des Bergkrystalls; wegen der hier viel complicirteren Verhältnisse musste die Darstellung noch unvollständiger ausfallen als für Beryll. Die Curven E_1 und E_2 geben den Verlauf der Dehnungscoëfficienten in der krystallographischen Symmetrieebene und dem dazu normalen Hauptschnitt (der YZ - und XZ -Ebene). In letzterem findet sich Symmetrie in Bezug auf die Krystallaxe, im ersteren nicht. Die Curven T_1 und T_2 geben das Verhalten des Drillungscoëfficienten an, wenn man die grössere oder kleinere Querdimension in eine Nebenaxe (X) legt und die Längsrichtung durch Drehung um dieselbe in der Symmetrieebene verschiebt. Die Curve T_1 gibt dann noch zugleich den Verlauf des Drillungscoëfficienten für ein mit der Längsrichtung in die X -Axe fallendes Prisma, wenn die grössere Querdimension alle möglichen Lagen annimmt; sie zeigt eine ganz unerwartet grosse Veränderlichkeit von T mit der Orientirung.

Die zur Construction benutzten Zahlen finden sich p. 718 und 719.

Die Figur für Beryll ist im doppelten Maasstab gezeichnet, wie die für Bergkrystall.

Da die Biegungen (oder Dehnungen) und Drillungen mit den Coëfficienten E und T proportional sind, so geben die mitgetheilten Curven auch direct Aufschluss über das Verhalten dieser Grössen.

XI. *Das Totalreflectometer; von C. Pulfrich.*

(III. Mittheilung.)

(Hierzu Taf. V Fig. 20.)

In zwei früheren Mittheilungen¹⁾ habe ich nachweisen können, dass ein Glascylinder, dessen Mantel und obere Grundfläche geschliffen sind, mit grossem Vortheile zur Bestimmung von Brechungsexponenten verwendet werden kann. Denn es hat sich herausgestellt, dass die Mantelfläche des Cylinders auf die Grenzstrahlen der Totalreflexion denselben

1) Pulfrich, Wied. Ann. 30. p. 193 u. 487. 1887.

Einfluss ausübt, wie die plane Austrittsfläche eines Prismas. Infolge dessen besass das mit Fernrohr beobachtete Grenzcurvenstück die ihm wirklich zukommende Krümmung und erschien mit grosser Schärfe. Nur für stark gegen die Horizontale geneigte Grenzcurven konnte ein wesentlicher Unterschied constatirt werden. In solchen Fällen war die Grenze verschwommen und erschien erst wieder scharf nach Anbringung einer Verticalspalte vor dem Objectiv des Fernrohrs.

Diese thatsächlichen Ergebnisse haben zwar keinen Zweifel an der praktischen Brauchbarkeit des Cylinders aufkommen lassen. Indessen ist die Anwendung eines Glascyinders zu wissenschaftlichen Messinstrumenten etwas Ungeohntes und über den Gang von Lichtstrahlen durch denselben noch wenig bekannt, sodass ich glaube, dass der Cylinder mit einem gewissen Misstrauen betrachtet wird, solange nicht nach dieser Seite hin alle Bedenken gehoben sind. Ich will deshalb versuchen, diese Lücke, insofern sie unseren Fall betrifft, auszufüllen.

1) Soweit die durch den Versuch gegebene Thatsache überhaupt noch eines experimentellen Beweises bedarf, soll ein solcher zuerst gegeben werden.

Der auf dem Centrirapparat des Totalreflectometers ruhende Cylinder werde durch ein Prisma von 90° ersetzt, dessen eine Kathetenfläche, entsprechend der Grundfläche des Cylinders, genau senkrecht zur Drehungsaxe orientirt ist. Es ist ersichtlich, dass dann beim Drehen der Verticalaxe die zweite Kathetenfläche successive alle diejenigen Lagen einnehmen wird, welche den verticalen, unendlich schmalen Flächenelementen entsprechen, aus denen man sich den Cylindermantel bestehend denken kann. Letzterer bildet die innere Berührungsfläche der sich drehenden zweiten Prismenebene. Man hat es somit in der Hand, den bei Benutzung des Cylinders beobachteten Gesamteffect durch Drehen des Prismas in seine Bestandtheile continuirlich zu zerlegen.

Man stelle deshalb das Fadenkreuz des Fernrohrs auf die Grenze ein und drehe die Verticalaxe nach rechts und links, während das Auge beständig durch das Fernrohr sieht.

Bei den Versuchen, welche ich in dieser Richtung ausführte¹⁾, blieb die Grenze stets sichtbar, selbst als der Gesamtdrehungswinkel einen Werth von ungefähr 120° erreichte. Die horizontal liegende Grenzcurve zeigte dabei nicht die geringste Verschiebung gegen das Fadenkreuz. Sie verschwand schliesslich, als die Drehung einen durch die Form der Prismenflächen bedingten Winkel überschritt; eine Verschiebung trat aber niemals ein. Dieses traf zu für isotrope Medien sowohl wie für den ordentlichen Strahl doppeltbrechender Krystalle. — Was den veränderlichen Strahl anbetrifft, beispielsweise für Quarz oder Kalkspath, so war die schräg liegende Grenzcurve zwar scharf, zeigte aber wie früher eine der Azimuthaländerung entsprechende Wanderung. Um also zu einem Urtheil über den Einflusse der Mantelfläche zu gelangen, musste die Krystallplatte an dieser Bewegung behindert werden. Geschah dies, etwa durch Ankleben der Krystallplatte an einen Halter, und wurde nun das Prisma vorsichtig darunter gedreht, so trat bei Quarz eine zwar noch geringe, aber immerhin merkliche, bei Kalkspath schon eine bedeutende Verschiebung ein. Die Stärke derselben nahm zu mit der wachsenden Neigung der Grenzlinie gegen die Horizontale und entsprach genau der Breite des verschwommenen Bandes bei Benutzung des Cylinders.

2) Um zu einer Erklärung dieses verschiedenartigen Verhaltens des Cylindermantels den Grenzcurven gegenüber zu gelangen, habe ich das trigonometrische Verfahren eingeschlagen, welches auch schnell und ausreichend zum Ziele geführt hat. (Vergl. Fig. 20 Taf. V.)

Wir gehen von derjenigen Tangentialebene AOB des Cylinders als Normalebene aus, welche senkrecht steht zu der Einfallsebene VV des Apparates, und wollen versuchen, die Brechung der Grenzstrahlen an einer beliebig gegen die Normalebene geneigten zweiten Tangentialebene AOB' zu bestimmen. Aus den Ergebnissen lässt sich dann leicht auf den

1) Benutzt wurde ein Prisma von 90° , wie solche bei den einfacheren, speciell für chemische Zwecke gebauten Totalreflectometern verwendet werden. Vgl. Wied. Ann. 30. p. 205. Anm. 1. (I. Mitth.) 1887.

Einfluss des Neigungswinkels δ der beiden Ebenen schliessen. Wie man sieht, reiht sich der eingeschlagene Weg direct an die unter 1) besprochenen Versuche an.

Für ein System unendlicher Strahlen, wie es ja bei den Grenzstrahlen der Totalreflexion vorliegt, ist es gleichgültig, welchen Punkt der brechenden Fläche man als Austrittspunkt ansieht; es kommt nur auf die Richtung der Strahlen an. Wir wählen deshalb einen der Schnittlinie beider Ebenen angehörigen Punkt, etwa O in Fig. 22.

Mit Rücksicht auf unser Experiment (p. 725) wollen wir unter OC den mit der optischen Axe des Fernrohrs zusammenfallenden Grenzstrahl verstehen. Suchen wir nun für jede einzelne brechende Tangentialebene den Weg desjenigen Lichtstrahles zu bestimmen, welcher nach seiner Brechung den Strahl OC bildet. Es wird dabei von besonderem Interesse sein, zu wissen, welchen Winkel die Strahlen mit der Horizontalebene bilden.

In der obigen Figur sei NN das Einfallslloth zur Normalebene AOB , und es möge sich dem äusseren Winkel i der innere $r = 90^\circ - e$ zuordnen. $N'N'$ sei die Normale zur zweiten, unter dem beliebigen Winkel δ gegen die erste geneigten Tangentialebene AOB' . Legen wir durch Strahl und Loth die Einfallsebene OCN' , so muss der Strahl OD' einmal in dieser Ebene liegen und mit der Normale ON' den Winkel r' bilden, der mit dem Einfallswinkel i' durch die Beziehung:

$$\frac{\sin i'}{\sin r'} = \frac{\sin i}{\sin r} = N$$

verknüpft ist. Es ist also:

$$\sin r' = \frac{\sin r}{\sin i} \cdot \sin i'.$$

Die entstandenen Kugeldreiecke CNN' und $D'FN'$ besitzen je einen rechten Winkel, und es ist deshalb:

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \sin \psi \quad \text{und} \quad \frac{\sin x}{\sin r'} = \sin \psi,$$

sofern wir den gesuchten Winkel $D'OF$ mit x , und den Neigungswinkel der Einfalls- und Horizontalebene mit ψ bezeichnen.

Aus diesen Beziehungen ergibt sich aber leicht:

$$\sin x = \sin r, \quad x = r = 90^\circ - e.$$

Bei dieser Betrachtung kommt, wie wir sehen, die Grösse des Neigungswinkels δ ganz ausser Betracht, und es ergibt sich das einfache Resultat, dass für sämtliche Tangentialebenen die Strahlen OD' auf dem Mantel eines Kreiskegels mit der Spitze in O liegen müssen.

Wie verhält sich aber die Sache, wenn wir nicht von einem bestimmten Strahl ausserhalb des Glases ausgehen, sondern umgekehrt die Brechung des gefundenen Kreiskegels an einer beliebigen Verticalfläche betrachten? Es lässt sich nun ebenso leicht beweisen, dass, soweit der Kegel überhaupt zum Austritt gelangt, die gebrochenen Strahlen auch in Luft den Mantel eines Kreiskegels bilden müssen. In allen Fällen ist die Neigung eines jeden Strahles gegen die Horizontalebene dem Austrittswinkel i gleich, der mit dem Einfallswinkel $r = 90^\circ - e$ durch das Brechungsgesetz verbunden ist. Die Verticalebenen unterscheiden sich in ihrer Wirkungsweise nur dadurch voneinander, dass die verschiedenen Kegel um ihre Axe AO gedreht erscheinen; ein Hervortreten eines Strahles aus der Mantelfläche findet aber nicht statt.

Wesentlich anders muss sich die Brechung gestalten, wenn wir nicht von einem Kreiskegel, sondern von einem beliebigen, etwa einem Kegel mit elliptischer Grundfläche ausgehen. Denn da der der Hauptaxe der Ellipse entsprechende Grenzstrahl eine Verschiebung nach rechts oder links erleidet, so können die von den verschiedenen brechenden Flächen herrührenden Kegelmäntel nicht mehr zusammenfallen, wie das bei dem Kreiskegel der Fall war.

3) Sehen wir nun zu, mit welchen Strahlenkegeln man es bei der Totalreflexionsmethode zu thun hat. Denken wir uns nach dem Vorgange von de Sénarmont¹⁾ in O , d. h. im Glase befindlich, ein auf grosse Entfernungen accommodirtes Auge, und es werde das auf dem Cylinder aufliegende Object ringsum streifend beleuchtet. Die Grenzstrahlen, welche unter dem Winkel e die obere Planfläche verlassen und in O zusammentreffen, bilden den Mantel eines Kegels,

¹⁾ de Sénarmont, Pogg. Ann. 97. p. 456. 1856.

dessen Grundfläche dem Auge entweder als ein Kreis, eine Ellipse oder Hyperbel um den Fusspunkt von O als Mittelpunkt erscheint.¹⁾ Diese sogenannten Grenzlinien sind als die Schnittcurven vom Grenzkegel mit der ebenen Grundfläche des Cylinders zu betrachten. Für alle isotropen Körper und für den ordentlichen Strahl doppeltbrechender Krystalle sind die Grenzcurven vollkommene Kreise, und werden hier die im vorigen Abschnitt entwickelten Beziehungen passen. Anders ist es hingegen für den veränderlichen Strahl der Krystalle. Die Form der Grenzcurven hängt hier wesentlich von dem Charakter des Krystalls, insbesondere von dem Verhältniss des Brechungsexponenten (N) des Cylinders zu den Hauptbrechungsexponenten des Krystalls ab.

4) Stellen wir dies mit den Ergebnissen des Abschnitts 2) zusammen, so sieht man, dass es in ersterem Falle gleichgültig ist, ob wir durch die Planfläche eines Prismas oder durch die Mantelfläche eines Cylinders hindurch die Grenzcurve der Totalreflexion betrachten. Für den veränderlichen Strahl aber muss eine um so grössere Verwaschung des Grenzcurvenstücks eintreten, je mehr der Grenzkegel von der Form eines Kreiskegels abweicht, oder wie wir früher gesagt haben, je stärker die Grenzlinie gegen die Horizontale geneigt erscheint. Wir haben ferner gesehen, dass diejenigen Grenzcurvenstücke, welche den Hauptbrechungsexponenten der Krystalle entsprechen, durch das Maximum der Schärfe sich auszeichnen; und es lässt sich dies ebenfalls mit den Resultaten der gegenwärtigen Deduction in Einklang bringen,

1) Das Experiment lässt sich natürlich nicht realisiren. Man kann wohl den vollen Halbkreis des gebrochenen Strahlenkegels überschauen, wenn man das Auge an die Austrittsfläche dicht heranbringt. Als besonders geeignet zu diesem Versuche empfiehlt sich ein sogenanntes Reflexionsprisma, welches man mit seiner Hypothenusenfläche entweder auf ein Stück weisses Papier legt (vgl. das Experiment mit der planconvexen Linse Wied. Ann. 30. p. 194. 1887. Anm. 1) oder so gegen das helle Fenster hält, dass die Lichtstrahlen streifend eintreten. Die Abbe'schen Doppelpismen mit Flüssigkeitstropfen dazwischen sind in gleicher Weise verwendbar. — Diese Versuche sind auch insofern instructiv, als sie zur Erklärung der Krümmung der Fraunhofer'schen Linien beitragen.

da man praktisch die Curvenstücke in diesen Lagen als Kreistheile ansehen kann.

Konnte somit nachgewiesen werden, dass der Mantel des Cylinders die inneren Grenzkegelstrahlen gleichsam trichterförmig vereinigt, so leuchtet einmal die Nothwendigkeit der von mir angewandten Beleuchtungsart ein; andererseits findet die grosse Helligkeit und Deutlichkeit, mit welcher die Grenzcurve erscheint, auch in diesem Umstande eine Erklärung, wenn auch der Hauptgrund anderswo zu suchen ist.¹⁾

5) Aus den vorstehenden Resultaten lassen sich für unseren Cylinder einige nicht unwesentliche Schlüsse ziehen, die auch für das Schleifen desselben von Belang sind. Zunächst ist ersichtlich, dass der Querschnitt ohne Bedenken von der genauen Kreisform abweichen darf. Das schliesst denn auch ein, dass bezüglich der Orientirung des Cylinders dessen Axe nicht strenge mit der Verticalaxe des Apparates zusammenzufallen braucht. Unbedingt nothwendig ist nur die Forderung, dass alle an den Mantel angelegten Tangentialebenen parallel zur Drehungsaxe des Apparates oder des Cylinders verlaufen, d. h. der Mantel muss vollkommen gerade sein und darf keine Wellen zeigen.²⁾

Um die Glas cylinder diesem Zustande möglichst nahe zu bringen, werden dieselben mittelst eines von Hrn. Mechaniker Wolz eigens zu dem Zwecke construirten und sehr

1) Vgl. Pulfrich, Wied. Ann. 30. p. 500. 1887.

2) Die früher (Wied. Ann. 30. p. 202. 1887) beschriebene optische Untersuchungsmethode mittelst eines kleinen Probegläschens liess die Fehler eines noch nicht fertig polirten Cylinders deutlich hervortreten. Zum Schutz der Cylinderflächen empfiehlt es sich, statt einer Verschiebung das Gläschen excentrisch aufzulegen und die Verticalaxe um 180° zu drehen. Die seitwärts hervortretende Flüssigkeit nehme man mit Fliesspapier fort. Ich benutze diese Gelegenheit, um nochmals auf die Nothwendigkeit einer peinlichsten Sorgfalt bei der Behandlung der Flächen hinzuweisen. Sonst hat die Methode keinen Werth. Um die Flüssigkeiten vor Staub und Verunreinigungen zu schützen, habe ich Hrn. Gerhardt in Bonn zur Anfertigung von Schutzgläsern veranlasst, deren eingeschlifener Stöpsel als dünner Glasstab bis auf den Boden hinunterreicht und sich am oberen Ende kappenartig über den Hals des Gläschens ausbreitet. Die beim Abheben des Stöpsels am Glasstabe haftende Flüssigkeit ist für den vorliegenden Zweck mehr als ausreichend.

empfindlichen Fühlhebels untersucht. Letzterer wird auf den Support der Drehbank aufgesetzt und functionirt unabhängig von der Geschicklichkeit des Beobachters. Kann man schon mit einem gewöhnlichen Taster, den man auf den Fingerspitzen balanciren lässt, bei einiger Geschicklichkeit zu einem grossen Grade der Genauigkeit gelangen, so dürfte doch letztere Prüfungsmethode bei einer Dickendifferenz von ungefähr $\frac{1}{2}$ Hundertstelmillimeter ihre Dienste auch bei dem geschicktesten Beobachter versagen. Ein ebensolcher Unterschied lässt den Zeiger des Fühlhebels, der eine fast 2000-fache Vergrösserung besitzt, noch um nahezu 10 mm ausschlagen. Da die Cylinder so lange polirt werden, bis der Zeiger kaum noch 1 mm Ausschlag anzeigt, so dürften die Dickendifferenzen wohl auf 0,0005 mm ausgeglichen sein. Setzen wir den Fall, die Dickenänderung erfolge stetig vom oberen zum unteren Ende des Cylinders, so würde für den Oeffnungswinkel des Kegels der geringe Betrag von 3,6'' sich ergeben. Dieser Winkel mag sich verdreifachen und selbst vervierfachen, wenn die Aenderungen nicht stetig verlaufen; einen messbaren Einfluss vermag diese geringe Wellenform nicht auszuüben. Denn da nur die Hälfte des Oeffnungswinkels als Abweichung δ vom brechenden Winkel 90° in Frage kommt, so beträgt diese höchstens 8—10''. Die Berechnung der Brechungsexponenten nach der allgemeinen Formel ($\varphi = 90^\circ \pm \delta$):

$$n = \sin \varphi \sqrt{N^2 - \sin^2 i} - \sin i \cdot \cos \varphi,$$

welche mit Rücksicht auf den vorliegenden Werth φ sich auch schreiben lässt:

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2 i} \pm \sin i \cdot \sin \delta,$$

lässt aber erkennen, dass kaum die fünfte Decimale des Brechungsexponenten beeinflusst wird. — Hiermit dürften denn auch die Bedenken beseitigt sein, welche gegen die Möglichkeit der Herstellung eines Cylinders mit optisch guten Flächen vielleicht in manchem Leser entstanden sind. Denn stellt man die erhaltenen Resultate den Beobachtungen insbesondere des Hrn. Sieben¹⁾ gegenüber, welcher gerade mit

1) Sieben, Untersuchungen über anomale Dispersion, Bonn 1879.

Rücksicht auf die Beeinflussung des Brechungsexponenten durch Fehler im Schliff der Flächen eine grössere Anzahl Prismen untersucht hat: Der Vergleich wird gewiss nicht zu Ungunsten des Cylinders ausfallen.—

Ich schliesse mit einer Zusammenstellung derjenigen Aufgaben der Krystalloptik, für welche das Verfahren praktisch verwerthet werden kann.¹⁾ Die Anwendung des Apparates als Refractometer tritt dabei natürlich in den Vordergrund. Parallel zu den folgenden Anwendungen läuft das Studium der die Totalreflexion begleitenden Polarisationsverhältnisse.

a) Optisch einaxige Krystalle.

1) Messung der beiden Hauptbrechungsexponenten an einer beliebig gelegenen Schnittfläche des Krystalls.

2) Experimentelle Prüfung der aus den Fresnel'schen Gesetzen abgeleiteten Beziehungen für die Erscheinungen der Totalreflexion; desgleichen für zweiaxige Krystalle.

3) Prüfung der Lage einer Grenzebene, welche zur optischen Axe parallel oder senkrecht sein soll.

4) Bestimmung der Neigung einer Grenzebene zur optischen Axe.

b) Optisch zweiaxige Krystalle.

5) Messung der drei Hauptbrechungsexponenten an Grenzebenen, welche wenigstens zu einer optischen Symmetrieaxe parallel sein müssen.

6) Directe Bestimmung des Winkels der optischen Axen, einschliesslich Dispersion derselben, an einer Grenzebene parallel zu der optischen Axenebene durch Einstellung auf den Durchschnitt der Grenzcurven, sowie Berechnung der fraglichen Winkel aus den Hauptbrechungsexponenten.

7) Bestimmung des Winkels, welchen eine zu einer optischen Symmetrieaxe parallele Grenzebene mit einer der beiden anderen Axen macht.

8) Prüfung der Lage einer Grenzebene, welche zu einer optischen Symmetrieebene parallel sein soll.

p. 44; Verh. der Oberhessischen Ges. für Natur- und Heilkunde. 18. p. 149. 1884. Wied. Ann. 23. p. 316. 1884.

1) Neuerdings habe ich das Totalreflectometer durch Anbringung einer Vorstecklupe auch zu directen stauroskepischen Messungen verwendbar gemacht.

Die Art und Weise, wie das Totalreflectometer die einzelnen Aufgaben zu lösen vermag, ist nach den früheren Mittheilungen, in welchen dieselben zum Theil berührt worden sind, leicht verständlich. Sieht man von den unter 2) und 6) erwähnten Messungen ab, so genügt für alle anderen Aufgaben die Einstellung auf die Maximal- und Minimalagen der Grenzcurven. Dieselben werden erreicht, wenn die Einfallsebene eine optische Symmetrieebene, oder die Schnittgerade von Einfallsebene und Grenzebene eine optische Symmetrieeaxe ist.¹⁾ Diese Lagen, in welchen die veränderliche Grenzcurve ihre Bewegung umkehrt, zeichnen sich gleichzeitig durch die grösste Schärfe aus. Man ist dabei keinen Augenblick zweifelhaft, ob man es mit den Extremgrenzcurven wirklich zu thun hat. Zudem wiederholen sich die Erscheinungen nach jeder halben Umdrehung des Cylinders, und ist man durch Mittelbildung im Stande, das Resultat von dem Einfluss einer etwa vorhandenen fehlerhaften Lage der Krystallfläche zu befreien.

Gerade in dieser charakteristischen Wirkungsweise des Cylinders bin ich geneigt, den Hauptvorzug des Totalreflectometers, insbesondere dem Fuess-Liebisch'schen gegenüber, zu erblicken. Es ist das ein Vorzug, gegen den die äusseren Vortheile der Bequemlichkeit gering zu erachten sind, und dem man gern die mehr oder weniger eintretende Trübung der mittleren Curventheile nachsieht, welche für die Aufgaben 2) und 6) die Anwendung des Verticalspaltes nöthig macht.²⁾

Der Vollständigkeit halber erwähne ich zum Schluss noch die Verwendbarkeit des Instrumentes zur Prüfung planparalleler Glasplatten, bezw. Bestimmung der Neigung der beiden Flächen mit Hülfe des Gauss'schen Oculars; seine Verwendbarkeit zur Bestimmung des brechenden Winkels von Prismen, und endlich zur Messung der Brechungsexponenten von Prismen, welche das Licht stärker brechen als der Cylinder, nach der Methode des streifend eintretenden Lichtes.

Bonn, im März 1887.

1) Vgl. Th. Liebisch, Neues Jahrb. für Min. etc. 2. p. 209 u. 203. 1885.

2) Vgl. Mitth. 1. p. 198; Mitth. 2. p. 493.