BEWEIS DES LEBESGUE-YOUNG'SCHEN SATZES.

Von Julius Pál (Székelyudvarhely).

Adunanza del 24 marzo 1912.

Für die Theorie der Funktionen von beschränkter Schwankung ist folgender Satz von Bedeutung:

Im Bereiche $0 \leq x < 1$ sei eine den Bedingungen $x < \varphi(x) \leq 1$ genügende Funktion definiert; alsdann existiert eine endliche oder abzählbar unendliche Folge von Intervallen $[x, \varphi(x)]$, die den Bereich $0 \leq x < 1$ einfach und lückenlos überdeckt.

Der Satz wurde zuerst von H. LEBESGUE ausgesprochen und durch transfinite Konstruktion einer entsprechenden Intervallenfolge bewiesen ¹⁾; Ohne transfinite Konstruktion wurde der Satz durch W. H. und G. C. YOUNG begründet ²⁾.

Im folgenden wird die LEBESGUE'sche Konstruktion zu einem *Transfinites nicht heranziehenden, mit einer einzigen Schnittbildung zum Ziele kommenden* Beweise des Satzes umgestaltet. Beim Beweise ergibt sich auch der Zusatz:

Unter den den Bedingungen des Satzes genügenden Intervallenfolgen gibt es eine und nur eine, in welcher die nach Grösse geordneten Intervallenanfangspunkte eine wohlgeordnete Menge ausmachen.

*
* *

Ich betrachte eine im Bereiche $0 \leq x < 1$ gelegene endliche oder abzählbar unendliche Folge von Punkten: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; sie möge A heissen; die Folge der Punkte $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_n), \dots$ heisse B .

1. Definition. — Ich nenne die Folge von Intervallen $[a_i, \varphi(a_i)]$ eine LEBESGUE'sche Kette,

1° wenn unter den Elementen von A ein kleinstes (α) und ein grösstes (α) existiert,

2° wenn zwei Intervalle $[a_i, \varphi(a_i)]$ und $[a_k, \varphi(a_k)]$ höchstens einen Punkt gemeinsam haben,

¹⁾ Siehe: H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904), p. 63.

²⁾ Siehe: W. H. YOUNG and GRACE CHISHOLM YOUNG, *On the Existence of a Differential Coefficient* [Proceedings of the London Mathematical Society, Series II, Vol. IX (1911), pp. 325-335].

3° wenn jeder Punkt des Intervalls $[z, \varphi(a)]$ einem der abgeschlossenen Intervalle $[a_i, \varphi(a_i)]$ angehört,

4° wenn $A' \equiv B'$ eine Teilmenge von A ist (und somit keinen Punkt mit B gemeinsam hat).

II. Definition. — Ich nenne einen Punkt ξ_0 zwischen 0 und 1 einen LEBESGUE'schen Punkt, wenn zu jedem den Bedingungen $0 \leq \xi \leq \xi_0$ genügenden Punkt ξ eine und nur eine LEBESGUE'sche Kette existiert, für welche $x = 0$, $a \leq \xi$, $\varphi(a) > \xi$ ist.

Für den LEBESGUE'schen Punkt ξ_0 soll $L(\xi_0)$ die zugehörige Kette, $A(\xi_0)$ resp. $B(\xi_0)$ die Folge der Intervallenanfangs- resp. -endpunkte bedeuten.

[Aus der Existenz einer Kette $L(\xi_0)$ folgt deren Eindeutigkeit; zum Zwecke der Vereinfachung habe ich aber die Eindeutigkeit als Postulat in die Definition aufgenommen].

I. SATZ: *Es gibt LEBESGUE'sche Punkte. So ist z. Bp. jeder Punkt des Intervalls $[0, \varphi(0)]$ ein solcher.*

II. SATZ: *Ist $0 < \bar{\xi} < 1$ und ist jeder Punkt zwischen 0 und $\bar{\xi}$ ein LEBESGUE'scher, so gibt es auch LEBESGUE'sche Punkte, die grösser als $\bar{\xi}$ sind.*

Beim Beweise von Satz II unterscheide ich drei Fälle.

1° Gibt es einen Punkt: $\xi < \bar{\xi}$, dessen $L(\xi)$ mit einem $\varphi(a) > \bar{\xi}$ endigt, so sind die Punkte zwischen $\bar{\xi}$ und $\varphi(a)$ LEBESGUE'sche Punkte; in der Tat ist $L(\xi)$ eine und die einzige Kette, die für einen Punkt $\bar{\xi} \leq x < \varphi(a)$ das Recht hat sich $L(x)$ zu nennen.

2° Ist für ein $\xi < \bar{\xi}$ das entsprechende $\varphi(a) = \bar{\xi}$, so sind die Punkte des Intervalls $[\bar{\xi}, \varphi(\bar{\xi})]$ LEBESGUE'sche Punkte. Durch Adjunktion des Intervalls $[\bar{\xi}, \varphi(\bar{\xi})]$ zu $L(\xi)$ erhält man nämlich eine und die einzige Kette, die sich für einen Punkt $\bar{\xi} \leq x < \varphi(\bar{\xi})$ als $L(x)$ bezeichnen darf.

3° Ist endlich für jedes $\xi < \bar{\xi}$ das entsprechende $\varphi(a) < \bar{\xi}$, so nehme man alle Intervalle, die irgendeiner der Ketten $L(\xi)$, $0 \leq \xi < \bar{\xi}$ angehören und adjungire ihnen das Intervall $[\bar{\xi}, \varphi(\bar{\xi})]$. Das so entstehende System bildet offenbar eine Kette und zwar die einzige, die für einen Punkt $\bar{\xi} \leq x < \varphi(\bar{\xi})$ als $L(x)$ bezeichnet werden kann; die einzige, da in jeder im Nullpunkt beginnenden und über $\bar{\xi}$ hinausreichenden Kette L^* der Punkt $\bar{\xi}$ der Punktfolge B^{**} , also der Folge A^* angehören wird.

Aus Satz I und II folgert man, dass die obere Grenze der LEBESGUE'schen Punkte der Punkt 1 ist; nimmt man die Intervalle, die irgend einer der Ketten $L(\xi_0)$, $0 \leq \xi_0 < 1$ angehören, so bildet deren Gesamtheit ein System von Intervallen, das den Bereich $0 \leq x < 1$ einfach und lückenlos überdeckt.

Székeljudvarhely (Ungarn), Februar, 1912.

JULIUS PÁL.