Sätze aus dem Grenzgebiet der Mechanik und der Geometrie.

Von R. LIPSCHITZ in BONN.

Weil die Mechanik die Körper im Zustande der Bewegung betrachtet, so muss sie die Geometrie zur Feststellung ihrer Grundlagen in Anspruch nehmen, und hat dieselbe auch von jeher für die Erreichung ihrer Ziele verwerthet.

Aber erst durch die fortschreitende Ausbildung der Mechanik und der Geometrie hat sich die Aufmerksamkeit auf Fragen gerichtet, an deren Erforschung beide Wissenschaften ein gleiches Interesse haben, und die, analytisch ausgedrückt, von genau denselben Algorithmen abhängen. Die Entwicklung eines Begriffes, der in das Grenzgebiet der Mechanik und der Geometrie einschlägt, findet sich in der Abhandlung: *über einen algebraischen Typus der Bedingungsgleichungen eines bewegten Massensystems*, Borchardt's Journal für Mathematik, Bd. 66, S. 363. Man denkt sich ein System von materiellen Punkten, deren Massen der Reihe nach $m_1, m_2, \dots m_q$ heissen mögen; der Ort jeder einzelnen Masse m_e wird auf die rechtwinkligen Coordinaten x_e, y_e, z_e bezogen; bei einer gewissen Anordnung des Systems erhalten die Coordinaten der einzelnen Punkte die bestimmten Werthe $x_e = a_e, y_e = b_e, z_e = c_e$. Dann ist der in Rede stehende Begriff als *die über die sämmtlichen q Punkte ausgedehnte Summe aus den Producten jeder Masse m_e in das Quadrat der Entfernung des Ortes (x_e, y_e, z_e) von dem Orte (a_e, b_e, c_e)*

$$(1) \quad 2G = \sum_e m_e ((x_e - a_e)^2 + (y_e - b_e)^2 + (z_e - c_e)^2)$$

definiert.

Zu einer neuen Definition dieses Begriffes führt die Vorstellung, dass das System der materiellen Punkte m_e frei von dem Einfluss beschleunigender Kräfte und ohne einschränkende Bedingung sich im Raume bewege. Hier folgt das gleichförmige Fortschreiten eines jeden Punktes in gerader Linie mit Nothwendigkeit aus der Forderung, dass die erste Variation des zugeordneten *Integrals der kleinsten Wirkung*

$$(2) \quad R = \int \sqrt{\sum_e m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)}$$

für feste Anfangs- und Endlagen der einzelnen Punkte verschwinde.

Wenn nun die Coordinaten (a_e, b_e, c_e) die Anfangslage, die Coordinaten (x_e, y_e, z_e) die betreffende Endlage der Masse m_e bestimmen, ergibt sich leicht die Gleichung

$$(3) \quad R^2 = 2G.$$

Die Function $2G$ ist also bei einer durch das Trägheitsgesetz gegebenen Bewegung des Systems, für den Punkt m_e beziehungsweise von dem Orte (a_e, b_e, c_e) nach dem Orte (x_e, y_e, z_e) , gleich dem Quadrate des zugeordneten Integrales der kleinsten Wirkung. Hingegen fällt die Darstellung des Integrales der kleinsten Wirkung durch die Gleichung $R = \sqrt{2G}$ mit der Darstellung der von Hamilton eingeführten charakteristischen Function des betreffenden mechanischen Problems zusammen.

Um die Beziehung der Function $2G$ zu einer allgemeineren Bewegung des Systems von Punkten m_e abzuleiten, wird angenommen, dass das System unter der Einwirkung von beschleunigenden Kräften stehe, für welche eine Kräftefunction U vorhanden ist, und dass dasselbe einer Reihe von Bedingungsbeziehungen

$$(4) \quad \Phi_1 = \text{Const.}, \quad \Phi_2 = \text{Const.}, \quad \dots \quad \Phi_l = \text{Const.}$$

unterworfen sei, wo die l Functionen Φ_i nur die Coordinaten der einzelnen q Punkte, und nicht die Zeit t enthalten. Das von Hamilton herrührende Princip schreibt in diesem Falle vor, dass die erste Variation des Integrales

$$(5) \quad \int \left(\frac{1}{2} \sum_e m_e \left(\left(\frac{dx_e}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_e}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_e}{dt} \right)^2 \right) + U + \lambda_1 \Phi_1 + \dots + \lambda_l \Phi_l \right) dt$$

unter Zuziehung der l Gleichungen (4), bei festen Anfangs- und Endwerthen der $3q$ Coordinaten, zu Null gemacht werde. Die zu bestimmenden Multiplicatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ gelten als reine Functionen der Zeit t . Diese Aufgabe bringt vermöge der Regeln der Variationsrechnung die Gleichung

$$(6) \quad \sum_e m_e \left(\frac{d^2 x_e}{dt^2} \delta x_e + \frac{d^2 y_e}{dt^2} \delta y_e + \frac{d^2 z_e}{dt^2} \delta z_e \right) = \delta U + \lambda_1 \delta \Phi_1 + \lambda_2 \delta \Phi_2 + \dots + \lambda_l \delta \Phi_l$$

hervor, welche unabhängig von den $3q$ Variationen $\delta x_e, \delta y_e, \delta z_e$ erfüllt werden muss, und dadurch das System der Differentialgleichungen des mechanischen Problems in sich schliesst. In der Gleichung (6) können die Variationen $\delta x_e, \delta y_e, \delta z_e$ beziehungsweise durch die endlichen Differenzen $x_e - a_e, y_e - b_e, z_e - c_e$ ersetzt werden.*) Dann geht die linke Seite in einen Ausdruck über, der mit der Function G durch die charakteristische Relation

*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, 4te Vorlesung, S. 21.

$$(7) \quad \sum_e m_e \left(\frac{d^2 x_e}{dt^2} (x_e - a_e) + \frac{d^2 y_e}{dt^2} (y_e - b_e) + \frac{d^2 z_e}{dt^2} (z_e - c_e) \right) \\ = \frac{d^2 G}{dt^2} - \sum_e m_e \left(\left(\frac{dx_e}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_e}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_e}{dt} \right)^2 \right)$$

zusammenhängt, und auf der rechten Seite verwandelt sich die Variation δU in den Ausdruck

$$(8) \quad \sum_e \left(\frac{\partial U}{\partial x_e} (x_e - a_e) + \frac{\partial U}{\partial y_e} (y_e - b_e) + \frac{\partial U}{\partial z_e} (z_e - c_e) \right),$$

die Variation $\delta \Phi_\gamma$ in einen entsprechend gebildeten Ausdruck. So entsteht die Gleichung

$$(9) \quad \frac{d^2 G}{dt^2} - \sum_e m_e \left(\left(\frac{dx_e}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_e}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_e}{dt} \right)^2 \right) \\ = \sum_e \left(\frac{\partial U}{\partial x_e} (x_e - a_e) + \frac{\partial U}{\partial y_e} (y_e - b_e) + \frac{\partial U}{\partial z_e} (z_e - c_e) \right) \\ + \sum_\gamma \sum_e \lambda_\gamma \left(\frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial x_e} (x_e - a_e) + \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial y_e} (y_e - b_e) + \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial z_e} (z_e - c_e) \right).$$

Bei der Voraussetzung, dass $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_i$ homogene Functionen der Verbindungen $x_e - a_e, y_e - b_e, z_e - c_e$ sind und dass die in (4) vorgeschriebenen constanten Werthe sämmtlich gleich Null sind, verschwindet die Doppelsumme auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung, und diese Gleichung wird mit der Gleichung (6) der angeführten Abhandlung identisch.

Will man die Bewegung eines Systems von materiellen Punkten für solche Fälle in Rücksicht ziehen, bei denen die Bedingungsgleichungen (4) gelten, dagegen die nach den Axen der x, y, z genommenen Componenten der auf die einzelnen Massenpunkte m_e wirkenden Kräfte, X_e, Y_e, Z_e , nicht auf eine Kräftefunction zurückführbar sind, so lassen sich bekanntlich die Differentialgleichungen des mechanischen Problems in die eine Gleichung zusammenfassen, welche durch die Substitution des Ausdrucks

$$(10) \quad \sum_e (X_e \delta x_e + Y_e \delta y_e + Z_e \delta z_e)$$

statt der Variation δU aus der obigen Gleichung (6) hervorgeht.*) Deshalb bleiben alle von uns gezogenen Schlüsse in voller Kraft, wofern nur statt des obigen Ausdrucks (8) der Ausdruck

$$(8^*) \quad \sum_e (X_e (x_e - a_e) + Y_e (y_e - b_e) + Z_e (z_e - c_e))$$

gesetzt wird.

Die Existenz einer Kräftefunction für die wirkenden Kräfte ist nicht angenommen in der Abhandlung des Herrn Clausius: *über*

*) Lagrange, *mécanique analytique*, Seconde partie, Section IV, art. 10 et 11.

einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz (Sitzungsbericht der Niederrheinischen Gesellschaft in Bonn, Juni 1870, und *Compte rendu* der Pariser Akademie, Tome LXX, 20. Juni 1870), und in der Abhandlung des Herrn Ivan Villarceaux: *sur un nouveau théorème de mécanique générale* (*compte rendu*, Tome LXXV, No. 5, 29. Juli 1872). Die Beziehungen dieser beiden Abhandlungen, die von rein mechanischen Betrachtungen ausgehen und die gefundenen Resultate auf die mechanische Theorie der Wärme anwenden, zu der vorhin angeführten Arbeit und zu den betreffenden früheren Arbeiten von Jacobi, *Crelle's Journal*, Bd. 17, S. 97, und Vorlesungen über Dynamik, S. 21, sind in dem *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, rédigé par M. M. G. Darboux et J. Houel, Tome III, November 1872, S. 349 erörtert. Ferner gehört hierher eine Mittheilung des Herrn Clausius: *über die Beziehungen zwischen den bei Centralbewegungen vorkommenden charakteristischen Grössen*, Nachrichten v. d. K. G. d. Wiss. zu Göttingen, 25. December 1872, S. 600. Anwendungen der vorhin mit $2G$ bezeichneten Function auf die Theorie der Anziehung haben gegeben Herr de Gasparis: *Lettre sur un nouveau théorème de mécanique*, communiqué par M. Ivan Villarceaux (*compte rendu*, Tome LXXV, No. 9, 26. August 1872), und Herr S. Newcomb: *Note sur un théorème de mécanique céleste* (*compte rendu*, Tome LXXV, No. 26, 23. December 1872); Anwendungen auf die Theorie der kleinen Schwingungen Herr F. Lucas: *théorèmes généraux sur l'équilibre et le mouvement des systèmes matériels*, Bericht von Herrn de Saint-Venant (*compte rendu*, Tome LXXV, No. 23, 2. December 1872), und Herr de Saint Venant: *Partage de la force vive, due à un mouvement vibratoire composé, en celles qui seraient dues aux mouvements pendulaires simples et isochrones composants, de diverses périodes et amplitudes. Partage du travail dû au même mouvement composé, entre deux instants quelconques, en ceux qui seraient dus aux mouvements composants* (*compte rendu*, an derselben Stelle).

Der mehrfach erwähnte Aufsatz: *über einen algebraischen Typus der Bedingungsgleichungen eines bewegten Massensystems* enthält Anwendungen auf zwei Gattungen von mechanischen Problemen, von denen die eine Gattung die kleinen Schwingungen eines Systems materieller Punkte, die andere Gattung die Anziehung eines materiellen Punktes gegen ein festes Centrum in sich begreift. Fernere Anwendungen der Function $2G$ auf Probleme der theoretischen Physik gedenke ich bei einer künftigen Gelegenheit zu behandeln.

Die gegenwärtige Untersuchung hat es hauptsächlich mit der Voraussetzung zu thun, dass das System der Punkte m_e von keinen beschleunigenden Kräften getrieben werde und nur einer Bedingungsgleichung unterworfen sei. Demgemäss ist in dem vorhin bezeichneten Problem

die Kräftefunction U gleich Null, und die l Bedingungen (4) reduciren sich auf die eine

$$(4^*) \quad \Phi_1 = \text{Const.}$$

Sobald nur ein einziger Massenpunkt m_1 vorhanden ist, so bedeutet diese Bedingung, dass derselbe die Oberfläche $\Phi_1 = \text{Const.}$ nicht verlassen darf, und die Function $2G$ wird gleich dem Product der Masse m_1 in das Quadrat des Abstandes des Ortes (x_1, y_1, z_1) von dem Orte (a_1, b_1, c_1) . Denkt man sich nun den Ort (x_1, y_1, z_1) auf der Oberfläche $\Phi_1 = \text{Const.}$ für eine gewisse Zeit t , und das Fortschreiten des Punktes auf der Oberfläche während des nächsten Zeitelements dt beliebig gegeben, so gehört zu dem betreffenden Elemente der Bahn des Punktes ein bestimmter Normalschnitt der Oberfläche, und der Punkt (a_1, b_1, c_1) kann als Krümmungsmittelpunkt für diesen Normalschnitt determinirt werden. In Folge dessen hängt die Function $2G$ mit dem zugehörigen Krümmungsradius ϱ durch die Gleichung

$$(11) \quad 2G = m_1 \varrho^2$$

zusammen. Wenn die obige Gleichung (6) der in Rede stehenden einfachen Annahme entspricht, so repräsentirt der auf der rechten Seite auftretende Ausdruck $\lambda_1 \delta \Phi_1$ das Moment des Druckes, der bei der Bewegung des Punktes m_1 auf die Oberfläche $\Phi_1 = \text{Const.}$ ausgeübt wird. Die bekannte Beziehung zwischen dem Werthe des Druckes und dem Krümmungsradius ϱ lässt sich dann vermöge der Relation (11) folgendermassen ausdrücken

$$(12) \quad \frac{-1}{\sqrt{2G}} = \frac{\lambda_1 \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}\right)^2}}{\sqrt{m_1^3} \left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \right)}.$$

Es wird nun gezeigt werden, wie man bei dem System der q Punkte (x_e, y_e, z_e) ein System von q zugeordneten Punkten (a_e, b_e, c_e) durch die Forderung bestimmen kann, dass das erste und das zweite vollständige Differential der betreffenden Function G respective von dem ersten und dem zweiten vollständigen Differential der gegebenen Function Φ_1 nur um einen endlichen Factor verschieden sei. Das so definirte System der q Punkte bildet eine Verallgemeinerung von dem Begriffe des Krümmungsmittelpunktes einer Oberfläche. Zwischen dem entsprechenden Werthe der Function $2G$ und dem in der Gleichung (6) vorkommenden Werthe λ_1 , wobei die Function U gleich Null und die Zahl l gleich der Einheit vorausgesetzt ist, folgt dann eine der obigen Gleichung (12) völlig analoge Gleichung. Durch dieselbe wird der schon angedeutete Satz verallgemeinert, dass, wenn sich ein Punkt, frei von dem Einfluss einer beschleunigenden Kraft, auf einer gegeb-

nen Oberfläche bewegt, der reciproke Werth des Krümmungsradius dem auf die Oberfläche wirkenden Drucke proportional ist.

Nach der Begründung dieser Thatsachen werde ich die Stellung erörtern, welche die zugehörigen Begriffe der Mechanik und der Geometrie von dem Gesichtspunkte aus einnehmen, unter dem die in *Borchardt's Journal für Mathematik* publicirten Untersuchungen geführt sind, welche den Titel haben: *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen*, Bd. 70, S. 71–102, und Bd. 72, S. 1–56, *Entwicklung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen*, Bd. 71, S. 274–295, *Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist*, Bd. 74, S. 116–149. Durch diese Betrachtung werden sich Theile der Theorie, welche bis dahin getrennt waren, an einander schliessen, und wird die Wahrnehmung eine neue Bestätigung erfahren, dass die Voraussetzungen der thatsächlich geltenden Mechanik und Geometrie vor anderen nahe stehenden Voraussetzungen auf charakteristische Weise ausgezeichnet sind.

1.

Wenn man das erste vollständige Differential der Function G und der Function Φ_1 einander gegenüberstellt

$$(13) \quad dG = \sum_e m_e (x_e - a_e) dx_e + (y_e - b_e) dy_e + (z_e - c_e) dz_e,$$

$$(14) \quad d\Phi_1 = \sum_e \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e} dx_e + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e} dy_e + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e} dz_e \right),$$

und verlangt, dass bei gegebenen Werthen der $3q$ Variabeln x_e, y_e, z_e , unabhängig von den Werthen der Differentiale dx_e, dy_e, dz_e , das Differential dG dem Differential $d\Phi_1$ bis auf einen endlichen Factor gleich werden soll, so ergibt sich für die $3q$ Grössen a_e, b_e, c_e die Bestimmung, dass die Verbindungen

$$m_e (x_e - a_e), \quad m_e (y_e - b_e), \quad m_e (z_e - c_e)$$

den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e}, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e}$$

bis auf einen durchgehends übereinstimmenden Factor respective gleich sein müssen. Dieses Sachverhältniss kann mittelst des Ausdruckes

$$(15) \quad (1,1) = \sum_e \frac{1}{m_e} \left(\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e} \right)^2 \right)$$

durch die Gleichungen

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{m_e (x_e - a_e)}{\sqrt{2G}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e} \\ \frac{m_e (y_e - b_e)}{\sqrt{2G}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e} \\ \frac{m_e (z_e - c_e)}{\sqrt{2G}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e} \end{array} \right. = \frac{1}{V(1,1)}$$

dargestellt werden. Gleichzeitig gilt, zwischen den Differentialen dG und $d\Phi_1$ die Relation von der vorgeschriebenen Beschaffenheit

$$(17) \quad \frac{dG}{\sqrt{2G}} = \frac{d\Phi_1}{V(1,1)}.$$

Wir bilden nun das zweite vollständige Differential der Function G und der Function Φ_1

$$(18) \quad d^2G = \sum_e m_e ((x_e - a_e) d^2x_e + (y_e - b_e) d^2y_e + (z_e - c_e) d^2z_e) \\ + \sum_e m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2),$$

$$(19) \quad d^2\Phi_1 = \sum_e \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e} d^2x_e + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e} d^2y_e + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e} d^2z_e \right) + \sum_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_e \partial x_{e'}} dx_e dx_{e'} \\ + \sum_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_e \partial y_{e'}} dx_e dy_{e'} + \dots + \sum_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_e \partial z_{e'}} dz_e dz_{e'},$$

und sprechen die Forderung aus, dass, für beliebig veränderliche Werthe der zweiten Differentiale d^2x_e, d^2y_e, d^2z_e und beliebig aber fest gegebene Werthe der ersten Differentiale dx_e, dy_e, dz_e das Differential d^2G dem Differential $d^2\Phi_1$ bis auf einen endlichen Factor gleich werde. Die Gleichung (18) verwandelt sich durch die Division mit dt^2 in die charakteristische Relation (7). Die bestehenden Gleichungen (16) haben zur Folge, dass der erste Bestandtheil von d^2G und der erste Bestandtheil von $d^2\Phi_1$, welche die zweite Differentiale enthalten, die gewünschte Beschaffenheit besitzen, und dass der erstgenannte zu dem zweitgenannten in demselben Verhältnisse steht, wie der Ausdruck $\sqrt{2G}$ zu dem Ausdrucke $V(1,1)$. Deshalb muss die Gleichung gelten

$$(20) \quad \frac{d^2G}{\sqrt{2G}} = \frac{d^2\Phi_1}{V(1,1)}.$$

Damit unsere Forderung vollständig erfüllt sei, ist es darum nothwendig und hinreichend, dass der zweite Bestandtheil von d^2G und der zweite Bestandtheil von $d^2\Phi_1$, welche gleich quadratischen Formen der $3q$ Differentiale dx_e, dy_e, dz_e sind, ebenfalls dieses Verhältniss zu einander haben. So entspringt die Gleichung

$$(21) \quad \frac{\sum_e m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)}{\sqrt{2G}} = \frac{\sum_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_e \partial x_{e'}} dx_e dx_{e'} + \sum_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_e \partial y_{e'}} dx_e dy_{e'} + \dots + \sum_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_e \partial z_{e'}} dz_e dz_{e'}}{\sqrt{(1,1)}}.$$

Durch diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (16) werden die 3q Grössen a_e, b_e, c_e , für gegebene Werthe der Variablen x_e, y_e, z_e und der Differentiale dx_e, dy_e, dz_e , vollständig bestimmt, und das hervorgehende Werthsystem (a_e, b_e, c_e) repräsentirt eine Verallgemeinerung des Krümmungsmittelpunktes.

Bei dem mechanischen Problem, für welches die Kräftefunction U verschwindet, und nur eine Bedingungsgleichung (4*) gegeben ist, wird die obige Gleichung (6) zu der folgenden

$$(22) \quad \sum_e m_e \left(\frac{d^2 x_e}{dt^2} \delta x_e + \frac{d^2 y_e}{dt^2} \delta y_e + \frac{d^2 z_e}{dt^2} \delta z_e \right) = \lambda_1 \delta \Phi_1.$$

Mithin repräsentirt der Ausdruck $\lambda_1 \delta \Phi_1$ die Summe der Momente aller Drucke, welche durch die Bedingungsgleichung (4*) hervorgerufen werden. Aus dieser Gleichung sind die Folgerungen zu ziehen

$$(23) \quad \frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} = 0.$$

Durch die erste derselben wird die Wahl der Differentialquotienten $\frac{dx_e}{dt}, \frac{dy_e}{dt}, \frac{dz_e}{dt}$ beschränkt. Die zweite benutzen wir zu der Darstellung des Ausdruckes λ_1 . Wenn man das in (19) explicite hingeschriebene zweite Differential $d^2 \Phi_1$ durch die Grösse dt^2 dividirt, so erhalten die Grössen $\frac{d^2 x_e}{dt^2}, \frac{d^2 y_e}{dt^2}, \frac{d^2 z_e}{dt^2}$ respective die Factoren $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e}$, während die entsprechenden Grössen auf der linken Seite von (22) die Factoren $m_e \delta x_e, m_e \delta y_e, m_e \delta z_e$ aufweisen. Sobald daher in (22) statt dieser Ausdrücke die Ausdrücke $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e}$ substituirt werden, so stimmen die betreffenden Bestandtheile überein, und zugleich verwandelt sich der Ausdruck

$$\delta \Phi_1 = \sum_e \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e} \delta x_e + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e} \delta y_e + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e} \delta z_e \right)$$

in den Ausdruck

$$\sum_e \frac{1}{m_e} \left(\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e} \right)^2 \right) = (1,1).$$

Auf diese Weise folgt aus (19) und (22) für die Grösse λ_1 die Bestimmung

$$(24) \quad \lambda_1(1,1) = \Sigma \left(\frac{d^2 x_e}{dt^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e} + \frac{d^2 y_e}{dt^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e} + \frac{d^2 z_e}{dt^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e} \right) - \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2},$$

welcher man durch eine fernere Anwendung von (19) auch die Gestalt geben kann

$$(24^*) \quad \lambda_1(1,1) = - \Sigma_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_e \partial x_{e'}} \frac{dx_e}{dt} \frac{dx_{e'}}{dt} - \Sigma_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_e \partial y_{e'}} \frac{dx_e}{dt} \frac{dy_{e'}}{dt} - \dots \\ - \Sigma_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_e \partial z_{e'}} \frac{dz_e}{dt} \frac{dz_{e'}}{dt}.$$

Die Vergleichung dieses Resultats mit dem in (21) enthaltenen bringt alsdann die Gleichung hervor

$$(25) \quad \frac{-1}{\sqrt{2G}} = \frac{\lambda_1 \sqrt{(1,1)}}{\Sigma_e m_e \left(\left(\frac{dx_e}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_e}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_e}{dt} \right)^2 \right)}.$$

Dieselbe schliesst die Gleichung (12) in sich, und bezeichnet den Zusammenhang der Function $\sqrt{2G}$ mit der Function $\lambda_1 \sqrt{(1,1)}$, von denen die erstere eine Verallgemeinerung des Krümmungshalbmessers, und die zweite eine Verallgemeinerung von dem Begriffe des Druckes darstellt.

Beiläufig kann bemerkt werden, dass, wenn man in dem zu der Gleichung (22) führenden Variationsproblem statt der Function Φ_1 die Function G selbst wählt, das bezügliche System von Differentialgleichungen zu der Kategorie gehört, welche Journal f. M., Bd. 72, S. 38 vollständig integrirt ist. Zugleich folgt aus den dortigen Ausführungen, dass die aus $3q = n$ positiven Quadraten bestehende Form

$$\Sigma m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2),$$

sobald durch die an die Stelle von (4*) tretende Gleichung $G = \frac{1}{2\alpha}$ eine Variable eliminirt wird, in eine Form von $(n-1)$ Differentialen übergeht, welche für die Mannigfaltigkeit der $(n-1)$ zurückbleibenden Variablen, und von dem constanten positiven Krümmungsmasse α , das Quadrat des Linearelements darstellt.

2.

Nach den früher dargelegten Anschauungen können die so eben zur Sprache gebrachten Begriffe der Mechanik und der Geometrie folgendermassen ausgedehnt werden. Es sei x_a ein System von n veränderlichen Grössen, wo der Buchstabe a , wie auch später $b, c \dots$ die Reihe der Zahlen $1, 2, \dots, n$ durchläuft, $f(dx)$ bedeute eine wesentlich positive Form des p^{ten} Grades von den Differentialen dx_a , bei der die Coefficienten von den Variablen x_a beliebig abhängen, die Determinante aus den zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 f(dx)}{\partial x_a \partial x_b}$ sei nicht identisch gleich

Null, U und $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_l$ seien reine Functionen der Variablen x_a . Man verlangt nun, dass die Variablen x_a von einer independenten Variable t so abhängig gemacht werden sollen, dass die erste Variation des Integrals

$$(26) \quad \int \left(f \left(\frac{dx}{dt} \right) + U + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \dots + \lambda_l \Phi_l \right) dt$$

bei festen Anfangswerthen und Endwerthen der Variablen x_a verschwinde, während die l Gleichungen

$$(27) \quad \Phi_a = \text{Const.}$$

erfüllt sind. Dieses Problem verwandelt sich in das Variationsproblem des Integrals (5), wenn die n Variablen x_a in die $3q$ Coordinaten x_e, y_e, z_e übergehen, und die Form $f(dx)$ in die Form $\frac{1}{2} \Sigma m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)$ übergeht. Die Functionen $U, \Phi_1, \dots \Phi_l$, und die zu bestimmenden Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_l$ sind beide Male in gleicher Weise notirt.

Wir betrachten das Integral (26) zunächst unter der Annahme, dass keine Bedingungen (27) vorhanden sind, und dass die Function U gleich Null ist. Dann fällt die ausgesprochene Forderung mit der anderen Forderung zusammen, dass die erste Variation des Integrales

$$(28) \quad R = \int \sqrt{pf(dx)}$$

zu Null werde.*) Die Integrationswerthe x_a , welche dieser Forderung genügen, und durch die Bedingungen bestimmt sind, für einen Werth $t = t_0$ die Gleichungen $x_a = x_a(0)$ und $x'_a = x'_a(0)$ zu befriedigen, wo die Hinzufügung eines Striches die Differentiation nach der Variable t andeutet und die Constanten $x_a(0)$ und $x'_a(0)$ beliebig gegeben sind, werden in dem vorliegenden Falle *reine Functionen der Grössen $x_a(0)$ und der Verbindungen***)

$$(29) \quad x'_a(0)(t - t_0) = u_a.$$

Indem die Grössen $x_a(0)$ als constant, die Verbindungen u_a als veränderlich gelten, stellen die letzteren ein System von Normalvariablen für die Form $f(dx)$ dar.***) Der zugehörige Werth des Integrals R , von dem System $x_a(0)$ bis zu dem System x_a ausgedehnt, wird dann durch die Gleichung

$$(30) \quad R^p = pf_0(u)$$

ausgedrückt†); $f_0(u)$ geht aus der Form $f(dx)$ hervor, indem für die

*) Journal f. Mathematik, Bd. 74, S. 120 u. ff.

**) Journal f. Mathematik, Bd. 70, S. 86 u. ff.

***) Journal f. Mathematik, Bd. 72, S. 1 u. ff.

†) Journal f. Mathematik, Bd. 74, S. 126.

Variablen x_a die betreffenden Werthe $x_a(0)$, für die Differentiale dx_b die betreffenden Werthe u_b substituirt werden. Durch die Einführung der Variablen u_b in die Form $f(dx)$ entsteht die Transformationsgleichung

$$(31) \quad f(dx) = \varphi(du);$$

die resultirende Form des p^{ten} Grades von den Differentialen du_a , $\varphi(du)$, wird ein *Normaltypus* für die Form $f(dx)$ genannt.

Durch die Einführung der Normalvariablen u_a in die Functionen $U, \Phi_1, \dots \Phi_i$ verwandelt sich das allgemeinere zu variirende Integral (26) in das Integral

$$(26^*) \quad \int \left(\varphi \left(\frac{du}{dt} \right) + U + \lambda_1 \Phi_1 + \dots + \lambda_i \Phi_i \right) dt.$$

Bei der erwähnten speciellen Voraussetzung, wo statt der Variablen x_a die Coordinaten x_e, y_e, z_e eintreten, statt $f(dx)$ die Form

$$\frac{1}{2} \Sigma m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)$$

erscheint, denken wir uns an Stelle der Initialwerthe $x_a(0)$ die Coordinaten a_e, b_e, z_e . Weil nun das Variationsproblem des Integrales (2) für das Variationsproblem des Integrals (28) eintritt, und weil das Variationsproblem des Integrals (2) durch das Fortschreiten jedes Massenpunktes m_e in gerader Linie und mit gleichförmiger Geschwindigkeit, mithin durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_e &= a_e + x'_e(0) (t - t_0) \\ y_e &= b_e + y'_e(0) (t - t_0) \\ z_e &= c_e + z'_e(0) (t - t_0) \end{aligned}$$

aufgelöst wird, so sind unter den obwaltenden Verhältnissen die Normalvariablen u_a nichts anderes als die Coordinatendifferenzen

$$x_e - a_e, \quad y_e - b_e, \quad z_e - c_e.$$

Deshalb wird der Normaltypus $\varphi(du)$ mit der gegebenen Form

$$\frac{1}{2} \Sigma m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2).$$

identisch gleich, und die Function $2f_0(u)$ fällt mit der Function

$$2G = \Sigma m_e ((x_e - a_e)^2 + (y_e - b_e)^2 + (z_e - c_e)^2)$$

zusammen.

Das Variationsproblem des Integrals (26*) zieht allgemein die Gleichung nach sich

$$(32) \quad \Sigma_a \left(d \frac{\partial \varphi(u')}{\partial \dot{u}'_a} - \frac{\partial \varphi(u')}{\partial u'_a} \right) \delta u_a = \delta U + \lambda_1 \delta \Phi_1 + \dots + \lambda_i \delta \Phi_i,$$

die unabhängig von den Werthen der Variationen δu_a befriedigt werden

muss. Wir ersetzen die Variationen δu_a beziehungsweise durch die Normalvariablen u_a selber, und erhalten die Gleichung

$$(33) \quad \sum_a \left(d \frac{\partial \varphi(u')}{\partial u'_a} - \frac{\partial \varphi(u')}{\partial u_a} \right) u_a = \sum_a \frac{\partial U}{\partial u_a} u_a + \sum_{a,\gamma} \lambda_\gamma \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial u_a} u_a.$$

Es kommt jetzt darauf an, nachzuweisen, wie der auf der linken Seite dieser Gleichung befindliche Ausdruck mit der Function $f_0(u)$ zusammenhängt. Indem wir in dem Normaltypus $\varphi(u')$ statt der Differentialquotienten u'_a die Differentiale du_a wieder einführen, bilden wir die für alle Systeme du_a und δu_a gültige identische Relation

$$(34) \quad \sum_a d \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} \delta u_a = d \sum_a \left(\frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} \delta u_a - \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_a} du_a \right) + d \sum_a \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_a} du_a - \sum_a \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} d \delta u_a.$$

Das vollständige Differential $df_0(u)$ kann nun in der folgenden Weise dargestellt werden, wofern die Substitution der Grösse u_a an Stelle von δu_a durch Einschliessung des betreffenden Ausdruckes in eine eckige Klammer angedeutet wird,*)

$$(35) \quad df_0(u) = \sum_a \left[\frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_a} \right] du_a.$$

Ferner folgt aus dem Umstande, dass $\varphi(du)$ eine homogene Function des p^{ten} Grades von den Differentialen du_a ist, die Gleichung

$$(36) \quad p \varphi(du) = \sum_a \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} du_a.$$

Wenn man daher in (34) statt δu_a das bezügliche u_a substituirt, so entsteht die Gleichung

$$(37) \quad \sum_a d \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} u_a = d \left[\sum_a \left(\frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} \delta u_a - \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_a} du_a \right) \right] + d^2 f_0(u) - p \varphi(du),$$

welche den gesuchten Zusammenhang vollständig aufdeckt. Sobald die Zahl $p=2$ ist, wird der Ausdruck

$$\sum_a \left(\frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} \delta u_a - \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_a} du_a \right)$$

nach einer Grundeigenschaft der quadratischen Formen gleich Null. Für die Voraussetzung $p=2$ gilt daher die charakteristische Relation

$$(38) \quad \sum_a d \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} u_a = d^2 f_0(u) - 2 \varphi(du).$$

*) Journal f. Mathematik, Bd. 72, S. 8.

Wir werden von jetzt ab annehmen, dass diese Voraussetzung besteht. Durch die Anwendung von (38) erhält somit die Gleichung (33) die definitive Gestalt

$$(39) \quad \frac{\partial^2 f_0(u)}{\partial t^2} - 2\varphi\left(\frac{du}{dt}\right) = \sum_a \frac{\partial\left(\varphi\left(\frac{du}{dt}\right) + U\right)}{\partial u_a} u_a + \sum_{\alpha, \gamma} \lambda_\gamma \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial u_\alpha} u_\alpha.$$

In dieser Gleichung ist die obige Gleichung (9) als specielles Resultat eingeschlossen, und es können an dieselbe ähnliche Betrachtungen angeknüpft werden, wie dort geschehen ist.

3.

In dem Falle, dass die Function U gleich Null, und wieder die Zahl $p = 2$ ist, wird das Variationsproblem des Integrals (26) zu demjenigen, welches Journal f. Mathematik Bd. 71, S. 275 aufgestellt ist, Mit den dortigen Bezeichnungen übereinstimmend sei

$$(40) \quad f(dx) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} a_{a,b} dx_a dx_b,$$

ferner

$$(41) \quad |a_{a,b}| = \Delta, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{a,b}} = A_{a,b}.$$

Den Functionen $y_1, y_2, \dots, y_i$, welche dort gleich Constanten zu setzen sind, entsprechen gegenwärtig die Functionen $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_i$. Die Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ sind mit denselben Zeichen notirt. Wir erwägen nun die Voraussetzung, dass nur eine Function Φ_1 vorhanden sei. Alsdann liefert das Verschwinden der ersten Variation des gegebenen Integrals (26) die Gleichung

$$(42) \quad \sum_a \left(d \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_a} \right) \delta x_a = \lambda_1 \delta \Phi_1.$$

Um den Ausdruck λ_1 mittelst der nunmehr geltenden Gleichungen

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{d\Phi_1}{dt} = \sum_c \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_c} \frac{dx_c}{dt} = 0 \\ \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} = \sum_c \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_c} \frac{d^2 x_c}{dt^2} + \sum_{a,b} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_a \partial x_b} \frac{dx_a}{dt} \frac{dx_b}{dt} = 0 \end{cases}$$

zu bestimmen, kann man in (42) statt der Variationen δx_a solche Ausdrücke einführen, dass der Factor von $\frac{d^2 x_c}{dt^2}$ auf der linken Seite dieser Gleichung mit $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_c}$, dem betreffenden Factor in dem Ausdrucke $\frac{d^2 \Phi_1}{dt^2}$, übereinstimmt. Da auf der linken Seite von (42) als Factor der Verbindung $\frac{d^2 x_c}{dt^2} \delta x_a$ der Coefficient $a_{a,c}$ der Form $2f(dx)$ erscheint,

so ist für den angegebenen Behuf die Variation δx_a durch den Ausdruck

$$(44) \quad \sum_e \frac{A_{a,e}}{\Delta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e}$$

zu ersetzen. Durch diese Substitution geht die vollständige Variation $\delta \Phi_1 = \sum_a \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_a} \delta x_a$ in den Ausdruck

$$(45) \quad \sum_{a,e} \frac{A_{a,e}}{\Delta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_a} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e} = (1,1)$$

über, und es entsteht für λ_1 die Darstellung

$$(46) \quad \lambda_1 (1,1) = \sum_a \left(d \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a} - \frac{\partial f(x')}{\partial t} \right) \sum_e \frac{A_{a,e}}{\Delta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_a} - \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2},$$

welche mit der an dem angeführten Orte gegebenen Darstellung übereinstimmt. Bei dieser Gelegenheit ist hervorgehoben worden, dass, wenn in dem betreffenden Variationsproblem statt des Systems der Variablen x_a ein beliebiges System von neuen unabhängigen Variablen eingeführt wird, sowohl der Ausdruck (1,1), wie auch der Ausdruck λ_1 in die aus den neuen Elementen entsprechend gebildeten Ausdrücke übergehen.*) Wird daher das vorhin definirte System der *Normalvariablen* u_a eingeführt, und bedient man sich für den *Normaltypus* $\varphi(du)$ der Bezeichnungen

$$(47) \quad \begin{cases} \varphi(du) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} p_{a,b} du_a du_b \\ |p_{a,b}| = \Pi, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p_{a,b}} = P_{a,b} \end{cases}$$

so entstehen aus (45) und (46) respective die neuen Gleichungen

$$(48) \quad \sum_{a,e} \frac{P_{a,e}}{\Pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_a} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_e} = (1,1),$$

$$(49) \quad \lambda_1 (1,1) = \sum_a \left(d \frac{\partial \varphi(u')}{\partial u'_a} - \frac{\partial \varphi(u')}{\partial t} \right) \sum_e \frac{P_{a,e}}{\Pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_a} - \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2}.$$

Für das System von Normalvariablen u_a ist das zugehörige System von Grössen $x_a(0)$ von entscheidender Bedeutung. Nach der in (29) aufgestellten Definition verschwinden die sämtlichen Normalvariablen u_a , sobald das Werthsystem x_a die Gleichungen $x_a = x_a(0)$ befriedigt; ferner genügt eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung

*) Wenn statt der constant zu setzenden Function Φ_1 eine constant zu setzende Function dieser Function eingeführt wird, so bleibt noch das Product $\lambda_1 V(1,1)$ invariant, welches die Verallgemeinerung von dem Begriffe des Druckes repräsentirt.

welche von dem Werthsystem $u_a = 0$ ausgeht, und bei der die Verhältnisse der Variablen u_a zu einander ungeändert bleiben, dem Variationsproblem des Integrals (28). Dass diese Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung unter den Voraussetzungen des Artikels 1. nichts anderes bedeutet, als das Fortschreiten jedes Massenpunktes m_e in gerader Linie und mit gleichförmiger Geschwindigkeit vom Orte (a_e, b_e, c_e) aus, ist mehrfach erwähnt worden. Wie früher das Werthsystem a_e, b_e, c_e determinirt ist, so werden wir jetzt das Werthsystem $x_a(0)$ durch gewisse Forderungen determiniren; und zwar ist hiezu der explicite Ausdruck der Variablen x_a durch die Variablen u_a und die festen Werthe $x_a(0)$ nicht erforderlich.

Die erste dieser Forderungen ist darauf gerichtet, dass das Differential $df_0(u)$ dem Differential $d\Phi_1$ für beliebige Werthe der Differentiale du_a bis auf einen endlichen Factor gleich werde. Wegen der Relation (35) müssen daher die Grössen $\left[\frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_a}\right]$ zu den bezüglichen Grössen $\frac{\partial \Phi_1}{\partial u_a}$ in einem und demselben Verhältniss stehen. Das gleiche Verhältniss muss, da nach (47)

$$\frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_a} = p_{a,1} \delta u_1 + p_{a,2} \delta u_2 + \dots p_{a,n} \delta u_n$$

ist, die Grösse $[\delta u_a] = u_a$ zu der Verbindung $\sum_e \frac{p_{a,e}}{\Pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_e}$ haben, und auch der Ausdruck $\sqrt{[2\varphi(\delta u)]}$, der dem Ausdrucke $\sqrt{2f_0(u)}$ gleich ist,*) zu dem Ausdrucke $\sqrt{(1,1)}$, der durch die Gleichung (48) definirt wird. Aus diesen Gründen gelten die Gleichungen

$$(50) \quad \frac{u_a}{\sqrt{2f_0(u)}} = \frac{\sum_e \frac{p_{a,e}}{\Pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_e}}{\sqrt{(1,1)}},$$

und die Gleichung

$$(51) \quad \frac{df_0(u)}{\sqrt{2f_0(u)}} = \frac{d\Phi_1}{\sqrt{(1,1)}}.$$

Die zweite Forderung, bei der die zweiten Differentiale d^2u_a als unabhängig veränderlich, die ersten Differentiale als beliebig aber fest gewählt angesehen werden, wird durch die Gleichung dargestellt,

$$(52) \quad \frac{d^2f_0(u) - \sum_a \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial u_a} u_a}{\sqrt{2f_0(u)}} = \frac{d^2\Phi_1}{\sqrt{(1,1)}};$$

dieselbe ist in Ansehung der zweiten Differentiale befriedigt, weil die

*) Journal f. Mathematik, Bd. 72, S. 7, Formel (13).

Gleichung (51) besteht. Die charakteristische Relation (38), welche zu der beabsichtigten Umformung von (33) in (39) gedient hat, bewirkt auch die beabsichtigte Umformung von (52) in die Gleichung

$$(53) \quad \frac{\sum_a d \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} u_a - \sum_a \frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a} u_a + 2\varphi(du)}{V 2f_0(u)} = \frac{d^2 \Phi_1}{V(1,1)}.$$

Die Anwendung von (50) führt zu der Darstellung

$$(54) \quad \frac{2\varphi(du)}{V 2f_0(u)} = - \sum_a \left(d \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_a} - \frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a} \right) \frac{\sum_r \frac{P_{a,r}}{\Pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_r}}{V(1,1)} + \frac{d^2 \Phi_1}{V(1,1)}.$$

Da nun die rechte Seite dieser Gleichung, durch dt^2 dividirt, bis auf das Vorzeichen mit der rechten Seite von (49) übereinstimmt, so ergibt sich das Resultat

$$(55) \quad \frac{-1}{V 2f_0(u)} = \frac{\lambda_1 V(1,1)}{2\varphi(u)},$$

welches die Gleichung (25) als besonderen Fall umfasst.

4.

Durch die Gleichung (51), welche vermöge der Unabhängigkeit der Differentiale du_a ein System von $(n-1)$ unabhängigen Gleichungen vertritt, und durch die zuletzt gewonnene Gleichung (55) sind die n Grössen $x_a(0)$, welche dem System der Normalvariablen zugehören, indirect bestimmt. Um eine directe Bestimmung zu erhalten, fassen wir die schon erwähnte Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung ins Auge, die das Variationsproblem des Integrals (28) auflöst, und sich von dem Werthsystem $u_a = 0$ bis zu dem gegebenen die Gleichung $\Phi_1 = \text{Const.}$ befriedigenden Werthsysteme u_a erstreckt. Diese Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, auf die Variablen x_a bezogen, dehnt sich von dem Werthsystem $x_a(0)$ bis zu dem die Gleichung $\Phi_1 = \text{Const.}$ befriedigenden Werthsystem x_a aus, welches dem Werthsystem u_a correspondirt. Der zugeordnete Werth des Integrals R wird in den Normalvariablen u_a nach (30), da $p=2$ ist, durch die Gleichung

$$(56) \quad R = \sqrt{2f_0(u)}$$

ausgedrückt. Wenn bei der Fortsetzung der in Rede stehenden Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung die Variablen x_a die Incremente Dx_a erhalten, so erlaubt der Ausdruck $\frac{df_0(u)}{V 2f_0(u)}$ in den Variablen x_a die Darstellung*)

*) Journal f. Mathematik, Bd. 74, S. 128.

$$(57) \quad \frac{df_0(u)}{\sqrt{2f_0(u)}} = \frac{\sum_a \frac{\partial f(Dx)}{\partial Dx_a} dx_a}{\sqrt{2f(Dx)}}.$$

Durch die Gleichung (45) ist die Verbindung (1,1) in den Variablen x_a ausgedrückt. Wir dürfen daher an die Stelle von (51) die Gleichung setzen

$$(58) \quad \frac{\sum_a \frac{\partial f(Dx)}{\partial Dx_a} dx_a}{\sqrt{2f(Dx)}} = \frac{d\Phi_1}{V(1,1)}.$$

Vermöge derselben werden die Verhältnisse der Differentiale Dx_a , das heisst, es wird das *Endelement* der bezeichneten Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung in derjenigen Weise bestimmt, für welche J. f. M., Bd. 74, S. 144 der Ausdruck gebraucht ist, dass das *Endelement* Dx_a gegen die Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung $\Phi_1 = \text{Const.}$ mit Rücksicht auf die Form $2f(Dx)$ normal sei.

In der Gleichung (55) kann man vermöge (31) die Form $2\varphi(u')$ durch die Form $2f(x')$ ersetzen, und mittelst der Gleichungen (45) und (46) die Verbindung $\lambda_1 \sqrt{(1,1)}$ in den Werthsystemen x_a und $\frac{dx_a}{dt}$ darstellen. So entsteht die Gleichung

$$(59) \quad -\frac{1}{R} = \frac{\lambda_1 \sqrt{(1,1)}}{2f(x')},$$

welche den Werth des Integrals R in den Werthsystemen x_a und $\frac{dx_a}{dt}$ angibt.

Die Gleichungen (58) und (59) bestimmen also das Werthsystem $x_a(0)$ durch die Bedingungen, dass die von demselben ausgehende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche die erste Variation des Integrals (28) zum Verschwinden bringt, auf ein gegebenes, der Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung angehörendes Werthsystem x_a hinauskomme, während das betreffende Endelement Dx_a gegen diese Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung mit Rücksicht auf die Form $2f(Dx)$ normal ist, und das zugehörige Integral R den vorgeschriebenen Werth annimmt. Denkt man sich umgekehrt die in Rede stehende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung von dem Werthsysteme x_a ausgehend, so wird der Verlauf derselben durch dieses System und durch das Element Dx_a vollständig bestimmt, und der vorgeschriebene Werth des Integrals R determinirt schliesslich das betreffende Werthsystem $x_a(0)$.*) Die Möglichkeit dieser Bestimmung ist dabei vorausgesetzt. Dass die Gleichungen (58) und (59) die Eigenschaft haben, wenn statt der Variablen x_a ein neues System von unabhängigen

*) Journal f. Mathematik, Bd. 74, S. 130 u. ff.

Variablen eingeführt wird, und auch wenn die constant zu setzende Function Φ_1 durch eine constant zu setzende Function dieser Function ersetzt wird, in die aus den neuen Elementen entsprechend gebildeten Gleichungen überzugehen, erkennt man leicht. Die gegebene Bestimmung ist also von der Wahl des Systems von Variablen und von der Wahl der Gestalt der Function Φ_1 vollkommen unabhängig. Sobald in den Betrachtungen des Artikels I nur ein einziger Massenpunkt angenommen wird, so ist die bezeichnete Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung die von dem Punkte (x_1, y_1, z_1) , normal gegen die Oberfläche $\Phi_1 = \text{Const.}$ gerichtete gerade Linie, und das Abschneiden der Länge des Krümmungshalbmessers von dem Punkte (x_1, y_1, z_1) aus bestimmt den Krümmungsmittelpunkt (a_1, b, c_1) .

Wenn man die Grössen x_a als fest, die Grössen $\frac{dx_a}{dt}$ als veränderlich, und nur durch die Gleichung aus (43)

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0$$

beschränkt ansieht, und wenn man die Frage aufwirft, für welche Werthsysteme $\frac{dx_a}{dt}$ das erste Differential des in (59) definirten Ausdruckes $\frac{1}{R}$ verschwindet, so hat man ein Problem de maximis et minimis ausgesprochen, welches aus dem allgemeineren Problem de maximis et minimis, das Journal f. M. Bd. 71, S. 277 aufgestellt und erörtert ist, bei der Annahme $l = 1$ hervorgeht. Die für dieses Problem an jenem Orte mitgetheilten Resultate sind daher auf das gegenwärtig vorliegende Problem ohne Weiteres anwendbar. Es leuchtet ein, dass das bezeichnete Problem in dem so eben erwähnten einfachsten Falle des Artikels I zu dem Problem des grössten und kleinsten Krümmungshalbmessers wird.

Bei der Vergleichung der allgemeineren zuletzt gefundenen Resultate mit den specielleren früher aufgestellten muss es auffallen, dass die Gleichungen (39) und (52) beziehungsweise einen der Ausdrücke

$$\sum_a \frac{\partial \varphi \left(\frac{du}{dt} \right)}{\partial u_a} u_a \quad \text{und} \quad \sum_a \frac{\partial \varphi (du)}{\partial u_a} u_a$$

enthalten, der in den entsprechenden Gleichungen (9) und (20) nicht vorkommt. Wie hervorgehoben ist, erscheint in den letzteren Gleichungen statt der Form $f(dx)$ die Form mit constanten Coefficienten $\frac{1}{2} \sum_e m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)$, die Normalvariablen u_a gehen in die Differenzen $(x_e - a_e)$, $(y_e - b_e)$, $(z_e - c_e)$ über, der Normaltypus $\varphi(du)$ fällt mit der Form $\frac{1}{2} \sum_e m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)$ selbst zusammen, und die Function $f_0(u)$ wird zu der Function G . Unter diesen Umständen ist

der Normaltypus $\varphi(du)$ eine Form mit constanten Coefficienten, und sobald $\varphi(du)$ eine Form mit constanten Coefficienten wird, muss der Ausdruck $\sum_a \frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a} u_a$ offenbar verschwinden. Es ist aber Journal f. M., Bd. 70, S. 92 u. ff. auch nachgewiesen, dass, wenn die Form $f(dx)$ in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann, der Normaltypus $\varphi(du)$ eine solche Form darstellt, und dass der Ausdruck $\sum_a \frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a} u_a$ nur dann verschwinden kann, wenn die Form $f(dx)$ in eine Form mit constanten Coefficienten transformirbar ist. Die linke Seite der auf S. 94 mit (59) bezeichneten Gleichung geht nämlich mit $(t - t_0)$ multiplicirt, in den Ausdruck $\sum_a \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial u_a} u_a$ über. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden des Ausdruckes $\sum_a \frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a} u_a$ besteht also darin, dass die Form $f(dx)$ in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann.*) Da ferner im Eingange verlangt worden ist, dass die quadratische Form $f(dx)$ wesentlich positiv und von nicht verschwindender Determinante sei, so muss der Normaltypus $\varphi(du)$ dieselben Eigenschaften haben, und ist daher, wenn die Form $f(dx)$ in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann, nothwendig gleich dem Aggregat der Quadrate von n Differentialen. Aus diesen Ursachen repräsentiren die Voraussetzungen der thatsächlich geltenden Mechanik, welche dem Artikel 1 zu Grunde liegen, der Sache nach die grösste Allgemeinheit, welche bei einer wesentlich positiven quadratischen Form $f(dx)$ mit dem Verschwinden des Ausdruckes $\sum_a \frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a} u_a$ vereinbar ist.

Wenn man die Variablen x_a mit den Verbindungen $\sqrt{m_e}(x_e - a_e)$, $\sqrt{m_e}(y_e - b_e)$, $\sqrt{m_e}(z_e - c_e)$ übereinstimmen lässt, so fällt die Form $\frac{1}{2} \sum_e m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)$ mit der Form $\frac{1}{2} \sum_a dx_a^2$ zusammen. Es ist schon Journal f. M., Bd. 71, S. 284 auseinandergesetzt worden, wie bei der Voraussetzung $f(dx) = \frac{1}{2} \sum_a dx_a^2$ die Theorie der Function $\lambda_1 \sqrt{(1,1)}$ mit der von Herrn Kronecker gegebenen Ausdehnung der Theorie der Krümmung (Monatsbericht der Berliner Akademie, August 1869) auf das genaueste zusammenhängt. In der That coincidirt die Grösse, welche Herr Kronecker ϱ genannt hat, mit derjenigen, welche oben $\sqrt{2G}$ oder R genannt worden ist, und die in dem Artikel 1 von uns gegebene Ausdehnung des Begriffes des Krümmungsmittelpunktes

*) Ein directes Criterium für diese Beschaffenheit der quadratischen Form $f(dx)$ ist Journal f. M., Bd. 70, S. 94 u. ff. aufgestellt und bewiesen.

unterscheidet sich von der durch Herrn Kronecker entwickelten nur durch die Anknüpfung an die Vorstellungen der Mechanik und durch die Wahl der zum Ziele führenden Schritte. Auch das angedeutete *Problem de maximis et minimis* entspricht genau demjenigen, das Herr Kronecker an der erwähnten Stelle behandelt hat. Um aber zu erklären, weshalb der Zugang zu diesen Untersuchungen von der Mechanik und von der Geometrie aus möglich ist, weshalb die Resultate der Mechanik, die in den Gleichungen (9) und (39) enthalten sind, und die Resultate der Geometrie, welche sich auf die Gleichungen (20) und (52) stützen, von denselben Algorithmen abhängen können, möchte ich an ein Wort erinnern, das Gauss in der Schrift: *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* in Bezug auf die Beweisführung des Fundamentaltheorems der algebraischen Gleichungen ausgesprochen hat, das jedoch in einem viel weiteren Sinne gilt. Es lautet so: „Im Grunde gehört aber der eigentliche Inhalt der ganzen Argumentation einem höheren von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstracten Grössenlehre an, dessen Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Grössencombinationen sind, einem Gebiete, welches zur Zeit noch wenig angebaut ist, und in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache.“

Bonn, den 16. Februar 1873.