

Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzischen Determinanten einer reellen positiven Funktion.

Von

G. SZEGŐ in Budapest.

1. Es sei  $f(x)$  eine überall stetige, nach  $2\pi$  periodische, positive\*) Funktion. Ferner ihre formell gebildete Fouriersche Reihe sei

$$f(x) \sim a_0 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \sin rx).$$

Ich bilde die charakteristische Gleichung  $(n + 1)^{\text{ten}}$  Grades

$$D_n(f - \lambda) = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 & \cdots & a_n + ib_n \\ a_1 - ib_1 & a_0 - \lambda & a_1 + ib_1 & \cdots & a_{n-1} + ib_{n-1} \\ a_2 - ib_2 & a_1 - ib_1 & a_0 - \lambda & \cdots & a_{n-2} + ib_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n - ib_n & a_{n-1} - ib_{n-1} & a_{n-2} - ib_{n-2} & \cdots & a_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(n = 0, 1, 2, \dots),$

welche bekanntlich  $n + 1$  reelle Wurzeln

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$$

hat. Es ist dann

$$(T) \quad \lambda_0^{(n)} \lambda_1^{(n)} \dots \lambda_n^{(n)} = D_n(f)$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 & \cdots & a_n + ib_n \\ a_1 - ib_1 & a_0 & a_1 + ib_1 & \cdots & a_{n-1} + ib_{n-1} \\ a_2 - ib_2 & a_1 - ib_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} + ib_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n - ib_n & a_{n-1} - ib_{n-1} & a_{n-2} - ib_{n-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

$(n = 0, 1, 2, \dots).$

\*) Darunter verstehe ich im folgenden immer eine Funktion, die im Intervalle  $0 \leq x \leq 2\pi$  ein positives Minimum besitzt.

O. Toeplitz<sup>\*)</sup>, C. Carathéodory und L. Fejér<sup>\*\*)</sup> befaßten sich mit diesen Determinanten, welche aus den Fourierschen Konstanten gebildet werden können, und ihre Untersuchungen ergaben, daß dieselben mit dem Wertevorrat von  $f(x)$  im engsten Zusammenhange stehen. Es sind nämlich mit deren Hilfe gewisse Maximum-Minimum-Probleme lösbar, welche sich auf positive harmonische Funktionen mit gegebenen  $2n + 1$  ersten Koeffizienten beziehen, sowie auch einige Fragen der Funktionentheorie von allgemeinem Interesse und großer Wichtigkeit. Determinanten ähnlicher Form begegnete man schon viel früher in der Literatur, jedoch im Bereiche ganz anderer Fragen.

Im folgenden befaße ich mich mit einer Vermutung von Herrn G. Pólya<sup>\*\*\*)</sup>, nach welcher die aus den  $n^{\text{ten}}$  Wurzeln<sup>†)</sup> dieser Determinanten gebildete ganz bestimmte Folge unter den oben genannten Bedingungen für  $\lim n = \infty$  einem Grenzwerte zustrebt, welcher dem „geometrischen Mittel“ von  $f(x)$  im Intervalle  $0 \leq x \leq 2\pi$  gleich ist, d. h.

$$(1) \quad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\lambda_0^{(n)} \lambda_1^{(n)} \dots \lambda_n^{(n)}} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{D_n(f)} \text{ existiert und } = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(x) dx}$$

Diese Vermutung ist im Falle des Poissonschen Integralkernes, d. h. bei der Funktion

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$$

$$(|r| < 1),$$

wie auch für trigonometrische Polynome erster Ordnung leicht zu beweisen.

Es ist mir gelungen, diese Behauptung von G. Pólya unter den obigen

<sup>\*)</sup> O. Toeplitz, a) *Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlich vielen Veränderlichen* [Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen math.-phys. Kl. (1907), S. 110—116]; b) *Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* [Ibid. (1910), S. 489—506]; c) *Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlich vielen Veränderlichen*. I. Teil: *Theorie der L-Formen* [Math. Ann. 70 (1910), S. 351—376]; d) *Über die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen* [Rend. del Circ. Mat. di Palermo 32 (2. Semester 1911), S. 191—192].

<sup>\*\*)</sup> C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen* [Rend. del Circ. Mat. di Palermo 32 (2. Semester 1911), S. 193—217]; ferner: C. Carathéodory und L. Fejér, *Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz* [Ibid. 32 (2. Semester 1911), S. 218—239].

<sup>\*\*\*)</sup> L'Intermédiaire des Mathématiciens 21 (1914), S. 27. Question 4340.

<sup>†)</sup> Diese Determinanten sind, wie wir sehen werden, unter den obigen Bedingungen, sämtlich positiv (s. Formel (T<sup>\*)</sup>).

Bedingungen ganz allgemein zu beweisen. Herr M. Fekete hat sogar mit Anwendung eines einfachen Determinantensatzes auch die Existenz von

$$(1^{\text{bis}}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n+1}(f)}{D_n(f)}$$

bewiesen, welches dann nach allgemeinen Grenzwertsätzen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_n(f)}$  übereinstimmt. Ich bezeichne diesen Grenzwert im folgenden durch  $D(f)$  und beweise also, daß

$$(1') \quad D(f) = G(f),$$

wo  $G(f)$  das geometrische Mittel von  $f(x)$  im Intervalle  $0 \leq x \leq 2\pi$  bedeutet, d. h.

$$G(f) = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(x) dx}$$

Dies geschieht folgendermaßen. Ich forme zuerst die Determinante (T) nach einer bekannten, von G. Landsberg\*) herrührenden Methode zu einem  $(n+1)$ -fachen Integrale um, welches von G. Pólya gefunden worden ist.\*\*\*) Dann beweise ich nach M. Fekete zunächst die Existenz von  $D(f)$ ; nachdem dieser Nachweis geliefert ist, werden die darauffolgenden Betrachtungen schon wesentlich einfacher. Darauf folgt, nach Ableitung eines formalen Satzes für die Determinante (T), der Beweis der Formel

$$D(\varphi) D\left(\frac{1}{\varphi}\right) = 1,$$

wo  $\varphi(x)$  ein positives trigonometrisches Polynom beliebiger Ordnung bedeutet. Endlich beweise ich die Behauptung (1') für trigonometrische Polynome beliebiger Ordnung; der Übergang zu beliebigen stetigen, nach  $2\pi$  periodischen, positiven Funktionen ist dann, auf Grund des bekannten Weierstraßschen Satzes, sehr leicht.

Ich erwähne schließlich, daß die Sätze (1) und (1<sup>bis</sup>) direkte Approximationsmethoden zur Berechnung bestimmter Integrale von der Form

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(x) dx$$

darbieten.

2. Es seien

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x), \\ \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$$

im Intervalle  $a \leq x \leq b$  gegebene reelle oder komplexe integrierbare

\*) G. Landsberg, *Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen* [Math. Ann. 69 (1910), S. 231].

\*\*) L'Intermédiaire des Mathématiciens. I. c.

Funktionen. Dann besagt der oben erwähnte, von G. Landsberg formulierte Satz, daß

$$(L) \quad \begin{vmatrix} \int_a^b f_1(x) \varphi_1(x) dx & \cdots & \int_a^b f_m(x) \varphi_1(x) dx \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b f_1(x) \varphi_m(x) dx & \cdots & \int_a^b f_m(x) \varphi_m(x) dx \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{m!} \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_m \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(x_1) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_1(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_m(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_m) \end{vmatrix} dx_1 dx_2 \cdots dx_m.$$

Setzt man in dieser Formel

$$\begin{aligned} m &= n + 1, \\ f_r(x) &= \frac{f(x)}{2\pi} e^{i(r-1)x}, \\ \varphi_r(x) &= e^{-i(r-1)x}, \\ x_r &= \vartheta_{r-1} \\ (r &= 1, 2, \dots, n + 1), \end{aligned}$$

so erhält man für die Determinante (T) folgenden Ausdruck:

$$D_n(f) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_{n+1} f(\vartheta_0) f(\vartheta_1) \cdots f(\vartheta_n) \Delta_{n+1}(e^{i\vartheta_0}, e^{i\vartheta_1}, \dots, e^{i\vartheta_n}) \\ \times \Delta_{n+1}(e^{-i\vartheta_0}, e^{-i\vartheta_1}, \dots, e^{-i\vartheta_n}) d\vartheta_0 d\vartheta_1 \cdots d\vartheta_n.$$

Hier — wie auch im folgenden — bezeichnet  $\Delta_n$  die Vandermondsche Determinante ihrer Argumente, d. h.

$$\Delta_n(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{\mu < \nu}^{1, \dots, n} (z_\nu - z_\mu).$$

Da

$$(e^{i\vartheta_\nu} - e^{i\vartheta_\mu})(e^{-i\vartheta_\nu} - e^{-i\vartheta_\mu}) = 2^2 \sin^2 \frac{\vartheta_\mu - \vartheta_\nu}{2}$$

ist, so folgt

$$(T^*) \quad D_n(f) = \frac{2^{n^2-1}}{(n+1)!} \frac{1}{\pi^{n+1}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}}_{n+1} f(\vartheta_0) f(\vartheta_1) \cdots f(\vartheta_n) \\ \times \prod_{\mu < \nu}^{0, \dots, n} \sin^2 \frac{\vartheta_\mu - \vartheta_\nu}{2} d\vartheta_0 d\vartheta_1 \cdots d\vartheta_n.$$

Aus dieser Formel kann ich zunächst unschwer eine obere und untere Grenze für  $D_n(f)$  gewinnen. Ist nämlich  $f(x) = 1$ , so folgt aus (T)

$$(2) \quad \frac{2^{n^2-1}}{(n+1)!} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \prod_{\mu < \nu} \sin^2 \frac{\vartheta_\mu - \vartheta_\nu}{2} d\vartheta_0 d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n = 1,$$

also, wenn  $m$  und  $M$  das Minimum bzw. Maximum von  $f(x)$  bezeichnen,

$$(3) \quad m^{n+1} \leq D_n(f) \leq M^{n+1}.$$

Es sei ferner  $g(x)$  eine ebensolche Funktion wie  $f(x)$  und ihr Minimum und Maximum sei  $\mu$  bzw.  $M$ . Dann folgt unmittelbar aus der Formel (T\*), daß

$$(4) \quad \mu^{n+1} D_n(f) \leq D_n(fg) \leq M^{n+1} D_n(f).$$

### 3. Der Beweis der Existenz von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n+1}(f)}{D_n(f)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_n(f)} = D(f)$$

läßt sich so ausführen. Es sei

$$A = |a_{\sigma\tau}| \quad (\sigma, \tau = 0, 1, 2, \dots, n)$$

eine beliebige Determinante  $(n+1)$ ter Ordnung, deren Minoren ich mit  $A_{\sigma\tau}$  bezeichnen will. Dann ist bekanntlich

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{rr} & A_{rs} \\ A_{rs} & A_{ss} \end{vmatrix} &= A \cdot A_{\{rs\}}, \\ (r, s &= 0, 1, 2, \dots, n; r \neq s), \end{aligned}$$

wo  $A_{\{rs\}}$  die Determinante  $(n-1)$ ter Ordnung bezeichnet, welche aus  $A$ , durch Streichen der  $r$  und  $s$ ten Zeilen bzw.  $r$  und  $s$ ten Spalten, hervorgeht. Wenn also  $A$  eine Hermitesche Determinante ist, d. h.  $a_{\sigma\tau} = \bar{a}_{\tau\sigma}$ , dann ist bekanntlich auch  $A_{\sigma\tau} = \bar{A}_{\tau\sigma}$ , so daß

$$A_{rr} \cdot A_{ss} - A \cdot A_{\{rs\}} = |A_{rs}|^2 \geq 0.$$

Ich wende dieses Resultat auf  $D_n(f)$  an, indem ich  $r = 0$ ,  $s = n$  setze. Dann wird

$$\begin{aligned} A_{rr} &= A_{00} = D_{n-1}(f), \\ A_{ss} &= A_{nn} = D_{n-1}(f), \\ A_{\{rs\}} &= A_{\{0n\}} = D_{n-2}(f), \end{aligned}$$

also

$$(5) \quad [D_{n-1}(f)]^2 - D_n(f) \cdot D_{n-2}(f) \geq 0$$

und daraus folgt, da, wie es aus (T\*) ersichtlich ist, die Determinanten  $D_n(f)$  sämtlich positiv ausfallen,

$$(6) \quad \frac{D_{n-1}(f)}{D_{n-2}(f)} \geq \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} > 0.$$

Die positiven Zahlen  $\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)}$  bilden also eine monoton abnehmende Folge, so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n+1}(f)}{D_n(f)}, \text{ also auch } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_n(f)}$$

existiert und einen gemeinsamen (nicht negativen) Wert  $D(f)$  hat, der nur von der Funktion  $f(x)$  abhängt und dessen Auswertung unser weiteres Ziel bildet.\*)

Aus der Ungleichung (3) folgt unmittelbar, daß

$$(3^{\text{bis}}) \quad m \leq D(f) \leq M,$$

daß also  $D(f)$  einen gewissen Mittelwert bedeutet. Ferner folgt aus (4)

$$(4^{\text{bis}}) \quad \mu D(f) \leq D(fg) \leq M D(f).$$

4. Es sei jetzt

$$(7) \quad f(x) \sim a_0 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \sin rx)$$

und

$$(8) \quad \varphi(x) = \alpha_0 + 2 \sum_{r=1}^k (\alpha_r \cos rx + \beta_r \sin rx).$$

Ferner sei

$$(9) \quad f(x) \varphi(x) \sim A_0 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} (A_r \cos rx + B_r \sin rx).$$

\*) Ich bemerke hier, daß nicht nur der Quotient  $\frac{D_{n+1}}{D_n}$  monoton zu seinem Grenzwerte strebt, sondern auch  $\sqrt[n]{D_n}$ , und zwar gleichfalls abnehmend. Es ist nämlich, wenn  $m > 1$ ,  $\log D_n$  positiv und

$$\begin{aligned} \log D_n - \log D_{n-1} &\geq \log D_{n+1} - \log D_n, \\ 2 \log D_n &\geq \log D_{n-1} + \log D_{n+1}. \end{aligned}$$

Ich setze  $b_n = \frac{\log D_n}{n}$ , so ist

$$\begin{aligned} 2n b_n &\geq (n-1)b_{n-1} + (n+1)b_{n+1}, \\ (n+1)(b_n - b_{n+1}) &\geq (n-1)(b_{n-1} - b_n). \end{aligned}$$

Wenn also  $b_{n-1} \geq b_n$ , so ist auch  $b_n \geq b_{n+1}$ . Man hat aber  $b_1 \geq b_2$ , da  $D_1^2 \geq D_2$ , also für jedes  $n$ :  $b_n \geq b_{n+1}$  und so  $\sqrt[n]{D_n} \geq \sqrt[n+1]{D_{n+1}}$ . Es ist ferner  $D_n^{n+1} \geq D_{n+1}^n$ , so daß  $D_n \geq \left(\frac{D_{n+1}}{D_n}\right)^n$ , also  $\sqrt[n]{D_n} \geq \frac{D_{n+1}}{D_n}$ .

Ich führe die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
 \cos x + i \sin x &= e^{ix} = z, \\
 a_r \pm i b_r &= c_{\pm r}, \\
 \alpha_r \pm i \beta_r &= \gamma_{\pm r}, \\
 A_r \pm i B_r &= C_{\pm r}.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

( $r = 0, 1, 2, \dots$ ;  $b_0 = \beta_0 = B_0 = 0$ ).

Dann ist

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{r=1}^{\infty} (c_r z^{-r} + c_{-r} z^r) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{c_r}{z^r}.$$

Ähnlich

$$\varphi(x) = \sum_{r=-k}^k \frac{\gamma_r}{z^r}$$

und

$$f(x) \varphi(x) \sim \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{C_r}{z^r}.$$

In der formellen Produktreihe von (7<sup>bis</sup>) und (8<sup>bis</sup>)

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{\mu=-k}^k \gamma_{\mu} c_{r-\mu}}{z^r}$$

und in der Reihe (9<sup>bis</sup>) haben nach einem bekannten Satz von Hurwitz die entsprechenden Glieder gleiche Koeffizienten, d. h.

$$\begin{aligned}
 C_r &= \sum_{\mu=-k}^k \gamma_{\mu} c_{r-\mu} \\
 (r &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

5. Mit Hilfe der Bezeichnungen (10) kann  $D_n(f)$  in der Form

$$D_n(f) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{-n} & c_{-(n-1)} & \cdots & c_0 \end{vmatrix}$$

geschrieben werden. Es sei jetzt  $n+1 > 2k$ . Ich bilde das Produkt  $D_n(f) \cdot D_{n-2k}(\varphi)$ . Zu diesem Zwecke lasse ich die Determinante  $D_n(f)$  in ihrer ursprünglichen Form (12), forme aber die Determinante  $D_{n-2k}(\varphi)$  von  $(n-2k+1)$ ter Ordnung in eine Determinante  $(n+1)$ ter Ordnung um

durch Hinzufügung von  $2k$  Zeilen bzw. Spalten mit geeigneten Elementen. Und zwar wenn

$$D_n(f) = |e_{\sigma,\tau}| \quad (\sigma, \tau = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$D_{n-2k}(\varphi) = |\gamma_{\sigma,\tau}| \quad (\sigma, \tau = 0, 1, 2, \dots, n),$$

so ist

$$e_{\sigma,\tau} = c_{\tau-\sigma},$$

$$(13) \quad f_{\sigma,\tau} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ für } 0 \leq \tau \leq k-1 \text{ und } n-k+1 \leq \tau \leq n, \begin{matrix} \text{wenn } \sigma = \tau \\ \text{wenn } \sigma \neq \tau; \end{matrix}$$

$$\gamma_{\tau-\sigma} \text{ für } k \leq \tau \leq n-k.$$

Ich multipliziere nun diese zwei Determinanten, indem ich Zeilen mit Spalten komponiere. Es sei die Produktdeterminante

$$|g_{\sigma,\tau}| \quad (\sigma, \tau = 0, 1, 2, \dots, n),$$

wo

$$g_{\sigma,\tau} = \sum_{\nu=0}^n e_{\sigma,\nu} f_{\nu,\tau}.$$

Ist

a)  $0 \leq \tau \leq k-1$ , so ist

$$g_{\sigma,\tau} = e_{\sigma,\tau} f_{\tau,\tau} = e_{\sigma,\tau} = c_{\tau-\sigma}.$$

b)  $n-k+1 \leq \tau \leq n$ , so ist wieder

$$g_{\sigma,\tau} = c_{\tau-\sigma}.$$

c) Ist endlich  $k \leq \tau \leq n-k$ , so wird

$$g_{\sigma,\tau} = \sum_{\nu=0}^n e_{\sigma,\nu} f_{\nu,\tau} = \sum_{\nu=0}^n c_{\nu-\sigma} \gamma_{\tau-\nu},$$

oder, da  $\gamma_m = 0$ , wenn  $|m| > k$ ,

$$g_{\sigma,\tau} = \sum_{\nu=\tau-k}^{\nu=\tau+k} c_{\nu-\sigma} \gamma_{\tau-\nu} = \sum_{\mu=-k}^k c_{\tau-\sigma-\mu} \gamma_{\mu},$$

also nach (11)

$$g_{\sigma,\tau} = C_{\tau-\sigma}.$$

Auf Grund der Vorhergehenden hat man also

$$(14) \quad D_n(f) D_{n-2k}(\varphi) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{k-1} & C_k & \cdots & C_{n-k} & c_{n-k+1} & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{k-2} & C_{k-1} & \cdots & C_{n-k-1} & c_{n-k} & \cdots & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{-n} & c_{-(n-1)} & \cdots & c_{-(n-k+1)} & C_{-(n-k)} & \cdots & C_{-k} & c_{-(k-1)} & \cdots & c_0 \end{vmatrix}.$$



6. Nun beweise ich mit Hilfe der Formel (14) den

Satz I. *Ist  $\varphi(x)$  ein positives trigonometrisches Polynom  $k^{\text{ter}}$  Ordnung, so ist*

$$(15) \quad D(\varphi) D\left(\frac{1}{\varphi}\right) = 1.$$

Setze ich nämlich in (14)  $f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ , so ist  $f(x)\varphi(x) = 1$ , also  $C_m = 0$ , wenn  $m \neq 0$  und  $C_0 = 1$ . Also

$$(16) \quad D_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) D_{n-2k}(\varphi) = \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_{k-1} & \vdots & 0 & \cdots & 0 & c_{n-k+1} & \cdots & c_n \\ \cdot & \cdots & \cdot & \vdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{-(k-1)} & \cdots & c_0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 & c_{n-2k+2} & \cdots & c_{n-k+1} \\ \hline c_{-k} & \cdots & c_{-1} & \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-2k+1} & \cdots & c_{n-k} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \vdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \vdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{-(n-k)} & \cdots & c_{-(n-2k+1)} & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_1 & \cdots & c_k \\ \hline c_{-(n-k+1)} & \cdots & c_{-(n-2k+2)} & \vdots & 0 & \cdots & 0 & c_0 & \cdots & c_{k-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \vdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{-n} & \cdots & c_{-(n-k+1)} & \vdots & 0 & \cdots & 0 & c_{-(k-1)} & \cdots & c_0 \end{vmatrix},$$

oder auf Grund des Laplaceschen Entwicklungssatzes:

$$(16^{\text{bis}}) \quad D_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) D_{n-2k}(\varphi) = \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_{k-1} & c_{n-k+1} & \cdots & c_n \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{-(k-1)} & \cdots & c_0 & c_{n-2k+2} & \cdots & c_{n-k+1} \\ c_{-(n-k+1)} & \cdots & c_{-(n-2k+2)} & c_0 & \cdots & c_{k-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{-n} & \cdots & c_{-(n-k+1)} & c_{-(k-1)} & \cdots & c_0 \end{vmatrix}.$$

Mit Hilfe des Riemannschen Lemma:  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  ergibt sich aus (16<sup>bis</sup>), daß<sup>\*)</sup>

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_n\left(\frac{1}{\varphi}\right) D_{n-2k}(\varphi) = \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_{k-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{-(k-1)} & \cdots & c_0 \end{vmatrix}^2 = \left[ D_{k-1}\left(\frac{1}{\varphi}\right) \right]^2 > 0$$

und daraus folgt der Satz I.

7. Ich beweise jetzt den

Satz II. *Ist  $\varphi(x)$  ein positives trigonometrisches Polynom  $k^{\text{ter}}$  Ordnung, so hat man*

$$(18) \quad D(\varphi) \geq G(\varphi),$$

<sup>\*)</sup> Dies ist eine Bemerkung von G. Pólya.

wo  $G(\varphi)$  das geometrische Mittel von  $\varphi(x)$  im Intervalle  $0 \leq x \leq 2\pi$  bedeutet.

Ich bewies diesen Satz zuerst in einer ziemlich langwierigen Weise, jedoch rein *elementar*, mittels des Determinantensatzes (14). Ich erhielt nämlich daraus durch Anwendung der Landsbergschen Umformung folgendes Resultat

$$D(f) D(\varphi) \leq D(f\varphi).$$

Nun gebrauchte ich einen leicht beweisbaren Hilfssatz, nach welchem jedes positive trigonometrische Polynom  $\varphi(x)$  sich als Produkt positiver trigonometrischer Polynome erster Ordnung darstellen läßt. Es wird also

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \varphi_2(x) \cdots \varphi_k(x),$$

wo  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$  positive trigonometrische Polynome erster Ordnung bezeichnen. Also bekomme ich, durch sukzessive Anwendung der vorigen Ungleichung

$$D(\varphi) \geq D(\varphi_1) D(\varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_k) \geq D(\varphi_1) D(\varphi_2) D(\varphi_3 \cdots \varphi_k) \geq \cdots \geq D(\varphi_1) D(\varphi_2) \cdots D(\varphi_k).$$

Für trigonometrische Polynome erster Ordnung ist aber die Behauptung (1') leicht zu verifizieren, so daß

$$D(\varphi) \geq G(\varphi_1) G(\varphi_2) \cdots G(\varphi_k) = G(\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_k) = G(\varphi).$$

Ich werde hier eine wesentlich einfachere, von M. Fekete herrührende Methode zur Ableitung des Satz II gebrauchen, die sich jedoch auf ein Resultat von O. Toeplitz und einen Determinantensatz von E. Fischer stützt.

Es ist bekannt, daß die als Zyklanten bezeichneten Determinanten

$$(19) \quad \begin{vmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & \cdots & d_{p-1} \\ d_{p-1} & d_0 & d_1 & \cdots & d_{p-2} \\ d_{p-2} & d_{p-1} & d_0 & \cdots & d_{p-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_0 \end{vmatrix},$$

wo  $d_0, d_1, \dots, d_{p-1}$  beliebige Größen bedeuten, in dieser Form darstellbar sind

$$(19 \text{ bis}) \quad \prod_{h=1}^p (d_0 + d_1 \varepsilon_h + d_2 \varepsilon_h^2 + \cdots + d_{p-1} \varepsilon_h^{p-1}),$$

wo  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$  die  $p^{\text{ten}}$  Einheitswurzeln bezeichnen. Es sei

$$(8) \quad \varphi(x) = \alpha_0 + 2 \sum_{r=1}^k (\alpha_r \cos rx + \beta_r \sin rx)$$

ein positives trigonometrisches Polynom  $k^{\text{ter}}$  Ordnung; ich bilde mit Herrn Toeplitz die Zyklante  $(2n+1)^{\text{ter}}$  Ordnung ( $n \geq k$ )

$$(20) \quad Z_n(\varphi) = \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n & \gamma_{-n} & \cdots & \gamma_{-2} & \gamma_{-1} \\ \gamma_{-1} & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \gamma_n & \cdots & \gamma_{-3} & \gamma_{-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \gamma_{-(n-1)} & \gamma_{-(n-2)} & \cdots & \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n & \gamma_{-n} \\ \gamma_{-n} & \gamma_{-(n-1)} & \cdots & \gamma_{-1} & \boxed{\gamma_0} & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ \gamma_n & \gamma_{-n} & \cdots & \gamma_{-2} & \gamma_{-1} & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{-n} & \gamma_{-(n-1)} & \gamma_{-(n-2)} & \cdots & \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n & \gamma_{-n} & \gamma_{-(n-1)} & \cdots & \gamma_{-1} & \gamma_0 \end{vmatrix},$$

wo die  $\gamma_n$  die Bedeutung (10) haben. Man hat dann nach (19<sup>bis</sup>)

$$Z_n(\varphi) = \prod_{h=1}^{2n+1} \varphi^* \left( e^{ih \frac{2\pi}{2n+1}} \right),$$

wenn

$$\varphi^*(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n + \gamma_{-n} z^{n+1} + \gamma_{-n+1} z^{n+2} + \cdots + \gamma_{-1} z^{2n}.$$

Es ist aber, wenn  $z$  eine  $(2n+1)^{\text{te}}$  Einheitswurzel bezeichnet,

$$z^{n+r} = z^{2n+1+r-n-1} = \frac{1}{z^{n-r+1}},$$

$$(r = 1, 2, \dots, n),$$

so daß für solche Werte von  $z$

$$\begin{aligned} \varphi^*(z) &= \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n + \frac{\gamma_{-n}}{z^n} + \frac{\gamma_{-n+1}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{\gamma_{-1}}{z} \\ &= \sum_{r=-k}^k \frac{\gamma_r}{z^r} \end{aligned}$$

und dies ist gleich  $\varphi(-x)$  (Ungl. (8<sup>bis</sup>)), wenn  $x$  das Argument von  $z$  bedeutet. Es ist also

$$(20^{\text{bis}}) \quad Z_n(\varphi) = \prod_{h=1}^{2n+1} \varphi \left( -h \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \right),$$

so daß

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{Z_n(\varphi)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2n+1} \sum_{h=1}^{2n+1} \log \varphi \left( -h \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \right)} = G(\varphi).$$

Ich wende jetzt auf die Zyklante  $Z_n(\varphi)$  einen Determinantensatz von E. Fischer\*) an, welcher folgendermaßen lautet:

Hilfssatz. Ist

$$\sum \pm b_{11} b_{22} \cdots b_{pp} = |b_{\sigma, \tau}| \quad (\sigma, \tau = 1, 2, \dots, p)$$

eine Hermitesche Determinante ( $b_{\sigma, \tau} = \bar{b}_{\tau, \sigma}$ ) und die Hermitesche Form

$$\sum_{\sigma, \tau=1}^p b_{\sigma, \tau} x_{\sigma} \bar{x}_{\tau}$$

definit positiv, so bestehen die Ungleichungen

$$\sum \pm b_{11} b_{22} \cdots b_{pp} \leq (\sum \pm b_{11} b_{22} \cdots b_{\rho\rho}) (\sum \pm b_{\rho+1, \rho+1} \cdots b_{pp})$$

$$(\rho = 1, 2, \dots, p-1).$$

In unserm Falle sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung  $Z_n(\varphi - \lambda) = 0$  die äquidistanten Ordinaten von  $\varphi(x)$ , so daß jene sämtlich positiv ausfallen und daraus folgt bekanntlich\*\*), daß die entsprechende Hermitesche Form definit positiv wird. Der Hilfssatz ist also anwendbar. Man hat  $p = 2n + 1$ , wählen wir ferner  $\rho = n + 1$ , dann wird

$$Z_n(\varphi) \leq D_n(\varphi) \cdot D_{n-1}(\varphi)$$

also

$$\sqrt[2n+1]{Z_n(\varphi)} \leq \sqrt[2n+1]{D_n(\varphi) \cdot D_{n-1}(\varphi)} = \left( \sqrt[2n+1]{D_n^n D_{n-1}^n} \right)^{\frac{2n}{2n+1}}$$

und daraus folgt, daß

$$G(\varphi) \leq D(\varphi).$$

8. Ich beweise jetzt den

Satz II\*. Ist  $f(x)$  eine stetige, nach  $2\pi$  periodische, positive Funktion, so ist  
(18<sup>bis</sup>)  $D(f) \geq G(f)$ .

Es sei  $\varepsilon$  eine beliebige positive Zahl, dann läßt sich nach dem bekannten Satz von Weierstraß ein trigonometrisches Polynom  $k^{\text{ter}}$  Ordnung  $\varphi(x)$  finden, so daß gleichmäßig

$$1 - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Ich setze nun in den Ungleichungen (4<sup>bis</sup>)  $\varphi(x)$  und  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  statt  $f(x)$  und  $g(x)$ , so wird

$$(1 - \varepsilon) D(\varphi) \leq D(f) \leq (1 + \varepsilon) D(\varphi),$$

\*) Archiv der Math. und Physik 13 (1908), S. 36, Satz III.

\*\*) S. z. B. G. Kowalewaki, *Einführung in die Determinantentheorie* (Leipzig, Veit & Comp.) (1909), S. 233, § 118

also

$$D(f) \geq (1 - \varepsilon) D(\varphi) \geq (1 - \varepsilon) G(\varphi).$$

Ferner

$$G(\varphi) = G(f) G\left(\frac{\varphi}{f}\right) \geq G(f) \text{Min.} \left(\frac{\varphi}{f}\right) \geq \frac{G(f)}{1 + \varepsilon},$$

so daß

$$D(f) \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} G(f).$$

Daraus folgt, da  $\varepsilon$  beliebig klein ist

$$D(f) \geq G(f).$$

Ich setze jetzt  $f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ . Dann wird

$$D\left(\frac{1}{\varphi}\right) \geq G\left(\frac{1}{\varphi}\right).$$

Es ist aber nach Satz I

$$D\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{1}{D(\varphi)},$$

ferner

$$G\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{1}{G(\varphi)},$$

also

$$\frac{1}{D(\varphi)} \geq \frac{1}{G(\varphi)}$$

und so

$$D(\varphi) \leq G(\varphi).$$

Daraus und aus (18) folgt, daß

$$(22) \quad D(\varphi) = G(\varphi).$$

Damit ist die Behauptung (1') für positive trigonometrische Polynome beliebiger Ordnung bewiesen.\*)

9. Es sei endlich  $f(x)$  eine stetige, nach  $2\pi$  periodische, positive Funktion und  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive Zahl. Nach den vorigen läßt sich ein trigonometrisches Polynom  $\varphi(x)$  finden, so daß

$$(1 - \varepsilon) D(\varphi) \leq D(f) \leq (1 + \varepsilon) D(\varphi),$$

\*) Ich erwähne hier, daß Herr M. Fekete auch einen direkten Beweis von (22) gefunden hat, der sich auf die folgenden Tatsachen stützt:

1. Es sei  $a_{rs} = \bar{a}_{rs}$ ,  $\varepsilon_{rs} = 1$  oder  $0$ , je nachdem  $r = s$  oder  $r \neq s$ , und

$$S_\nu(x) = |a_{rs} - \varepsilon_{rs} x| \quad (r, s = 1, \dots, \nu) \\ (\nu = 1, 2, \dots).$$

Dann werden die Wurzeln der säkularen Gleichung  $S_{\nu+1}(x) = 0$  durch die von  $S_\nu(x) = 0$  getrennt.

2. Für das trigonometrische Polynom  $\varphi(x)$  von der Ordnung  $k$  stimmen die Abschnittsdeterminanten der Zyklante  $Z_n(\varphi)$ , abgesehen von den  $k$  letzten, mit

$$D_0(\varphi), D_1(\varphi), D_2(\varphi), \dots$$

überein.

also nach (22)

$$(1 - \varepsilon) G(\varphi) \leq D(f) \leq (1 + \varepsilon) G(\varphi),$$

$$(1 - \varepsilon) G\left(\frac{\varphi}{f}\right) G(f) \leq D(f) \leq (1 + \varepsilon) G\left(\frac{\varphi}{f}\right) G(f),$$

$$\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} G(f) \leq D(f) \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} G(f).$$

Es ist aber  $\varepsilon$  beliebig klein, so daß

$$(23) \quad D(f) = G(f),$$

womit unsere Behauptung in allen Teilen bewiesen ist.\*)

---

\*) Während der Korrektur dieser Arbeit hat mir Herr G. Pólya mitgeteilt, daß der Satz sogar für beliebige, im Riemannschen Sinne integrierbare positive Funktionen in Gültigkeit bleibt.