Kraft da, welche das Potentialgefälle $-dV/ds$ aufhebt, so stellt dieselbe Kraft auch dieses Gefälle her, wenn es nicht vorhanden wäre. Die freie Ladung muss also, dem Ohm'schen Gesetz II entsprechend, durch die Stromwirkung unter allen Umständen eintreten. Damit wird das scheinbare Uebergewicht der Annahme $p = 0$ für unseren Fall wieder zu nichte.

2) Wirkt die Gegenkraft auf die freie Electricität, so wirkt sie auch auf die neutrale, und wird das electromotorische Gefälle $-dV/ds$ für die freie Electricität aufgehoben, so wird es auch für das Innere der Leiter aufgehoben. Damit also der Strom möglich sei, muss die Triebkraft $-dV/ds$ für sein Inneres überflüssig sein, d. h. die Electricität muss mit Widerstand gegen die Compression fließen.

Es fragt sich nun, ob die vorhandenen electrodynamischen Grundgesetze eine Gegenwirkung des Stromes zulassen, wie sie sich hier als wesentlich zeigt. Da findet sich:

1) Das Gesetz von Clausius ist ohne weiteres auszuschliessen, weil es sich auf die Bedingung gründet, dass der geschlossene Strom keinerlei electrostatische Wirkungen übe.

2) Der Weber'sche Doppelstrom ist gleichfalls auszuschliessen, da er dasselbe Ergebniss liefert. Nimmt man an, es ströme im galvanischen Phänomen bloß die positive oder bloß die negative Electricität, während die entgegengesetzte fest mit den Körpermoleculen verbunden bleibt, so liefern die Gesetze von Riemann und von Weber electrostatische Stromwirkungen, welche auf ihre Brauchbarkeit für unser Problem zu prüfen sind.

3) Für Riemann's Gesetz findet man leicht aus den so brauchbaren Formeln, welche Clausius¹⁾ neuerdings gegeben hat, wenn X die x -componente der electrostatischen Wirkung des Gesamtstromes, r den Radiusvector und k die Clausius'sche Wirkungsconstante bezeichnet:

$$(21) \quad x = \mp \frac{kJ}{2} \int u \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} ds,$$

die anderen Componenten cyclisch entsprechend; das obere Vorzeichen gilt, wenn bloß die positive Electricität, das untere, wenn bloß die negative Electricität strömt; die Integration erstreckt sich über den Gesamtstrom. Die Wirkung ist dieselbe, als wäre jedes Stromelement ds mit der ruhenden statischen Ladung $kJuds/2$ versehen. Sie entspricht also nicht den Erfordernissen des Ohm'schen Gesetzes II.

1) Clausius, Wied. Ann. 11. p. 604. 1880.

4) Für Weber's Gesetz ergibt sich aus denselben Formeln:

$$(22) \quad \begin{cases} X = \mp \frac{k}{2} J \int \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u}{r} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \right] ds, \\ Y = \mp \frac{k}{2} J \int \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{u}{r} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \right] ds, \\ Z = \mp \frac{k}{2} J \int \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{u}{r} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \right] ds. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke lassen sich nicht, wie der Riemann'sche durch eine einfache Ladung der Stromelemente ersetzen. Dagegen sieht man, dass sie sich als Differentialquotienten einer eigenthümlichen, von Punkt zu Punkt variablen Kräftefunction:

$$(23) \quad U = \mp \frac{k}{2} J \int \frac{u}{r} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 ds,$$

darstellen. Es hat mir bis jetzt nicht gelingen wollen, zu entscheiden, ob die durch sie hervorgerufene freie Ladung mit der vom Ohm'schen Gesetz II geforderten identisch ist oder nicht.

Als Ergebniss von § 5_a stellt sich also heraus, dass der galvanische Strom sich möglicher Weise folgerichtig construiren lässt mit folgenden Annahmen:

a) Die freie Electricität der homogenen Stromtheile ist in Ruhe.

b) Es strömt nur eine Art der Electricität.

c) Sie strömt mit Widerstand gegen die Compression.

d) Das Weber'sche Gesetz ist richtig, und die auf ihm beruhende Eigenthümlichkeit des Stromes, electrostatisch zu wirken, begründet dessen freie Ladung.

Nimmt man dies an, so tritt in den Formeln (15) bis (18) des § 4 noch eine neue Kraft auf, nämlich die electrostatische Stromwirkung $+dV/ds$, oder, was dasselbe sagt, die Grösse $-dV/ds$ fällt aus den Formeln heraus. Die Ableitung bleibt darum doch bestehen, weil $-dV/ds$ auf die Gleichungen (19) und (20) keinen Einfluss hat. Die Kirchhoff'sche Formel stellt die Stromerscheinungen noch immer richtig dar, aber nur indirect, insofern das vom Strom hergestellte dV/ds mit dem an der gleichen Stelle vorhandenen Druckgefälle übereinstimmt.

§ 5b. Sämmtliche freie Electricität ist in Bewegung. Dann muss ihre Bewegung stationär sein. Von der beharrlichen Bewegung einer Flüssigkeit mit variabler Dichte kann man sich durch ein Analogon aus der Mechanik der Ponderabilien leicht eine nähere Vorstellung verschaffen. Man denke sich eine Flüssigkeit von beliebigem endlichen Elasticitätsgrad, eingeschlossen in eine in sich selbst zurücklaufende Röhre, und im Innern dieser Röhre an beliebig vielen Stellen $A_1, A_2 \dots$ Propellerschrauben angebracht, deren Axen in die Längenrichtung der Röhre fallen, und die von aussen in Bewegung gesetzt werden können. Das gewöhnliche galvanische oder thermoelectrische Element entspricht einer solchen Vorrichtung mit mehreren Propellern, die mit verschiedener Stärke theils gleichsinnig, theils in entgegengesetztem Sinn arbeiten. Für unsere Auseinandersetzung genügt es, einen Propeller an der Stelle A als thätig anzunehmen; wir nennen diejenige Seite, nach der er die Flüssigkeit hintreibt, seine vordere. Wird er stationär gedreht, so bildet sich vor ihm eine Verdichtung der Flüssigkeit. Diese Verdichtung schreitet mit abnehmender Grösse nach vorn fort, geht endlich durch Null und wird negativ; die Verdünnung nimmt zu, bis sie unmittelbar hinter A ihr Maximum erreicht; in der unmittelbaren Thätigkeitssphäre von A geht sie rasch wieder in Verdichtung über. Ist die Erscheinung stationär geworden, so sind die Dichtigkeitsdifferenzen stationär über die verschiedenen Querschnitte der Röhre vertheilt, und aus ihnen ergeben sich die gleichfalls stationären Druckdifferenzen, unter deren Einfluss die ganze Masse strömt. Jede einzelne Schicht der Flüssigkeit dehnt sich beim Fortschreiten aus, sodass sie die ihrem jeweiligen Ort entsprechende Dichtigkeit annimmt, und wenn sie den Kreislauf einmal vollendet hat, passirt sie wieder den Propeller, der ihre inzwischen eingetretene Verdünnung plötzlich in Verdichtung umwandelt. Die Strömungsgeschwindigkeit regelt sich so, dass für jeden Stromfaden u dem Product aus Querschnitt und Dichtigkeit umgekehrt proportional verläuft.

Aus der Art dieser Strömung ergibt sich sofort der Satz: dass in einem endlichen Rohr die Dichte der Flüssigkeit

nirgendwo zu Null werden darf; denn das würde unendliche Ausdehnung und unendliche Strömungsgeschwindigkeit verlangen.

Wenden wir nun das Vorstehende auf den electrischen Strom an, so treten die scheidenden Kräfte an die Stelle der Propeller, und die freien Ladungen an die Stelle der $\pm$ Dichtigkeitsüberschüsse. Auf den unitarischen Strom passt das Bild direct, für den dualistischen denke man sich zwei entgegengesetzte Ströme gegeneinander laufend, deren Dichtigkeitsvariationen an jeder Stelle entgegengesetzte Vorzeichen haben. Für Ströme auf der Oberfläche der Leiter gebe man der Röhre ringförmigen Querschnitt. Bei der Electricität wirken die Dichtigkeitsvariationen anziehend und abstossend. Dies lässt aber den eben aufgestellten Satz unberührt, und er liefert, auf die Electricität angewendet:

„Eine stationäre Strömung der freien Electricität für sich, blos auf der Oberfläche der homogenen Leitertheile, ist nicht denkbar. Denn von Natur finden sich auf dem Strom immer zwei Stellen, wo die Dichtigkeit der freien Electricität gleich Null ist, und durch Ableitung können wir eine solche an jeden beliebigen Punkt der Leitung verlegen, ohne erfahrungsmässig den Strom zu stören. Bildet aber die freie Electricität einen besonderen Strom für sich, so sind derartige Stellen für sie unpassirbar, denn sie müsste vorher die Geschwindigkeit ∞ annehmen“. Soll also die freie Electricität überhaupt strömen, so muss das so geschehen, dass sie in Verbindung mit der neutralen Electricität im Innern der Leiter strömt. Vorzustellen ist das leicht genug; für den unitarischen Strom denke man sich die freie Ladung als Dichtigkeitszuwachs der natürlichen, neutralen Ladung der Leiter. Aber dann erhält man folgende Schlussreihe:

Die electrodynamischen Grundgesetze, welche hier zur Anwendung kommen, sind diejenigen, welche für den Gesamtstrom keinerlei electrostatische Einwirkung auf einen freien Electricitätspunkt ergeben. Also 1) das Gesetz von Clausius ohne Nebenannahme, 2) die Gesetze von Weber und Riemann mit der Nebenannahme des Doppelstroms.

Das früher angewandte Gesetz des Widerstandes genügt

auch hier der Erfahrung und ist nöthig, weil der Strom selbst Dichtigkeitsvariationen auch im homogenen Leiter hervorruft. Wir erhalten also wieder die Grundgleichung:

$$(16) \quad dA dt = \left(S - \frac{dV}{ds} + p - \zeta u \frac{q}{q^*} \right) \omega q ds \cdot u dt.$$

Diese wenden wir auf eine homogene Strecke s_1 s_2 des Fadens an. Bezeichnet L_1 und L_2 die lebendige Kraft der Electricitätseinheit an den beiden Enden der Strecke, so wird, da J die in der Zeiteinheit den Querschnitt durchfließende Electricitätsmenge ist:

$$(24) \quad \int_{s_1}^{s_2} \left(-\frac{dV}{ds} + p - \zeta u \frac{q}{q^*} \right) \omega q u ds = J(L_2 - L_1).$$

Nun verschwinden die L bekanntlich gegen die Widerstandsarbeit in der Zeiteinheit, wie sich daraus ergibt, dass Verengerungen und Erweiterungen eines homogenen Leiters keine besondere Ab- und Zunahme der Wärmeproduction bemerken lassen. Wir setzen also $L_2 - L_1 = 0$ und erhalten dann durch Integration:

$$(25) \quad J(V_1 - V_2) + J \int_{s_1}^{s_2} p ds = J^2 w.$$

Soll diese Gleichung dem Joule'schen Gesetz Genüge leisten, und zugleich das Ohm'sche Gesetz II befriedigen, so muss $Jfp ds$ für jede Strecke $= 0$, also $p = 0$ sein. Zum vorliegenden Falle gehört also als Correlat, dass die Electricität absolut compressibel fließt. Dann ist die Kirchhoff'sche Formel $i = -\lambda(dV/ds)$ der vollständige Ausdruck des Strömungsgesetzes.

Nun ist die Electricitätsmenge, welche in der Secunde durch die erste Grundfläche ω in ein Fadenelement von der Länge ds eintritt $-\lambda \omega(dV/ds)$; diejenige, welche durch die zweite Grundfläche desselben Elementes austritt $\lambda \omega(dV/ds) - \lambda(d(\omega dV/ds)/ds) ds$. Die Beharrlichkeit verlangt also, dass:

$$(26) \quad \frac{d}{ds} \left(\omega \frac{dV}{ds} \right) = 0,$$

sei. Wir begrenzen nun eine Strecke des homogenen Fadentheils durch zwei seiner Querschnitte ω_1 und ω_2 und wenden

auf den somit hergestellten geschlossenen Körper den bekannten Green'schen Satz, an, wonach:

$$(27) \quad \int \Delta U dK = \int \frac{dU}{d\nu} d\sigma,$$

wobei dK ein körperliches Element des betrachteten Raumes, $d\sigma$ ein Element seiner Oberfläche, ν die nach aussen gerichtete Normale des letzteren, U eine beliebige in dem betrachteten Raum endliche und stetige Coordinatenfunction ist, und die Integration links über den ganzen Rauminhalt, rechts über die ganze Oberfläche des Körpers ausgedehnt wird. Für U substituiren wir unser V . Dann ist im vorliegenden Fall $dU/d\nu$ überall mit Ausnahme der beiden Endflächen ω_1 und ω_2 gleich Null, weil die seitliche Begrenzung unseres Körpers durch Kraftlinien gebildet wird; an der ersten Grundfläche ω_1 ist, wenn der zugehörige Werth von V entsprechend markirt wird, $dU/d\nu = -dV_1/ds$, an der zweiten $dU/d\nu = dV_2/ds$, also zieht sich (27) zurück auf:

$$(28) \quad \int \Delta V dK = \omega_2 \frac{dV_2}{ds} - \omega_1 \frac{dV_1}{ds}.$$

Lassen wir nun ω_2 unendlich nahe an ω_1 heranrücken, so reducirt sich der Körper auf ein Element ωds , und der Ausdruck rechts auf $d(\omega dV/ds)/ds \cdot ds$ für dasselbe Element, also wird für jede hier in Betracht kommende Form von V :

$$(29) \quad \Delta V \omega ds = \frac{d}{ds} \left(\omega \frac{dV}{ds} \right) ds,$$

d. i. mit Rücksicht auf (26):

$$(30) \quad \Delta V = 0.$$

Nun ist nicht einzusehen, wie diese Bedingung mit den drei oben genannten electrodynamischen Gesetzen in Einklang gebracht werden kann, so lange freie Electricität im Innern des neutralen Leiters enthalten ist; und dies ist doch, wie oben gezeigt, unvermeidlich, wenn wir den Fall § 5_b annehmen. Es scheint also, als sei die zweite Art der Strömung, diejenige bei der die freie Electricität auch der homogenen Leiter in Bewegung ist, unmöglich. Und ist dem so, so fällt das Clausius'sche Gesetz, das Riemann'sche Gesetz und der Weber'sche Doppelstrom.

Schlussbemerkung. Vom Standpunkt der Neumann'schen Potentialtheorie kann man den sogenannten electrischen Strom als ein Phänomen sui generis betrachten, dessen Zusammenhang mit der statischen Electricität bis jetzt nicht vorstellbar geworden ist. Dann muss man offenbar, um die freie Ladung des Stromkreises zu erklären, dem einzelnen Stromelement eine statisch electroskopische Wirkung zuschreiben, für deren Bezifferung man a priori völlig freie Auswahl hat. Man kann sie der Weber'schen im § 5_a behandelten Elementarkraft ähnlich machen, in dem man sie anisotrop annimmt und mit dem Factor $(dr/ds)^3$ versieht. Aber ein Unterschied bleibt vorläufig bestehen: In den Weber'schen Kräften (22) tritt die isolirte Geschwindigkeit u auf; die Potentialtheorie dagegen hat keinen Grund, etwas anderes als die unzerlegten Grössen i oder J in ihren Formeln zu führen, so lange sie nicht eine Vorstellung vom Wesen des Stromes gibt, in der eine Geschwindigkeit eine bestimmende Rolle spielt.

VI. *Experimentaluntersuchungen*
über die Intensität des gebeugten Lichtes; II.
***von J. Fröhlich in Budapest.*¹⁾**

Vor einigen Jahren untersuchte ich die Intensität des gebeugten Lichtes bei Diffractionerscheinungen von geringen Beugungswinkeln und fand, dass dieselbe mit den Folgerungen der gewöhnlichen Theorie in Uebereinstimmung sei.²⁾

Eine quantitative Untersuchung dieser Intensitätsverhältnisse war bis zu diesem Zeitpunkte nicht vorhanden, und seitdem schien auch keine solche ausgeführt worden zu sein, hauptsächlich wohl wegen der Schwierigkeiten, mit welchen dieselbe verbunden ist.

1) Diese Untersuchung geschah auf Veranlassung und mit Unterstützung der ungarischen Academie.

2) J. Fröhlich, Wied. Ann. 3. p. 568; 5. p. 134. 1878.