Ueber einen Satz von Hilbert.

Von

P. GORDAN in Erlangen.

Vorrede.

Das System einer Form:

$$f = \sum_{x=0}^{x=q} \alpha_q x_1^2 x_2^2 \dots$$

besteht aus Invarianten:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots$$

aus welchen sich die übrigen ganz und rational darstellen lassen

Herr Hilbert hat im Bd. 36 der Math. Annalen gezeigt, dass es für jede Form f Systeme giebt, welche eine *endliche* Anzahl von Invarianten umfassen.

Seine Untersuchung zerfällt in 2 Theile.

Im ersten Theile wird für die Invarianten Φ von f eine Formel aufgestellt:

$$(1) \quad \Phi = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2, \dots$$

in welcher die A ganze rationale Functionen der Coefficienten α_x bedeuten, und im 2^{ten} Theile wird hieraus eine Formel:

$$(2) \quad \Phi = B_1 \varphi_1 + B_2 \varphi_2 \dots$$

abgeleitet, in welcher die B Invarianten von f sind.

Aus F. (2) folgt unmittelbar, dass die Invarianten φ das System von f bilden.

Der wesentlichste Theil seiner Untersuchung beruht meines Erachtens in F. (1); ich will sie deshalb den Hilbert'schen Satz nennen. Der Beweis, welchen Herr Hilbert gegeben hat, ist materiell ganz richtig; jedoch empfand ich in seinen Ausführungen insofern eine Lücke, als er sich damit begnügte die Existenz der φ nachzuweisen und darauf verzichtete, ihre Eigenschaften zu erörtern.

Um diese Lücke auszufüllen, gebe ich im Folgenden einen etwas andern Beweis, von dem ich ausdrücklich bemerke, dass er mir nicht

gelungen wäre, wenn nicht Herr Hilbert einige Begriffe in der Invariantentheorie verwerthet hätte, welche von den Herren Dedekind, Kronecker und Weber in andern Theilen der Algebra entwickelt worden sind.

Mein Beweis besteht darin, dass ich Normalformen für die Invarianten aufstelle, deren Charaktere:

$$h_1, h_2 \dots h_m$$

ganze positive Zahlen (0 inbegriffen) sind, welche folgende Eigenschaften besitzen:

$$1. \quad m \leq \varrho.$$

2. Zwei verschiedene Normalformen können nicht in den Charakteren:

$$h_1, h_2 \dots h_{m-1}$$

übereinstimmen.

3. Hat eine Normalform ϑ , die Charaktere:

$$\kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{m+1},$$

so giebt es eine andere Normalform ϑ_μ , deren Charaktere:

$$h_1, h_2 \dots h_m$$

die Relationen befriedigen:

$$h_1 = \kappa_1, \quad h_2 = \kappa_2 \dots h_{m-1} = \kappa_{m-1},$$

$$\kappa_m < h_m \leq \kappa_m + \kappa_{m+1}.$$

Diese Eigenschaften genügen, um eine obere Grenze für die Anzahl v_ϱ der Normalformen ϑ , festzustellen.

Berechnet man nämlich aus ihren Graden:

$$p_1, p_2$$

mittels der Formeln

$$p_{v,1} = p_1; \quad p_{\varrho,v} = p_v; \quad u_1 = p_1,$$

$$p_{v,s} = p_{v-1,t} \quad \text{wo} \quad t = s + \sum_{\nu=1}^{v=s-1} p_{\nu,s},$$

$$u_v = 1 + \sum_{x=1}^{x=u_{v-1}} p_{\varrho-v+1,x}$$

Zahlen $p_{v,s}$ und u , so ist:

$$u_\varrho = v_\varrho.$$

Aus denjenigen Invarianten φ_v , welche Normalformen besitzen, lassen sich die übrigen mittelst der ersten Hilbert'schen Formel darstellen; diese φ_v bilden also das System von f . Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl v_ϱ der Normalformen.

§ 1.

Der Aronhold'sche Process.

Um die Invarianten φ einer Form:

$$f = \sum_{x=1}^{x=q} a_x x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots$$

mit beliebig vielen Variablen zu untersuchen, ist es häufig vortheilhaft, sofort die simultanen Invarianten ψ einer beliebigen Anzahl solcher Formen gleichen Grades:

$$f, f_1, f_2 \dots$$

in Betracht zu ziehen. Wir wollen annehmen, dass die Coefficienten dieser Formen willkürlich (variabel) sind; die Anzahl der Coefficienten in f will ich durch q und die Coefficienten einer beliebigen der weiteren Formen etwa f_m , deren Anzahl selbstverständlich gleichfalls q ist, durch b bezeichnen.

Einer der wichtigsten Processes in der Theorie der Invarianten ist der Aronhold'sche Process; durch ihn sind wir im Stande aus einer simultanen Invariante ψ eine Reihe weiterer solcher Invarianten zu bilden. Ich will jedoch hier diesen Process nicht in seiner vollen Allgemeinheit verwerthen, sondern mich auf solche Anwendungen beschränken, welche in der Formel enthalten sind:

$$\delta_m \psi = \frac{1}{h} \sum_{x=1}^{x=q} \frac{\partial \psi}{\partial u_q} b_q,$$

wo h den Grad von ψ in den Coefficienten von f bedeutet.

Man sieht, dass man durch den Aronhold'schen Process aus der simultanen Invariante ψ eine weitere $\delta_m \psi$ erzeugt hat, welche um einen Grad niedriger in den Coefficienten von f ist. Durch Wiederholung des Processes δ_m kann man weitere simultane Invarianten ableiten, die ich durch:

$$\delta_m^2; \delta_m^3 \dots$$

bezeichnen will; sie haben immer niedrigere Grade in den Coefficienten von f . Jedenfalls ist:

$$\delta_m^h \psi$$

von den Coefficienten von f unabhängig und:

$$\delta_m^{h+1} \psi = 0.$$

Enthält die Invariante ψ die Coefficienten b von f_m nicht, so ist:

$$\delta_m^h \psi \geq 0;$$

anderen Falles ist es möglich, dass schon für niedrigere Exponenten

$$\kappa < h + 1,$$

$$\delta_m^\kappa \psi = 0$$

ist.

Man kann aber auch die andern f_κ beim Aronhold'schen Prozesse benutzen. Die Form, welche ich aus ψ erhalte, wenn ich zuerst h_1 Male die Operation δ_1 , sodann h_2 Male die Operation δ_2 , schliesslich h_m Male die Operation δ_m anwende, will ich durch:

$$U = \delta_m^{h_m} \delta_{m-1}^{h_{m-1}} \dots \delta_1^{h_1} \psi$$

bezeichnen. Ist dann:

$$h_1 + h_2 \dots h_m = h,$$

so ist U von den Coefficienten von f unabhängig und ist:

$$h_1 + h_2 \dots h_m > h,$$

so verschwindet U . —

§ 2.

Die Charaktere.

Wie schon in § 1 bemerkt wurde, kann es bei besonderer Wahl der Invariante ψ vorkommen, dass man ein verschwindendes Resultat erhält, wenn man den Aronhold'schen Process auch weniger oft als $h + 1$ mal anwendet, wenn also:

$$h_1 + h_2 \dots h_m < h + 1$$

ist. Diese Bemerkung liefert uns ein wichtiges Eintheilungsprincip für die simultanen Invarianten ψ .

Genügt ψ den Formeln

$$\delta_1^{h_1+1} \psi = 0; \quad \delta_2^{h_2+1} \delta_1^{h_1} \psi = 0 \dots \delta_m^{h_m+1} \delta_{m-1}^{h_{m-1}} \dots \delta_1^{h_1} \psi = 0;$$

$$\delta_1^{h_1} \psi \geq 0; \quad \delta_2^{h_2} \delta_1^{h_1} \psi \geq 0 \dots \delta_m^{h_m} \delta_{m-1}^{h_{m-1}} \dots \delta_1^{h_1} \psi \geq 0;$$

und ist:

$$h_1 + h_2 \dots h_m = h;$$

$$h_m > 0,$$

so nenne ich $h_1 \dots h_m$ die Charaktere von ψ .

Von denselben kann man leicht nachweisen, dass ihre Anzahl

$$m \leq \varrho$$

ist, dass also, wenn ψ die Charaktere besitzt:

$$h_1, h_2 \dots h_\varrho$$

bereits die Summe:

$$h_1 + h_2 \dots h_\varrho = h$$

ist, also keine weiteren Charaktere hinzutreten können. Es folgt diess daraus, dass in diesem Falle die Invariante:

$$\psi = \delta_\varrho^{h_\varrho} \delta_{\varrho-1}^{h_{\varrho-1}} \dots \delta_1^{h_1} \psi$$

den Relationen genügt:

$$\delta_1 \Psi = \delta_2 \Psi \dots \delta_\varrho \Psi = 0,$$

welche zeigen, dass Ψ die Coefficienten von f nicht enthält. Man kann die Charaktere dazu benutzen, um die simultanen Invarianten ψ in Classen einzutheilen. Hat ψ keine Charaktere:

$$h_{m+1}, h_{m+2}, \dots,$$

so rechne ich sie in die m^{te} Classe. Bei dieser Eintheilung enthält jede höhere Classe die simultanen Invarianten aller niedrigeren Classen ebenfalls und die ϱ^{te} Classe *alle diese Formen* überhaupt.

§ 3.

Reduction der simultanen Invarianten.

Haben die simultanen Invarianten ψ und ϑ die Charaktere:

$$h_1, h_2 \dots h_m,$$

$$\kappa_1, \kappa_2 \dots$$

und ist die erste nicht verschwindende Zahl unter den Differenzen:

$$h_1 - \kappa_1, h_2 - \kappa_2 \dots$$

positiv, so sage ich: ψ besitzt höhere Charaktere als ϑ . Dieser Fall wird stets dann und nur dann eintreten, wenn

$$\delta_m^{h_m} \delta_{m-1}^{h_{m-1}} \dots \delta_1^{h_1} \psi = 0$$

ist.

Es kann dann vorkommen, dass ein Aggregat:

$$\chi = A\psi + B\vartheta,$$

worin A und B simultane Invarianten der f sind, ebenfalls niedrigere Charaktere als ψ besitzt. Enthält dann insbesondere A die Coefficienten von f nicht, so nenne ich diese Formel eine Reduction von ψ mittelst ϑ . Die reducirte Form χ hat dann in den Coefficienten von f denselben Grad, wie ψ .

So lässt sich z. B. jede der Invarianten φ_ν vom Grade p_ν mittelst jeder andern φ_μ , deren Grad $p_\mu \leq p_\nu$ ist, reduzieren; beide besitzen nur je 1 Charakter $p_\nu + 1$ und $p_\mu + 1$. Das Aggregat:

$$\chi = \varphi_\nu \delta_1^{p_\mu} \varphi_\mu - \varphi_\mu \delta_1^{p_\nu} \varphi_\nu$$

genügt der Relation:

$$\delta_1^{p_\mu} \chi = 0,$$

hat daher niedrigere Charaktere als φ_v und kann als eine reducirte Form von φ_v angesehen werden. Reducirte Formen χ lassen sich im Allgemeinen weiter reduciren; man kann zur ferneren Reduction alle Formen φ von nicht höheren als dem von φ_v , sowie Aggregate derselben benutzen.

Durch solche Reductionen erhält man von φ_v ausgehend eine Reihe von Formen:

$$\chi_1, \chi_2, \dots$$

von denen eine jede niedrigere Charaktere besitzt als die vorhergehenden und welche sämmtlich den Grad p_v in den Coefficienten von f besitzen. Alle diese Formen sind zu φ_v gehörige Aggregate:

$$\vartheta = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 \dots A_v \varphi_v.$$

ϑ sowohl selbst als auch die Coefficienten A sind simultane Invarianten der f ; insbesondere enthält $A_v \geq 0$ die Coefficienten von f nicht.

Wenn auch, wie oben erwähnt, jedes folgende χ bei diesem Verfahren niedrigere Charaktere besitzt, als das vorhergehende, so liegt doch kein Grund vor, dass wir hierdurch zu solchen Aggregaten ϑ gelangen, welche möglichst niedrige Charaktere besitzen. Diess liegt keineswegs in unserer Absicht; wir begnügen uns vielmehr damit, gewisse Reductionen auszuführen.

§ 4.

Bildung der Normalformen.

Die Invarianten von f

$$\varphi_1; \varphi_2$$

mögen nach ihren Graden p_v so geordnet werden, dass stets:

$$p_{v+1} \geq p_v$$

ist.

Unter den zu ihnen gehörigen Aggregaten ϑ , welche im § 3 definirt sind, will ich gewisse auswählen, welche ich durch:

$$\vartheta_1, \vartheta_2$$

bezeichne und die Normalformen von:

$$\varphi_1, \varphi_2 \dots$$

nenne. Zu φ_1 möge diese Invariante selbst als Normalform gehören; also:

$$\varphi_1 = \vartheta_1$$

sein.

Die übrigen werden durch ein sogleich näher zu erläuterndes Reduktionsverfahren hergestellt. Hierbei sollen die Normalformen der Reihe nach gebildet werden und bei Berechnung von ϑ , die früheren;

$$\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_{r-1}$$

benutzt werden.

Unser Verfahren besteht in einer Reihe von Reductionen; von einer Invariante φ , ausgehend liefern dieselben eine Reihe simultaner Invarianten:

$$\eta_1, \eta_2 \dots$$

der Art, dass η_λ stets höhere Charaktere besitzt als $\eta_{\lambda+1}$. Hat η_λ die Charaktere

$$\kappa_1, \kappa_2, \dots,$$

so untersuche ich die Charaktere der Normalformen:

$$\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_{r-1}$$

der Reihe nach so lange, bis ich auf eine Form ϑ_μ stosse, deren Charaktere:

$$h_1, h_2 \dots h_m$$

den Relationen genügen:

$$h_1 = \kappa_1; \quad h_2 = \kappa_2 \dots h_{m-1} = \kappa_{m-1}; \quad h_m \leq \kappa_m.$$

Eine solche Form möge Reducent heissen und in folgender Weise zur Reduction von η_λ also zur Bestimmung von $\eta_{\lambda+1}$ Verwendung finden.

Zunächst bilde ich die beiden nicht verschwindenden Formen:

$$\delta_{m-1}^{h_{m-1}} \delta_{m-2}^{h_{m-2}} \dots \delta_1^{h_1} \vartheta_\mu = \Theta,$$

$$\delta_{m-1}^{h_{m-1}} \delta_{m-2}^{h_{m-2}} \dots \delta_1^{h_1} \eta_\lambda = H.$$

Die erstere derselben Θ genügt der Formel:

$$\delta_m^{h_m+1} \Theta = 0,$$

welche zeigt, dass der Ausdruck:

$$P = \delta_m^{h_m} \Theta \geq 0$$

nicht von den Coefficienten von f abhängt. Es besteht dann die Formel:

$$\delta_m^{h_m} (PH - \Theta \delta_m^{h_m} H) = 0$$

und ich wähle als $\eta_{\lambda+1}$ das Aggregat:

$$\eta_{\lambda+1} = PH - \vartheta_\mu \delta_m^{h_m} H,$$

welches der Formel genügt:

$$\delta_m^{h_m} \delta_{m-1}^{h_{m-1}} \dots \delta_\lambda^{h_\lambda} \eta_{\lambda+1} = 0,$$

also in der That niedrigere Charaktere besitzt als η_λ . —

Es kann auch bei gewissen φ der Fall eintreten, dass die Reihe der η mit einer verschwindenden Form schliesst; es hat dann η keine Normalform und wird aus der obigen Reihe ausgeschaltet. In der

Reihe der φ bleiben dann nur diejenigen Invarianten stehen, welche Normalformen besitzen.

Mit dem oben bezeichneten Reductionsverfahren schreite ich fort, bis ich zu einer simultanen Invariante η_λ gelange, zu welchem in der Reihe der Normalformen:

$$\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_{r-1}$$

kein Reducent vorhanden ist. Ich suche dann in dieser Reihe diejenigen ϑ aus, deren Charaktere:

$$h_1, h_2 \dots h_m$$

die Relationen befriedigen:

$$h_1 = \kappa_1; h_2 = \kappa_2 \dots h_{m-1} = \kappa_{m-1}; h_m > \kappa_m.$$

Ist ϑ_μ die letzte obiger Normalformen, welche diese Eigenschaft besitzt, so ersetze ich, um ϑ_r zu erhalten, in η_λ die Coefficienten von:

$$f_{m+1}, f_{m+2} \dots$$

durch willkürliche Grössen. —

§ 5.

Eigenschaften der Normalformen.

Das eben geschilderte Recursionsverfahren zur Herstellung von Normalformen setzt uns in den Stand, folgende beiden Eigenschaften der Normalformen ϑ_r abzuleiten.

1) Zwei verschiedene Normalformen haben weder dieselben Charaktere, noch stimmen sie in allen ihren Charakteren ausser dem letzten überein.

2) Hat eine Form ϑ_r die Charaktere:

$$\kappa_1, \kappa_2 \dots \kappa_{m+1},$$

so giebt es eine andere Normalform ϑ_μ , deren Charaktere:

$$h_1, h_2 \dots h_m$$

mit den ersteren durch die Relationen verbunden sind:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= h_1; \quad \kappa_2 = h_2 \dots \kappa_{m-1} = h_{m-1}, \\ \kappa_m &< h_m \leq \kappa_m + \kappa_{m+1}. \end{aligned}$$

Stehen die Normalformen ϑ_μ und ϑ_r in dieser Beziehung, so nenne ich ϑ_r eine Ableitung von ϑ_μ .

Gehört ϑ_μ der m^{ten} Classe an, so gehören ihre Ableitungen der $(m+1)^{\text{ten}}$ Classe an.

Die Grade der Normalformen:

$$\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_r$$

bezeichne ich der Reihe nach durch:

$$p_1, p_2 \dots p_r$$

und die Grade der Normalformen der m^{ten} Classe durch:

$$q_{m,1}, q_{m,2} \dots$$

und wähle die Reihe der ϑ so, dass:

$$p_{r+1} \geq p_r; \quad q_{m,r+1} \geq q_{m,r}$$

ist.

Da die q^{te} Classe alle ϑ umfasst und da alle Classen mit $\varphi_1 = \vartheta_1$ beginnen, so ist:

$$q_{\vartheta,r} = p_r; \quad q_{m,1} = p_1.$$

Die Grade der Ableitungen einer Normalform vom Grade $q_{m,x}$ nenne ich die Ableitungen von $q_{m,x}$; es sind Zahlen $q_{m+1,x}$, deren Anzahl $\leq h_m \leq q_{m,x}$ ist.

Umgekehrt sind alle Zahlen $q_{m+1,x}$ mit Ausnahme von:

$$q_{m+1,1} = p_1$$

Ableitungen von Zahlen $q_{m,x}$.

Die Anzahl aller Normalformen der m^{ten} Classe, also auch die Anzahl aller $q_{m,x}$ nenne ich v_m ; v_q ist dann die Zahl aller Normalformen, also auch sowohl die Anzahl aller p als auch die Anzahl aller q .

Die Anzahl der Ableitungen aller v_m Normalformen m^{ter} Classe ist:

$$\leq \sum_{x=1}^{x=v_m} q_{m,x}.$$

Da diese Ableitungen alle v_{m+1} Normalformen der $(m+1)^{\text{ter}}$ Classe ausser φ_1 umfassen, so besteht die Ungleichung:

$$v_{m+1} \leq 1 + \sum_{x=1}^{x=v_m} q_{m,x}.$$

Enthält eine Reihe:

$$\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_i$$

die Formen m^{ter} Classe:

$$(1) \quad \vartheta_{m,1}, \vartheta_{m,2} \dots \vartheta_{m,s}$$

und ist die Zahl der darin befindlichen Formen $(m+1)^{\text{ten}}$ Classe:

$$> \sum_{x=1}^{x=s} q_{m,x},$$

so enthält sie ausser den Formen (1) und ihren Ableitungen mindestens eine Form der $(m+1)^{\text{ten}}$ Classe.

Die Form niedrigsten Grades der übrigen Formen gehört dann gleichfalls der m^{ten} Classe an und ist daher die Form $\vartheta_{m,s+1}$. —

§ 6.

Die obere Grenze für die Anzahl der Normalformen.

Aus den Graden:

$$p_1, p_2 \dots$$

der Normalformen ϑ kann man mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned} p_{v,1} &= u_1 = p_1; & p_{v,0} &= p_v; \\ p_{v,s} &= p_{v-1,t} & \text{wo } t &= 1 + \sum_{x=1}^{x=s-1} p_{v,x}; \\ u_v &= 1 + \sum_{x=1}^{x=u_{v-1}} p_{\vartheta+v+1,x} \end{aligned}$$

weitere Zahlen $p_{v,x}$ und u_v ableiten.

Ich will zeigen, dass diese Zahlen den Ungleichungen genügen:

$$\text{I. } p_{v,x} \geq q_{\vartheta-v,x},$$

$$\text{II. } u_v \geq v_v.$$

Beweis.

In Folge der Formeln

$$(1) \quad q_{\vartheta-v,1} = p_{v1} = p_1,$$

$$(2) \quad q_{\vartheta,s} = p_{0,s} = p_s,$$

$$(3) \quad u_1 = p_1 = v_1$$

gelten unsere Formeln für kleine Zahlen ϑ und s . Wir wollen sie der Reihe nach für immer grössere Zahlen beweisen und dürfen hierbei die Annahme machen, sie seien bereits für kleinere Zahlen bewiesen, also die Ungleichungen voraussetzen:

$$\text{V. 1. } q_{\vartheta-v,s-1} \leq p_{v,s-1},$$

$$\text{V. 2. } q_{\vartheta-v+1,s} \leq p_{v-1,s},$$

$$\text{V. 3. } v_{v-1} \leq u_{v-1}.$$

In Folge der beiden ersten Voraussetzungen befinden sich in der Zahlenreihe:

$$(1) \quad p_1, p_2 \dots p_{v,s} = p_{v-1,t} \quad \text{wo } t = s + \sum_{x=1}^{x=s-1} p_{v,x}$$

unter Anderen sowohl die Zahlen:

$$(2) \quad q_{\vartheta-v,1}, q_{\vartheta-v,2} \dots q_{\vartheta-v,s-1},$$

als auch die Zahlen:

$$(3) \quad q_{\vartheta-v+1,s}, q_{\vartheta-v+1,2} \dots q_{\vartheta-v+1,t}.$$

Die Anzahl der Zahlen (2) und ihrer Ableitungen ist:

$$\leq s - 1 + \sum_{x=1}^{x=s-1} q_{q-r,x} \leq s - 1 + \sum_{x=1}^{x=s-1} p_{r,x} \leq t.$$

Mithin enthält die Reihe 1 auch die Zahl $q_{q-r,s}$ und unsere erste Behauptung ist erwiesen.

Aus der Formel:

$$q_{q-r,s} \leq p_{r,s}$$

und der V. 3 folgt weiter:

$$v_m \leq 1 + \sum_{x=1}^{x=q_{m-1}} q_{m-1,x} \leq 1 + \sum_{x=1}^{x=u_{m-1}} p_{q-m+1,x} \leq u_m.$$

Im Speciellen hat man für $m = q$:

$$v_q \leq u_q,$$

d. h. u_q ist die obere Grenze für die Anzahl der Normalformen.

Diese Formen:

$$\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta v_q$$

mögen die Normalformen der Invarianten:

$$\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{v,q}$$

sein, die übrigen Invarianten φ besitzen keine Normalformen. Für sie giebt es nach § 4 ein Aggregat η_λ , welches identisch verschwindet. Es besteht somit eine Gleichung:

$$0 = A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 \dots A_{v,q} \varphi_{v,q} + A \varphi,$$

worin die A_x simultane Invarianten der f sind und überdiess A die Coefficienten von f nicht enthält. Aus dieser Formel lässt sich eine weitere ableiten:

$$\varphi = B_1 \varphi_1 + B_2 \varphi_2 \dots B_{v,q} \varphi_{v,q},$$

in welcher die B Invarianten von f allein sind und welche zeigt, dass $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{v,q}$ das System von f bilden.

Erlangen, im September 1892.