 INTORNO AD ALCUNI TEOREMI SUI MOTI ELASTICI.

Nota di PIETRO ALIBRANDI.

Mi propongo giungere rapidamente, e da un punto di vista alquanto differente dall'usuale, ad alcune note proposizioni della teoria dell'elasticità.

Fatta eccezione pel numero π , con minuscola greca indicherò sempre un vettore.

Chiamerò ξ , η , ζ i vettori fondamentali o coordinati, ortogonali.

Indicherò generalmente con lettere latine quantità scalari; con maiuscole greche quantità che possono essere indifferentemente scalari o vettori.

Un prodotto scalare di due vettori o di scalare per vettore con l'ordinaria notazione algebrica.

Il prodotto vettoriale di α per β con $[\alpha \beta]$.

Userò poi le abbreviazioni

$$\Delta_z \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2},$$

$$\nabla \Omega = \xi \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$

$$\text{rot } \alpha = \xi \left(\zeta \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \eta \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) + \eta \left(\xi \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \zeta \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + \zeta \left(\eta \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \xi \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right).$$

Δ_m , ∇_m , rot_m indicheranno l'operazione Δ_z , ∇ o rot applicata m volte.

Siano ora:

K lo spazio o campo occupato da un corpo elastico, omogeneo ed isotropo, vibrante;

$\sigma(P, t)$ lo spostamento elastico nel punto arbitrario $P(x, y, z)$ di K ed all'epoca t :

a , b , le due costanti dell'isotropia.

L'equazione vettoriale del moto si può scrivere

$$(1) \quad b^2 \Delta_2 \sigma + (a^2 - b^2) \nabla_2 \sigma = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2},$$

oppure sotto l'altra forma

$$(2) \quad a^2 \Delta_2 \sigma + (a^2 - b^2) \operatorname{rot}_2 \sigma = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}.$$

Poichè

$$\nabla \operatorname{rot}_2 \sigma = \operatorname{rot} \nabla_2 \sigma = 0,$$

operando sulla (1) per rot e sulla (2) per ∇ , se ne ha

$$(3) \quad b^2 \Delta_2 \operatorname{rot} \sigma = \frac{\partial^2 \operatorname{rot} \sigma}{\partial t^2}$$

$$(4) \quad a^2 \Delta_2 \nabla \sigma = \frac{\partial^2 \nabla \sigma}{\partial t^2},$$

o, fatto più brevemente ancora

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_2 = D_a, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} - b^2 \Delta_2 = D_b,$$

$$D_a \nabla \sigma = 0, \quad D_b \operatorname{rot} \sigma = 0.$$

Esse sono le equazioni canoniche dei piccoli moti, e se ne deduce notoriamente che $\nabla \sigma$ (la condensazione) e $\operatorname{rot} \sigma$ (la doppia rotazione) si propagano per onde sferiche, l'una con la velocità a , l'altra con la velocità b .

Rappresenti dK un intorno a tre dimensioni d'un punto variabile Q e sia

$$\operatorname{mod} (P - Q) = r.$$

Da una nota formola di Poisson, subito estensibile anche a funzioni vettoriali, risulta che, se Ω è una funzione regolare qualunque, si ha identicamente

$$\Delta_2 \left(\Omega + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta_2 \Omega \cdot dK}{r} \right) = 0,$$

dove è bene inteso che, mentre esternamente all'integrale il risultato dell'operazione Δ_2 è una certa funzione $\Phi(P, t)$, internamente rappresenta $\Phi(Q, t)$.

E quindi, chiamando Ω_0 una certa funzione armonica, sarà

$$(5) \quad \Omega = \Omega_0 - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta_2 \Omega}{r} dK.$$

Ora supponiamo conosciuti gli spostamenti elastici σ . Detto inoltre α un vettore armonico, per ora indeterminato, poniamo

$$(6) \quad \omega = \alpha - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma(Q, t)}{r} dK$$

e perciò

$$(7) \quad \sigma(P, t) = \Delta_2 \omega.$$

Intanto per un'altra formola, dovuta a Maxwell, ed applicabile ad un vettore ω di campo qualunque, sappiamo che

$$(8) \quad \Delta_2 \omega = \nabla_2 \omega - \text{rot}_2 \omega.$$

Quindi sarà

$$(9) \quad \sigma = \nabla_2 \omega - \text{rot}_2 \omega.$$

La rot del primo termine a destra e la ∇ del secondo sono nulle. Perciò σ si può scomporre in due altri spostamenti

$$(10) \quad \sigma' = \nabla_2 \omega, \quad \sigma'' = -\text{rot}_2 \omega,$$

il primo privo di rotazione, il secondo di condensazione. E si ha

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \sigma = \nabla \sigma' = \nabla_3 \omega = \Delta_2 \nabla \omega, \\ \text{rot } \sigma = \text{rot } \sigma'' = -\text{rot}_3 \omega = \Delta_2 \text{rot } \omega, \end{array} \right.$$

(la quale ultima si ottiene da (8) cambiando ω in $\text{rot } \omega$). In altri termini, i parametri differenziali di secondo ordine di $\nabla \omega$ e di $\text{rot } \omega$ danno la condensazione e la doppia rotazione.

Si effettui in (2) la indicata decomposizione

$$\sigma = \sigma' + \sigma''.$$

Si avrà

$$a^2 \Delta_2 \sigma' + a^2 \Delta_2 \sigma'' + (a^2 - b^2) \text{rot}_2 \sigma'' = \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \sigma''}{\partial t^2}.$$

Ma poichè $\nabla \sigma'' = 0$, si ha

$$\operatorname{rot}_2 \sigma'' = -\Delta_2 \sigma''.$$

Dunque

$$a^2 \Delta_2 \sigma' - \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial t^2} + b^2 \Delta_2 \sigma'' - \frac{\partial^2 \sigma''}{\partial t^2} = 0,$$

ovvero, per le (10):

$$(12) \quad \nabla \left(a^2 \Delta_2 \nabla \omega - \frac{\partial^2 \nabla \omega}{\partial t^2} \right) + \operatorname{rot} \left(b^2 \Delta_2 \operatorname{rot} \omega - \frac{\partial^2 \operatorname{rot} \omega}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Ciò posto, chiamiamo D un operatore differenziale lineare della forma

$$D = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma \frac{\partial}{\partial z} + E \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots$$

dove A, B, Γ , E, ... sono tutti scalari o tutti vettori. Nel primo caso il risultato dell'operazione sarà scalare o vettore, nell'altro vettore o scalare, a seconda che scalare o vettore è la funzione a cui D viene applicato.

Cambiamo nella (5) Ω in D ω . Lasciando il simbolo Ω_0 ad indicare una certa funzione armonica, avremo

$$D \omega = \Omega_0 - \frac{1}{4\pi} \int \frac{D \Delta_2 \omega \cdot dK}{r}$$

ossia, per (6):

$$D \omega = \Omega_0 - \frac{1}{4\pi} \int \frac{D \sigma \cdot dK}{r}.$$

Ma da (6) stessa si ha

$$D \omega = D\alpha - \frac{1}{4\pi} D \int \frac{\sigma dK}{r},$$

dunque

$$D \int \frac{\sigma dK}{r} = \int \frac{D \sigma \cdot dK}{r} + 4\pi (D\alpha - \Omega_0).$$

In altre parole, salvo l'aggiunta di una determinata funzione armonica al risultato, l'operazione D sull'integrale $\int \frac{\sigma dK}{r}$ si può fare soltanto su σ , sotto il segno d'integrazione.

È quasi superfluo osservare che se D contiene soltanto derivate rispetto a t , l'aggiunta della funzione armonica non ha luogo.

Ritorniamo ora alla

$$(6) \quad \omega = \alpha - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma dK}{r},$$

ed operiamovi per rot . Giusta il detto or ora, chiamando β ancora una funzione armonica, avremo

$$(13) \quad \text{rot } \omega = \text{rot } \alpha - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot } \sigma \cdot dK}{r} + \beta.$$

Operando qui per Δ_2 si avrà, con $\Delta_2 \gamma = 0$:

$$(14) \quad \Delta_2 \text{rot } \omega = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta_2 \text{rot } \sigma \cdot dK}{r} + \gamma.$$

Questa, attesa la (3), diviene

$$\Delta_2 \text{rot } \omega = -\frac{1}{4\pi b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\text{rot } \sigma dK}{r} + \gamma;$$

e sostituendo il valore dell'integrale tratto da (13):

$$\Delta_2 \text{rot } \omega = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{rot } \omega - \text{rot } \alpha - \beta) + \gamma,$$

esprimibile anche così

$$(15) \quad \Delta_2 \text{rot } \omega = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\text{rot } \omega - \text{rot } \alpha - \beta + b^2 \iint \gamma d t^2).$$

Adesso disponiamo di $\text{rot } \alpha$ per modo che sulla superficie s contorno di K si abbia

$$-\text{rot } \alpha - \beta + b^2 \iint \gamma d t^2 = 0.$$

Il primo membro essendo armonico, sarà nullo in tutto K , cioè si avrà la condizione

$$(16) \quad \text{rot } \alpha = b^2 \iint \gamma d t^2 - \beta \quad \text{in } K.$$

Prima di procedere è interessante constatare se

$$\nabla (b^2 \iint \gamma \, d t^2 - \beta) = 0 ,$$

come esige l'ultima equazione (16), operandovi per ∇ .

Operando per ∇ su (13) si ha

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \int \frac{\text{rot } \sigma \, d \mathbf{K}}{r} = \nabla \beta .$$

Ma, mediante le note trasformazioni di integrali di spazio in integrali di superficie, si troverà facilmente che, espresso con ν un vettore unitario normale ad un elemento ds di s , si ha

$$\int \frac{\text{rot } \sigma \, d \mathbf{K}}{r} = \int [\sigma \nu] \frac{ds}{r} + \text{rot} \int \frac{\sigma \, d \mathbf{K}}{r} ,$$

dalla quale consegue

$$\begin{aligned} \nabla \int \frac{\text{rot } \sigma \, d \mathbf{K}}{r} &= \nabla \int [\sigma \nu] \frac{ds}{r} \\ &= - \int [\sigma \nu] \nabla \frac{1}{r} \cdot ds = - \int [\sigma \nu] \nu \frac{d \frac{1}{r}}{dn} ds \end{aligned}$$

(dn = elemento scalare di normale). Ma $[\sigma \nu] \nu = 0$; dunque

$$\nabla \int \frac{\text{rot } \sigma \, d \mathbf{K}}{r} = 0 .$$

Sicchè $\nabla \beta = 0$.

Uguualmente si troverebbe che

$$\nabla \int \frac{\Delta_2 \text{rot } \sigma \cdot d \mathbf{K}}{r} = \nabla \int \frac{\text{rot } \Delta_2 \sigma \cdot d \mathbf{K}}{r} = 0 ,$$

dalla quale e da (14) emerge $\nabla \gamma = 0$.

Dunque effettivamente

$$\nabla (b^2 \iint \gamma \, d t^2 - \delta) = b^2 \iint \nabla \gamma \, d t^2 - \nabla \delta = 0 .$$

Stabilite (15) e (16), se ne ha

$$(17) \quad \Delta_2 \operatorname{rot} \omega - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \operatorname{rot} \omega}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ovvero} \quad D_b \operatorname{rot} \omega = 0.$$

E di qui e da (12):

$$(18) \quad \nabla (D_a \nabla \omega) = 0.$$

Intanto questa importa che

$$D_a \nabla_2 \omega = D_a \sigma' = 0,$$

e quindi che altresì

$$D_b \sigma'' = 0$$

ricavabile anche da (17).

L'integrazione immediata di (18) darebbe

$$(19) \quad D_a \nabla \omega = f(t).$$

Ma è facile vedere che quest'ultima funzione si può perfettamente omettere, ritenendola inclusa in $\nabla \omega$. E invero α non resta completamente determinata da (16). Se α' è una soluzione, ne avremo un'altra aggiungendo ad α' un vettore armonico la cui rot sia nulla.

Per esempio, essendo ρ il vettore individuante il punto P, cioè

$$\rho = \xi x + \eta y + \zeta z,$$

si ha

$$\Delta_2 \rho = 0, \quad \operatorname{rot} \rho = 0, \quad \nabla \rho = 3.$$

Potremo così porre

$$\alpha = \alpha' + \rho F(t), \text{ con } F \text{ funzione arbitraria.}$$

Dunque, chiamata ω' la soluzione

$$\omega' = \alpha' - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sigma dK}{r},$$

per la quale il secondo membro della

$$(20) \quad D_a \nabla \omega' = f(t)$$

resta determinato, ne avremo un'altra più generale facendo

$$\omega = \omega' + \rho F(t),$$

dalla quale si ha

$$\begin{aligned} \nabla \omega &= \nabla \omega' + 3 F(t) \\ \Delta_2 \nabla \omega &= \Delta_2 \nabla \omega', \quad \frac{\partial^2 \nabla \omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \nabla \omega'}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Ora (20) si può scrivere

$$D_a \nabla \left(\omega' - \frac{\rho}{3} \iint r \, d t^2 \right) = 0.$$

Basterà dunque far la funzione arbitraria

$$F(t) = \frac{-1}{3} \iint r \, d t^2$$

affinchè (19) si riduca alla

$$D_a \nabla \omega = 0.$$

Concludendo, lo spostamento (σ') senza rotazione e lo spostamento (σ) senza condensazione seguono nel propagarsi le stesse leggi racchiuse nelle (3) e (4) relative alla rotazione e alla condensazione. Ma di più esiste un vettore ω della forma (6), legato con σ dalla $\Delta_1 \omega = \sigma$, ed i cui ∇ e rot soddisfanno a loro volta alle $D_a = 0$, $D_b = 0$, rispettivamente.