Die magnetische Leitfähigkeit im Hochfrequenzmaschinenbau.

Von

Heinrich Faßbender.

Einleitung. Bei statischer und dynamischer Magnetisierung ist die magnetische Leitfähigkeit durch die Grundgleichung des magnetischen Kreises

$$\Phi = 0,4 \cdot \pi \cdot (N \cdot i) \cdot \Lambda$$

definiert. Die magnetische Leitfähigkeit ist für den Fall der statischen Magnetisierung in einfacher Weise zu berechnen. Es ist nämlich

$$\Lambda = \mu \cdot \frac{S}{l}.$$

Sobald Wirbelströme auftreten, gilt dieser einfache Zusammenhang zwischen dem Induktionsfluß Φ und der magnetomotrischen Kraft $0,4 \cdot \pi (N \cdot i)$ nicht mehr.

In der praktischen Elektrotechnik setzt man bekanntlich für Kreise mit Wechselstromerregung

$$\Phi_{\max} = 0,4 \pi \cdot N \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} \cdot \Lambda.$$

Hierin steckt zunächst die Annahme, daß der Magnetisierungsstrom bei sinusförmiger Induktion ebenfalls sinusförmig ist. Die magnetische Leitfähigkeit definiert man ebenso wie bei der statischen Magnetisierung und entnimmt aus der statischen Magnetisierungskurve den zu $\Phi_{\max}$ gehörigen Wert der Permeabilität. Innerhalb der angestrebten Genauigkeit ist man dazu auch berechtigt, da bei 50 Perioden und einer Blechstärke von 0,5 mm der Einfluß der Wirbelströme vernachlässigt werden darf (wohlgemerkt der Einfluß der Wirbelströme auf die magnetische Leitfähigkeit und nicht auf die Verluste).

Im Hochfrequenzmaschinenbau ist diese Annahme unberechtigt. Trotzdem bietet es Vorteile, auch hier den Begriff der magnetischen Leitfähigkeit beizubehalten. Für die magnetische Leitfähigkeit im Hochfrequenzkreis werde ich bestimmte Formeln angeben. Bei Anwendung dieser Formeln kann der magnetische Kreis bei Hochfrequenz genau so behandelt werden wie bei niederen Frequenzen, ohne daß man sich um die Ursache der Veränderung der Leitfähigkeit, der sogenannten magnetischen Hautwirkung, weiter zu kümmern braucht.

Die Voraussetzung, von der wir ausgehen, ist ein hochfrequenter sinusförmiger magnetischer Fluß. Dieser kann entweder dadurch entstanden sein, daß ein magnetischer Kreis mit konstanter magnetischer Leitfähigkeit durch einen hochfrequenten Strom erregt wird, oder dadurch, daß bei konstanter Erregung die magnetische Leitfähigkeit hochfrequenten Charakter hat. Der letzte Fall trifft bei den Hochfrequenzmaschinen nach dem Induktortyp zu. Jedoch auch hier ist nur der Gesamtwert der magnetischen Leitfähigkeit des geschlossenen magnetischen Kreises eine periodische Funktion infolge der periodischen Vertauschung eines Zahns mit einer Zahnücke. Die magnetische Leitfähigkeit der übrigen Teile des magnetischen Kreises ist zeitlich konstant und außer von Material und Dimensionen nur von der Frequenz des Flusses abhängig. Für diesen ist es aber gänzlich gleichgültig, ob die Erregung in der beschriebenen Weise durch Gleichstrom oder durch Hochfrequenzstrom erfolgt. Wir können also bei unsern folgenden Betrachtungen den begrifflich einfacheren Fall eines konstanten Werts der magnetischen Leitfähigkeit und eine hochfrequente Erregung annehmen. Ein Unterschied besteht allerdings zwischen beiden Fällen. Bei der Wechselstromerregung pendelt die Induktion um den Mittelwert Null, bei der Gleichstromerregung behält der Fluß stets das gleiche Vorzeichen. Da wir jedoch bei den theoretischen Betrachtungen gezwungen sind, ein konstantes mittleres μ anzunehmen, so folgt hieraus keinerlei Verschiedenheit in der

Behandlung beider Fälle. Als Mittelwert wird man naturgemäß den arithmetischen Mittelwert der statischen Magnetisierungsschleife wählen, die zwischen den gleichen extremen Werten der Induktion aufgenommen ist.

Die theoretische Berechnung der magnetischen Leitfähigkeit eines beliebigen Teils des magnetischen Kreises unter Berücksichtigung des Einflusses der Wirbelströme läßt sich nur unter gewissen Voraussetzungen verhältnismäßig einfach mathematisch behandeln; einmal unter der Annahme, daß wir ein massives Material von kreisrundem Querschnitt haben, und zweitens, daß wir Bleche oder Blechpakete haben, bei denen die Breite der Bleche groß ist gegen die Dicke der Bleche. Bei der Durchrechnung der einzelnen Teile des magnetischen Kreises wird man die eine oder andere Annahme stets machen dürfen, ohne sich von der Wirklichkeit allzusehr zu entfernen.

In der folgenden Betrachtung werde ich beide Fälle getrennt durchführen.

1. Berechnung der magnetischen Leitfähigkeit bei Hochfrequenz und kreisrundem Querschnitt des Materials. Ich kann in diesem Abschnitt auf meine Arbeit über das Verhalten der Heuslerschen Legierungen bei Hochfrequenz¹⁾ verweisen und beschränke mich auf die Einführung des Begriffs der magnetischen Leitfähigkeit. Die Rechnung, die dort durchgeführt ist, gilt für einen geschlossenen streuungslosen Ring. Unter gewissen Annahmen, die ich hier nicht zu erwähnen brauche, weil ich sie bei der Durchrechnung der Leitfähigkeit der Bleche nochmals diskutieren muß, ergab sich für den Zusammenhang der Feldstärke $\mathfrak{H}_\rho$ für einen Zylinder mit dem Radius ρ und der Feldstärke $\mathfrak{H}_r$ auf der Oberfläche des Materials, d. h. der magnetomotorischen Kraft (beide gemessen in absoluten Einheiten) die folgenden Gleichungen (vgl. die oben angeführte Arbeit S. 486 oben)

$$\frac{\mathfrak{H}_\rho}{\mathfrak{H}_r} = \frac{\text{ber}(m\rho) + j \text{bei}(m\rho)}{\text{ber}(mr) + j \text{bei}(mr)}, \quad (1)$$

wo

$$m^2 = \frac{4\pi \cdot \mu \cdot \omega}{s}$$

(s ist der spez. Widerstand in absoluten Einheiten), oder wenn man zu den Effektivwerten übergeht:

$$\frac{H_\rho}{H_r} = \left(\frac{\text{ber}^2(m\rho) + \text{bei}^2(m\rho)}{\text{ber}^2(mr) + \text{bei}^2(mr)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

Durch Integration über ρ erhält man für die Gesamtzahl aller Feldlinien, effektiv gemessen, in absoluten Einheiten (vgl. Gl. II b S. 487 der angeführten Arbeit)

$$Z = \frac{2\pi \cdot H_0 \cdot r}{m} (\text{bei}'^2(mr) + \text{ber}'^2(mr))^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Hierin ist

$$H_0 = H_r (\text{ber}^2(mr) + \text{bei}^2(mr))^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

(Gl. III S. 487 der ang. Arbeit). Setzt man den Wert für H_0 aus Gleichung (4) in Gleichung (3) ein, so ergibt sich

$$\frac{Z}{H_r} = \frac{2r\pi}{m} \frac{(\text{bei}'^2(mr) + \text{ber}'^2(mr))^{\frac{1}{2}}}{(\text{ber}^2(mr) + \text{bei}^2(mr))^{\frac{1}{2}}}. \quad (5)$$

Die Ableitung der Gleichungen ist der angeführten Arbeit zu entnehmen. Durch Multiplikation mit dem mittleren, konstant angenommenen μ erhält man aus der gesamten Feldlinienzahl den magnetischen Fluß

$$\Phi_{\text{eff}} = \mu \cdot Z \quad \text{oder} \quad Z = \frac{\Phi_{\text{eff}}}{\mu}. \quad (6)$$

¹⁾ Vgl. Archiv f. El. II, 11, S. 475 ff; 1914.

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (5) ein, so ergibt sich für unsere Voraussetzung: sinusförmige Kurve von Φ und $\mathfrak{S}$

$$\frac{\Phi_{\max}}{H_{r\max}} = \frac{\Phi_{\text{eff}}}{H_{r\text{eff}}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \mu}{m} \frac{(\text{bei}'^2(mr) + \text{ber}'^2(mr))^{1/2}}{(\text{ber}^2(mr) + \text{bei}^2(mr))^{1/2}}. \quad (7)$$

Darin ist H_r in absoluten Einheiten einzusetzen. Nun ist

$$H_{r\max} = \frac{0,4 \cdot \pi \cdot N \cdot J \cdot \sqrt{2}}{l} \quad (J \text{ gemessen in Amp.}).$$

Man erhält also

$$\frac{\Phi_{\max}}{0,4 \cdot \pi \cdot N \cdot J \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \mu}{m \cdot l} \frac{(\text{bei}'^2(mr) + \text{ber}'^2(mr))^{1/2}}{(\text{ber}^2(mr) + \text{bei}^2(mr))^{1/2}} = \Lambda. \quad (8)$$

Für den Wert μ setzen wir den arithmetischen Mittelwert aus der statischen Magnetisierungskurve mit der gleichen maximalen Induktion ein, als sich jeweils aus dem maximalen Fluß und dem Querschnitt unter der Annahme einer gleichmäßigen Induktion ergibt. Abgesehen davon, daß wir entgegen der Wirklichkeit einen konstanten μ -Wert einsetzen, hat das zur Voraussetzung, daß die Werte der wahren Permeabilität von der Frequenz unabhängig sind. Gegen die Annahme einer konstanten Permeabilität hat man in der Elektrotechnik wenig Bedenken, da man dieselbe Annahme auch sonst in der Wechselstromtechnik zu machen gezwungen ist und eine genügende Übereinstimmung der Berechnung mit der Messung erhält. Anders verhält es sich damit, daß wir einen der statischen Kurve entnommenen Mittelwert der Permeabilität einsetzen. Man neigt bei oberflächlicher Überlegung zunächst zu der Annahme, daß man einen der dynamischen Kurve entnommenen Mittelwert einsetzen müßte. Das wäre jedoch gerade ein Fehler. Die dynamischen Magnetisierungskurven stellen keineswegs den Zusammenhang zwischen der Feldstärke und der Induktion für ein gewisses Raumelement dar, sondern vielmehr den Zusammenhang zwischen der aus der Wicklung berechneten Durchflutung einerseits und dem gesamten Induktionsfluß, oder einer unter der Annahme gleichmäßiger Verteilung berechneten mittleren Induktion andererseits. Dieser Wert der Feldstärke gilt nur für die Raumelemente der Oberfläche, während die mittlere Induktion nur in einer Zylinderfläche, die irgendwo im Innern liegt, vorhanden ist. Ein etwa der dynamischen Magnetisierungskurve entnommener Wert der Permeabilität wäre also begrifflich etwas ganz anderes als die „wahre“ Permeabilität für ein bestimmtes Raumelement, die wir als das Verhältnis der wirklich dort vorhandenen Induktion zu der ebenfalls dort wirklich vorhandenen Feldstärke definieren. Meine Ansicht geht dahin, daß für ein bestimmtes Raumelement die wahre Permeabilität von der Frequenz unabhängig ist. Diese Behauptung läßt sich allerdings wohl kaum direkt beweisen, da diese Permeabilität dem Experiment nicht zugänglich ist. Ich möchte auch die Frage dahingestellt sein lassen, ob die Konstanz der so definierten Permeabilität auch für äußerst hohe Frequenzen erhalten bleibt. Für Frequenzen bis 150 000 sehe ich mich dazu berechtigt, da ich unter dieser Annahme in meiner Arbeit über Heuslersche Legierungen eine gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und den gemessenen Werten der mittleren Induktion erhalten habe.

Die Gleichung (8) ist also nichts weiter als ein Ausdruck für die magnetische Leitfähigkeit, bezogen auf den gesamten magnetischen Kreis.

Betrachtet man nur einen Teil des gesamten Kreises, so ist für l die Länge des betreffenden Stücks einzusetzen. $N \cdot J$ ist dann die Zahl der notwendigen Amperewindungen oder die Größe der Durchflutung, um den Fluß durch dieses Stück des Kreises hindurchzudrücken. In der Praxis des Hochfrequenzmaschinenbaus nimmt das Argument mr nur sehr große Werte an. Für diese sind die ber- und bei-Funktionen in den Tabellen nicht angegeben. Wie ich zeigen werde, ist in diesen Fällen die Berechnung aber gerade

besonders einfach, da wir alsdann für die ber- und bei- Funktionen Näherungswerte einsetzen dürfen. Diese Näherungsformeln für die ber- und bei- Funktionen lauten:

$$\begin{aligned}\text{ber}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot x}} \cdot e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right), \\ \text{bei}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2 \pi x}} \cdot e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right), \\ \text{ber}'(x) &= \text{ber}(x) \left\{ -\frac{1}{2x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \text{tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right) \right\}, \\ \text{bei}'(x) &= \text{bei}(x) \left\{ -\frac{1}{2x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \text{ctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \right) \right\}.\end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in unsere Formel (8) ein, so hebt sich der Faktor

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2 \pi x}} \cdot e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \right)^2$$

im Zähler und Nenner fort. Der Nenner hat dann die Form

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha, \quad \text{wo} \quad \alpha = \left(\frac{m r}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right),$$

er ist also = 1.

Wir erhalten folgenden Ausdruck für die magnetische Leitfähigkeit:

$$\Lambda = \frac{2 \pi \cdot r \cdot \mu}{m \cdot l} \sqrt{\left\{ \cos^2 \alpha \left\{ -\frac{1}{2 m r} + \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \text{tg} \alpha) \right\}^2 + \sin^2 \alpha \left\{ -\frac{1}{2 m r} + \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \text{ctg} \alpha) \right\}^2 \right\}}.$$

Hieraus ergibt sich unschwer folgender besonders einfache Ausdruck für die magnetische Leitfähigkeit:

$$\Lambda = \pm \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \mu}{m \cdot l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2 \cdot m \cdot r} \right). \quad 8a)$$

Von diesen beiden Werten hat nur der positive praktische Bedeutung.

2. Berechnung der magnetischen Leitfähigkeit bei Hochfrequenz in Blechen und Blechpaketen. Für diesen Fall, der im Hochfrequenzmaschinenbau gerade besondere praktische Bedeutung hat, werde ich im folgenden aus den Maxwellschen Gleichungen die Formeln für die magnetische Hautwirkung und damit den Einfluß der Wirbelströme auf die magnetische Leitfähigkeit ableiten, wie ich es in der oben erwähnten Arbeit für kreisrunden Querschnitt des Materials getan habe. Es zeigt sich, daß die Differentialgleichung nicht wie dort auf Besselsche Funktionen, sondern auf die bekannteren Exponentialfunktionen führen.

Wir setzen bei der Ableitung voraus, daß die Dicke der Bleche gegenüber der Breite vernachlässigt werden kann. Figur 1 stelle den Querschnitt des Bleches dar, die Induktionslinien verlaufen senkrecht zur Papierebene.

In dem Querschnitt des Bleches greifen wir ein Rechteck A B C D heraus. Die Seiten A B und C D seien parallel zur Oberfläche des Blechs und beide gleich der Längeneinheit. Die Strecke D E sei gleich ρ , und die Seiten A D und B C seien gleich $d\rho$. Auf dieses Rechteck wenden wir das Induktionsgesetz

$$\int_0^d \mathfrak{E}_s ds = - \frac{d}{dt} \int \mu \mathfrak{H} df$$

an, und man erhält, wobei sich die Integrale längs der Seiten A D und C B aufheben,

$$\mathfrak{E}_{(\rho + d\rho)} - \mathfrak{E}_\rho = - \frac{d}{dt} (\mu \cdot \mathfrak{H}_\rho) d\rho.$$

Die linke Seite läßt sich unter Anwendung des Taylorschen Satzes vereinfachen, und man erhält:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_\rho}{\partial \rho} = - \frac{d}{dt} (\mu \cdot \mathfrak{H}_\rho). \quad (10)$$

Figur 2 stellt einen Schnitt senkrecht zum Schnitt der Abbildung 1 dar.

Bei Figur 2 fällt der Vektor $\mathfrak{E}$ senkrecht zur Papierebene, während der Vektor $\mathfrak{H}$ in

Fig. 1.

Fig. 2.

der Papierebene liegt. In dem Rechteck A B C D sind die Seiten A B und C D gleich 1 gewählt. A D und B C = $d\rho$. Auf dieses Rechteck wende man das Grundgesetz des Elektromagnetismus

$$\int \mathfrak{H}_s ds = \frac{4\pi}{s} \int \mathfrak{E} \cdot df$$

an und man erhält (auch hier heben sich die Integrale längs der Seiten A D und B C auf)

$$\mathfrak{H}_\rho - \mathfrak{H}_{(\rho + d\rho)} = \frac{4\pi}{s} \mathfrak{E}_\rho \cdot d\rho$$

oder

$$- \frac{\partial \mathfrak{H}_\rho}{\partial \rho} = \frac{4\pi}{s} \cdot \mathfrak{E}_\rho \quad (11)$$

Aus Gleichung (10) und (11) eliminiere man $\mathfrak{E}_\rho$ und man erhält

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_\rho}{\partial \rho^2} - \frac{4\pi}{s} \frac{d}{dt} (\mu \cdot \mathfrak{H}_\rho) = 0, \quad (12)$$

oder wenn man die Differentiation nach t ausführt,

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_\rho}{\partial \rho^2} - \frac{4\pi}{s} \left(\mu \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_\rho}{\partial t} + \mathfrak{H}_\rho \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) = 0. \quad (13)$$

Diese Gleichung ist mathematisch einfacher als die entsprechende Gleichung für den Fall des kreisrunden Querschnitts, da sie den ersten Differentialquotienten nicht enthält. Die Hauptschwierigkeit bleibt jedoch bestehen, die in dem Variablen μ liegt. Bei der Lösung der Differentialgleichung mache ich die gleichen Voraussetzungen wie bei kreisrundem Querschnitt des Materials, nämlich

1. $\mathfrak{H}_\rho$ sinusförmig,
2. μ konstant,
3. die wahre Permeabilität eines Raumelementes ist von der Frequenz unabhängig.

Unter diesen Voraussetzungen kann ich die Gleichung (12) auch in der Form schreiben

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_\rho}{\partial \rho^2} - \frac{4\pi}{s} \mu \cdot \omega \cdot j \mathfrak{H}_\rho = 0. \quad (13a)$$

Ähnlich wie wir in der erwähnten Arbeit die Differentialgleichung für den magnetischen Hauteffekt in kreisrundem Material auch unmittelbar aus der Differentialgleichung für das entsprechende Problem des elektrischen Hauteffekts durch bloße Abbildung der von einem Wechselfeld induzierten elektrischen Strömung durch ein elektromagnetisches Feld unmittelbar abgeleitet haben (vgl. S. 488 oben), so können wir auch hier bei blechförmigem Querschnitt den gleichen Weg einschlagen.

Man kennzeichne auch hier die elektrische Strömung und Feld beim elektrischen Hauteffekt durch den Index el, magnetische Strömung und Feld beim magnetischen Hauteffekt durch den Index magn.

Nach Orlich, Theorie der Wechselströme, Gl. 15, erste Gleichung, S. 93, ist

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{C}_{el}}{\partial \rho^2} = \frac{4 \pi \omega}{s} \cdot j \cdot \mathfrak{C}_{el},$$

wo $\mathfrak{C}_{el}$ die Stromdichte und s den spezifischen Widerstand bedeutet. Statt σ ist hierin nach unserer Bezeichnung s , statt der Ordinate y der Buchstabe ρ gesetzt.

Diese Gleichung 15 war für einen Kupferleiter, d. h. $\mu = 1$, abgeleitet. Wir haben hier den allgemeineren Fall eines Eisenleiters anzunehmen.

In der ersten Gleichung auf S. 93 muß deshalb statt

$$\frac{\partial(\mathfrak{H} dy)}{\partial t} \text{ der Ausdruck } \frac{\partial(\mu \mathfrak{H} dy)}{\partial t}$$

treten. Dementsprechend ergibt sich für die Gleichung (15) die Form:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{C}_{el}}{\partial \rho^2} = \frac{4 \pi \omega}{s} \cdot \mu \cdot j \cdot \mathfrak{C}_{el}.$$

Nach dem Rogowskischen Satz¹⁾ setzt man

$$4 \pi \mathfrak{C}_{magn} = - \frac{\partial \mathfrak{B}_{el}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \mu = \sigma = \frac{1}{s};$$

alsdann wird

$$\mathfrak{C}_{el} = \mathfrak{B}_{magn}.$$

Man erhält in unserm Fall

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}_{magn}}{\partial \rho^2} = \frac{4 \pi \omega \mu}{s} j \mathfrak{B}_{magn}$$

oder

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_{\rho}}{\partial \rho^2} = \frac{4 \pi \omega}{s} \cdot \mu \cdot j \mathfrak{H}_{\rho}.$$

Führt man in (13a) die Größe $m^2 = \frac{4 \pi \mu \omega}{s}$ ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_{\rho}}{\partial \rho^2} - m^2 \cdot j \mathfrak{H}_{\rho} = 0. \quad (14)$$

Die allgemeinste Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\mathfrak{H}_{\rho} = f e^{m(1+j)\rho} + g \cdot e^{-m(1+j)\rho}.$$

Hierin sind f und g beliebige Integrationskonstanten. Für $\rho = 0$ wird $\mathfrak{H}_0 = f + g$.

Wenn g von Null verschieden ist, so müßte $f = -g$ sein, da aus Symmetriegründen $\mathfrak{H}_{\rho} = \mathfrak{H}_{-\rho}$ sein muß. Das ergäbe aber $\mathfrak{H}_0 = 0$, was der Wirklichkeit widerspricht. Die einzige für uns mögliche Lösung ergibt sich also für die Konstanten

$$\begin{aligned} g &= 0, \\ f &= \mathfrak{H}_0. \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. Rogowski, E und M. S 925; 1911.

Man hat also

$$\mathfrak{H}_\rho = \mathfrak{H}_0 \cdot e^{m(1+j)\rho}, \quad (15)$$

es ist also

$$\mathfrak{H}_r = \mathfrak{H}_0 \cdot e^{m(1+j)r}. \quad (16)$$

Durch Division von (15) durch (16) erhält man

$$\frac{\mathfrak{H}_\rho}{\mathfrak{H}_r} = e^{m(\rho-r) + j \cdot m(\rho-r)},$$

oder wenn man zu den Effektivwerten übergeht,

$$\frac{H_\rho}{H_r} = e^{m(\rho-r)} \quad \text{oder} \quad H_\rho = H_r \cdot e^{m(\rho-r)}.$$

Nun ist die gesamte Feldlinienzahl

$$Z = 2 \int_0^{\rho=r} H_\rho \cdot b \cdot d\rho,$$

wo b die Breite des Blechs senkrecht zur Richtung der Induktionslinien bedeutet, oder

$$Z = 2 \cdot b \cdot e^{-mr} \cdot H_r \int_0^r e^{m\rho} \cdot d\rho.$$

Wenn man die Integration ausführt und die Grenzen einsetzt, erhält man

$$Z = \frac{2b \cdot H_r}{m} \{1 - e^{-m \cdot r}\} \quad (17)$$

und somit

$$\Phi_{\max} = \mu \cdot Z \sqrt{2} = \mu \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2 \cdot b \cdot H_r}{m} (1 - e^{-m \cdot r}) \quad (18)$$

und

$$\frac{\Phi_{\max}}{0,4 \cdot \pi \cdot N \cdot J \cdot \sqrt{2}} = \frac{\mu \cdot 2 \cdot b}{m \cdot l} (1 - e^{-m \cdot r}) = \Lambda. \quad (19)$$

Diese Formel kann ebenso wie Formel (8a) für geschlossene magnetische Kreise oder für Teile eines solchen Kreises angewandt werden. Bei Blechpaketen ist die Rechnung für ein Blech durchzuführen und das Resultat mit der Anzahl der Bleche zu multiplizieren.

3. Durchrechnung eines speziellen Falls. Der magnetische Kreis ist durch die nebenstehende Abbildung gekennzeichnet.

Ich werde bei dieser Durchrechnung die Streuung nicht berechnen, da diese Berechnung gegenüber der gleichen Betrachtung bei 50 Perioden nichts neues bieten würde. Dies ergibt sich ohne weiteres aus der Überlegung, daß alle Streulinien in Luft verlaufen müssen und dort Wirbelströme, die Ursache der magnetischen Hautwirkung, nicht auftreten können. Immerhin habe ich, wenn auch willkürlich, die Streuung dadurch berücksichtigt, daß ich die Flüsse in den verschiedenen Teilen des magnetischen Kreises verschieden angenommen habe. In den Schlußstücken, die aus legierten Blechen bestehen mögen, entsprechend dem magnetischen Kreis einer Hochfrequenzmaschine nach dem Induktortyp, nehme ich einen max. Fluß von 2500 Maxwell an. Die Blechstärke sei 0,03 mm. Das Verhältnis von Eisenquerschnitt zu Papierisolation sei 1:1. Der Eisenquerschnitt

Fig. 3.

der Blechpakete ist also 5 qcm. Wir haben also eine maximale (zeitlich gemeint) Induktion = $\mathfrak{B}_{\max} = 500$ Maxwell anzunehmen. Das ist vom Standpunkt der 50-Perioden-Technik zwar eine außerordentlich geringe Induktion, für Hochfrequenz wegen der außerordentlich gesteigerten Verluste aber durchaus angemessen. Im Luft-

spalt nehmen wir dieselbe Induktion an. In den Schenkeln und dem Joch sei die ~~Induktion~~ unter willkürlicher Berücksichtigung der Streuung $= 2500 + 20\% = 3000$ Linien. Der Querschnitt von Joch und Schenkel ergibt sich aus der Zeichnung zu $78,5 \text{ cm}^2$. Wir nehmen dabei an, daß der runde Schenkelquerschnitt an den Enden vierkantig geschmiedet ist, um die konstruktive Ausführung, um die wir uns in dieser Arbeit im übrigen nicht zu kümmern brauchen, zu erleichtern. Bei der Berechnung der magnetischen Leitfähigkeit vernachlässigen wir dies jedoch. Ebenso vernachlässigen wir die magnetische Leitfähigkeit der unvermeidlichen Luftspalte zwischen Schenkel und Blechpaketen, da diese keine Rolle spielen im Vergleich zu dem Luftspalt zwischen den beiden Blechpaketen. Demzufolge beträgt die mittlere Induktion von Joch und Schenkel $38,2$ Maxwell. Diese Induktion erscheint auch für Hochfrequenz außerordentlich klein, man muß aber bedenken, daß wir massives Schmiedeeisen als Material verwenden wollen, daß man also mit einer außerordentlich hohen Hautwirkung von vornherein rechnen muß, also die Beanspruchung des Eisens an der Oberfläche sehr viel höher wird, als der mittleren Induktion entspricht.

Wir nehmen weiter an, daß die Wicklung nur auf dem Joch sitzen und daß die Induktion eine Frequenz $= 10\,000$ haben soll. Wie ich eingangs auseinandergesetzt, können wir der Einfachheit wegen voraussetzen, daß die hochfrequente Induktion dadurch erzeugt wird, daß die Wicklung von einem hochfrequenten Strom der gleichen Frequenz durchflossen wird. Ich möchte aber nochmals darauf hinweisen, daß wir gerade so gut annehmen könnten, daß die Erregung durch Gleichstrom erfolgte, und daß die hochfrequente Induktion, wie bei den Hochfrequenzmaschinen, nach dem Induktortyp durch eine periodisch veränderliche Leitfähigkeit des gesamten magnetischen Kreises erzeugt werden könnte.

Konstruktiv hätte man sich dies also so vorzustellen, daß an Stelle der festen Blechpakete ein rotierender gezahnter Anker tritt. Diesen Fall hoffe ich in einer späteren Arbeit bei der Durchrechnung einer fertigen Hochfrequenzmaschine berücksichtigen zu können.

Die Berechnung der notwendigen Amperewindungen oder der Durchflutung trennen wir naturgemäß in die Berechnung der notwendigen Durchflutung für den Luftspalt, die Schlußstücke aus legiertem Blech und endlich Joch und Schenkel.

a) Berechnung der für den Luftspalt erforderlichen Durchflutung. Der Tatsache, daß sich die Induktionslinien im Luftspalt ausbauchen, tragen wir dadurch Rechnung, daß wir für den Luftspalt einen um 50% erhöhten Querschnitt einsetzen.

Es ist somit

$$S_1 = 15 \text{ cm}^2,$$

$$l_1 = 0,1 \text{ cm},$$

$$\mu = 1.$$

Für den Luftspalt gilt die einfache Beziehung

$$\Lambda_1 = \frac{\mu \cdot S}{l} = 150,$$

$$\Phi_{1\max} = 2500.$$

Aus dem Wert für Φ_1 und Λ_1 berechnet sich die Anzahl der für den Luftspalt erforderlichen Amperewindungen zu

$$N \cdot J_{\text{eff}} = 9,4.$$

b) Berechnung der für die Schlußstücke erforderlichen Durchflutung. Wir berechnen zunächst die Leitfähigkeit eines Bleches. Die Formel für die magnetische Leitfähigkeit war (vgl. Formel (19)):

$$\Lambda = \frac{\mu \cdot 2 \cdot b}{m \cdot l} (1 - e^{-m \cdot l}).$$

Hierin ist

$$r = 0,000\,15\text{ cm},$$

$$b = 1,0\text{ cm},$$

$$l = 5,0\text{ cm (für beide Schlußstücke)}.$$

Ferner war nach unserer Annahme $\mathfrak{B}_{\max} = 500$.

Als mittleres μ , entnommen der statischen Magnetisierungskurve mit gleicher maximaler Magnetisierung, setzen wir für legiertes Blech 3000.

Ferner ist

$$m = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \omega}{s}},$$

wo

$$s = 10^4\text{ cgs.},$$

$$\omega = 62\,800,$$

somit

$$m = 486,5,$$

$$m \cdot r = 0,073.$$

Man erhält durch Einsetzen dieser Werte in obige Formel

$$\Lambda = 0,173.$$

Dies ist die Leitfähigkeit eines Blechs; insgesamt haben wir 166 Bleche, somit ist die Leitfähigkeit aller Bleche oder des gesamten Schlußjochs

$$\Lambda = 28,7.$$

Aus diesem Wert berechnet sich nach der Formel (S. 1) die für die beiden Schlußstücke notwendige Durchflutung zu

$$N \cdot J_{\text{eff}} = 49,2.$$

c) Berechnung der für Joch und Schenkel erforderlichen Durchflutung. Wir haben einen massiven Eisenkörper von kreisrundem Querschnitt.

Für Joch und Schenkel ist

$$r = 5\text{ cm},$$

$$l = 150\text{ cm},$$

$$m = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \omega}{s}};$$

hierin ist

$$\omega = 62\,800,$$

$$s = 10^4\text{ cgs.}$$

Oben hatte sich für die Schlußstücke ergeben

$$\mathfrak{B}_{\max} = 38,2\text{ Maxwell.}$$

Hierfür setzen wir die mittlere Permeabilität = 1000 in die Rechnung ein. Alsdann ergibt sich

$$m = 281$$

und

$$m \cdot r = 1405.$$

Wir können also die für große Werte des Arguments vereinfachte Formel (8a) anwenden

$$\Lambda = \pm \frac{2 \pi \cdot r \cdot \mu}{m \cdot l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2 \cdot m \cdot r} \right).$$

Nach Einsetzen obiger Werte erhält man

$$\Lambda = + 0,525.$$

Nach Formel (S. 1) berechnet sich alsdann die für das Joch und die Schenkel notwendige Durchflutung zu

$$N \cdot J_{\text{eff}} = 3215.$$

Als Resultat haben wir, daß sich die Zahl der gesamten Amperewindungen sehr ungleichmäßig auf die einzelnen Teile des magnetischen Kreises verteilt. Auf den Luftspalt fällt ein verschwindender Teil. Der bei weitem größte Teil fällt auf Joch und Schenkel. Dieses Resultat kann nicht überraschen, da Joch und Schenkel aus massivem Material hergestellt sind. Wir haben also hier gewissermaßen den Fall, der sich ungewollt ergibt, sobald nicht besondere Konstruktionen gewählt werden. Bei den Hochfrequenzmaschinen soll bei konstanter Erregung durch periodische Vertauschung von Zahn und Zahnücke in dem magnetischen Kreis eine periodische Induktion erzeugt werden. Dies erfordert eine entsprechend andere Verteilung der magnetischen Leitfähigkeit auf die einzelnen Teile des magnetischen Kreises, auf die ich jedoch in dieser Arbeit, die zunächst nur die prinzipiellen Grundlagen bringt, nicht eingehen will.

Zusammenfassung. Es wird der im Elektromaschinenbau gebräuchliche Begriff der magnetischen Leitfähigkeit in die Berechnung hochfrequenter magnetischer Kreise eingeführt. Die sich dadurch ergebenden Formeln sind für die praktische Durchrechnung solcher Kreise besonders bequem. Es wird gezeigt, wie die Formeln sowohl für geschlossene streuungslose als auch für beliebig zusammengesetzte Kreise mit Streuung angewendet werden können. Speziell wird dabei die Theorie der magnetischen Hautwirkung für Bleche behandelt. Die sich ergebenden Formeln sind insofern einfacher als bei kreisrundem Querschnitt des Materials, als an Stelle der Besselschen Funktionen die Exponentialfunktionen treten.

Zum Schluß wird ein magnetischer Kreis für die Frequenz 10 000 zahlenmäßig durchgerechnet, der in Reihe geschaltet aus einem Joch- und Schenkelstück aus Schmiedeeisen von kreisrundem Querschnitt, zwei Schlußstücken aus Blechpaketen und einem Luftspalt besteht. Das Zahlenbeispiel zeigt, daß irgendwelche Schwierigkeiten bei der Durchrechnung auch komplizierter magnetischer Kreise für Hochfrequenz nicht bestehen.

Die Durchrechnung der Eisenverluste, auf die ich hier nicht eingegangen bin, werde ich in einer späteren Arbeit behandeln.

Experimentelle Untersuchungen zur Theorie des Ferromagnetismus.

II. Ideale, d. h. hysteresefreie Magnetisierung.

Von

W. Steinhaus und E. Gumlich. Charlottenburg.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. **Ziel der Arbeit.** Bekanntlich ist die Magnetisierungsintensität eines ferromagnetischen Materials keine eindeutige Funktion der Feldstärke, sondern sie ist auch mehr oder weniger von der magnetischen Vorgeschichte abhängig. Diese Abhängigkeit von der Vorgeschichte nennt man Hysterese. Sie hat ihren Grund in der Irreversibilität der Magnetisierungsprozesse in den einzelnen Kristallen, die den pseudoisotropen ferromagnetischen Körper zusammensetzen. (Vgl. unsere vorige Mitteilung S. 89.)

Diese Erscheinung hat nun die Erforschung der Gesetze des Ferromagnetismus ganz außerordentlich erschwert. Zum Beweise dafür sei nur an zwei besonders wichtige Fälle erinnert.