welches besagt, daß je zwei Massenpunkte M und m sich gegenseitig mit Kräften anziehen, deren Größe P dem Produkte Mm direkt und dem Quadrat ihres Abstandes r umgekehrt proportional ist. Inbezug auf die Planetenbewegung stimmen die beiden Annahmen (71) und (72) überein, wenn man von der verschwindend kleinen Bewegung absieht, die der Sonne von dem Planeten erteilt wird. Denn das Produkt κM aus der Gravitationskonstanten κ und der Sonnenmasse M kann durch die Bezeichnung μ ersetzt werden.

9. Schlußbemerkung. In den vorstehenden Betrachtungen ist von den Hauptsätzen der Mechanik nur ein einziger zur Anwendung gekommen: der Satz von der geometrischen Summierung der Bewegungsgrößen mv und der Kraftantriebe Pdt . Die Entdeckung dieses Satzes könnte seiner Einfachheit wegen als unerheblich erscheinen. Man muß aber bedenken, daß vorher die Begriffe: Masse, Kraft, Bewegungsgröße und Kraftantrieb gebildet werden mußten. Es ist das unvergängliche Verdienst Newtons, hierdurch die Grundlage der heutigen Dynamik geschaffen zu haben. Vor Newtons Zeit waren diese Begriffe kaum vorhanden oder doch sehr unklar und verschwommen. Deshalb konnte Kepler seine Gesetze und Hooke seine Hypothese nicht weiter verfolgen. Mit Hilfe der grundlegenden Begriffe ergab sich das Gesetz der ebenen Bewegung eines materiellen Punktes freilich fast von selbst.

8

Über die Spannungserhöhung durch kreisförmige Löcher in einem gezogenen Bleche.

Von TH. PÖSCHL in Prag.

Die Frage, in welchem Maße die Spannung in einem Zug oder Druck unterworfenen Körper durch Anbringen von Durchlochungen beeinflusst wird, ist in sehr vielen Fällen von praktischer Bedeutung. Sie läßt sich, wenigstens bei einfachen Annahmen über die Gestalt und Anordnung der Löcher, mit den Hilfsmitteln der Elastizitätstheorie streng erledigen. In einer demnächst erscheinenden Mitteilung¹⁾ habe ich den Einfluß eines elliptischen Loches in einer in irgend einer Richtung oder allseits gleichförmig gespannten Scheibe untersucht. Wie bei allen derartigen Problemen kam es vor allem naturgemäß darauf an, angemessene Koordinaten zu verwenden, als welche sich die elliptischen Koordinaten von selbst darboten. Die zweiten kovarianten Ableitungen der zugehörigen Airyschen Funktion stellen dann die Spannungen an jeder Stelle des Bleches dar.

Hat man die Spannungsverteilung zu ermitteln, die durch zwei kreisförmige Löcher in einem gespannten Bleche²⁾ hervorgerufen wird, so wird man als Koordinatensystem das Doppelsystem der Kreise zweier Büschel verwenden, das zu zwei reellen und zu zwei imaginären Grundpunkten gehört (bizirkulare oder bipolare Koordinaten). Auch dieses System ist isometrisch (d. h. die Kurvenvierecke sind quadratisch), und dieser Umstand bringt, wie auch im eben erwähnten elliptischen Problem, eine wesentliche Vereinfachung in der Rechnung mit sich, wenn es auch — da es sich doch um die Gleichung $\Delta\psi = 0$ handelt — unmöglich ist, das Hilfsmittel der konformen Abbildung unmittelbar zu verwerten.

In der vorliegenden Note gebe ich die Entwicklung zunächst für den Fall, daß die in zwei Kreisen durchlochte Scheibe in radialer Richtung allseits gleichmäßig gespannt ist; es zeigt sich, wie nicht anders zu erwarten, daß der größte Wert der Tangentialspannung an den inneren, zueinander nächstliegenden Punkten der beiden Kreise auftritt, und daß dieser größte Wert um so größer ist, je größer die Durchmesser der beiden Kreise sind und je näher die beiden Kreise einander liegen. Im folgenden sind die hierfür geltenden Formeln auch zahlenmäßig ausgewertet. Die erhaltenen Ergebnisse liefern einen Beitrag für die Beurteilung der Größe der Spannungserhöhung, die durch mehrere Löcher entstehen, z. B. durch Nietlöcher in einem Bleche, wenn auch hierbei

¹⁾ Math. Zeitschr. 11, 1921, S. 1 bis 7.

²⁾ Es handelt sich stets um das ebene Problem, das bekanntlich in folgenden beiden Fällen vorliegt: a) beim unendlich langen Zylinder, der gleichmäßig seiner ganzen Länge nach beansprucht wird, b) bei der unendlich dünnen Scheibe.

Das Unendliche wird daher durch $\xi = \pi$, $\eta = 0$ dargestellt.

Drücken wir das Bogenelement durch diese Koordinaten ξ und η aus, so folgt

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{c^2 (\cos \eta + \cos \xi)^2} = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\lambda}, \quad \lambda = c^2 (\cos \eta + \cos \xi)^2 \quad (5),$$

und wenn wir für die Laplaceschen Differentialausdrücke die Bezeichnungen $\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$ bzw. $\Delta^*\psi = \psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta}$ verwenden, so ist

$$\Delta\psi = \lambda \Delta^*\psi \quad (6).$$

Wir betrachten nun ein unendlich langes Blech, das mit zwei kreisförmigen Löchern versehen ist, die durch $\eta = \pm \eta_0 = \text{konst.}$ gekennzeichnet sind, wobei $0 < |\eta_0| < \infty$, und an deren Rändern keine äußeren Kräfte angreifen mögen.

Nach dem bekannten Vorgange¹⁾ hat man zur Lösung derartiger Aufgaben eine über die Ebene ausgebreitete Funktion, die Airysche Spannungsfunktion auf Grund folgender Forderungen zu bestimmen:

I. Im ganzen Bereiche außerhalb der gegebenen Begrenzungen genügt ψ der »biharmonischen Differentialgleichung«

$$\Delta\Delta\psi = 0 \quad (7),$$

die in den für das Doppelkreissystem geltenden Koordinaten ξ und η so lautet:

$$(\cos \eta + \cos \xi) \Delta^* \Delta^* \psi - 4 \left(\sin \xi \frac{\partial \Delta^* \psi}{\partial \xi} - \sin \eta \frac{\partial \Delta^* \psi}{\partial \eta} \right) + 4 (\cos \eta - \cos \xi) \Delta^* \psi = 0 \quad (7').$$

II. Längs des Umfanges der beiden Kreise $\eta_0 = \text{konst.}$ schließt sich die Funktion ψ stetig und mit stetiger Tangente an die über den Kreisen aufgebaute äußere Belastungsfläche²⁾ an.

Wenn im Innern dieser Kreise keine Kräfte wirken, so besteht diese äußere Belastungsfläche aus zwei über den Kreisen liegenden Ebenenstücken, die aus Symmetriegründen nur längs der y -Achse, und zwar symmetrisch zur x -Achse (dachförmig) geneigt sind. Die Neigung dieser Ebenen ist nicht von vornherein gegeben, sondern wird vielmehr durch das Problem selbst bestimmt.

III. Im Unendlichen muß ψ den Bedingungen für gleichförmigen Zug nach irgend einer Richtung bzw. gleichförmigen radialen Zug genügen³⁾, muß also von der Form sein:

a) $\psi \rightarrow \frac{p}{2} r^2$ bei gleichförmigem, radialem Zug,

b) $\psi \rightarrow \frac{p}{2} x^2$ » » Zug in der Richtung y ,

c) $\psi \rightarrow \frac{p}{2} y^2$ » » » » » » » » x ,

d) $\psi \rightarrow \frac{p}{2} (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2$ bei gleichförmigem Zug in einer unter dem Winkel α gegen die y -Achse geneigten Richtung.

Trägt man $\psi = \psi(\xi, \eta)$ an jeder Stelle der Ebene als Ordinate auf, so erhält man die Spannungsfäche oder innere Belastungsfläche, für welche die Bedingungen II und III unmittelbar einleuchtende geometrische Bedeutung haben.

In der vorliegenden Note beschäftigen wir uns vorerst mit dem Fall IIIa.

2. Spannungsfunktion für gleichförmigen radialen Zug. Aus Symmetriegründen muß die gesuchte Funktion sowohl in ξ wie auch in η gerade sein. Die Bedingungen II. und IIIa. für die Funktion ψ können wir nunmehr so aussprechen:

I. In der ganzen Ebene außerhalb der beiden Kreise ist $\Delta\Delta\psi = 0$.

II. An den Rändern der Kreise ist

$$\begin{aligned} \text{für } \eta = \eta_0, \psi &= Cy \\ \text{» } \eta = -\eta_0, \psi &= -Cy \end{aligned} \quad (8)$$

¹⁾ s. F. Klein und K. Wiegardt, Ueber Spannungsfächen und reziproke Diagramme, Archiv Math. Phys. (3 Reihe) 8, 1904, S. 1 und 95.

²⁾ s. P. Funk, Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen, Berlin 1920.

³⁾ Die Bedingungen lauten genauer so, daß die zweiten Ableitungen von ψ sich in Unendlichen wie die der rechtsstehenden Ausdrücke von a) bis d) verhalten, praktisch kommt dies auf die im Text gegebene Fassung hinaus.

und

$$\left. \begin{aligned} \text{für } \eta &= \eta_0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = C \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \text{» } \eta &= -\eta_0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -C \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9).$$

C gibt die Neigung der Ebenen und wird durch das Problem selbst bestimmt; y ist durch Gl. (4) gegeben.

$$\text{IIIa. Für } \xi = \pi, \eta = 0 \text{ ist } \psi \rightarrow \frac{p}{2} r^2. \dots \dots \dots (10).$$

Was die Auswahl der Potentiale und Bipotentiale, aus denen sich die gesuchte Lösung zusammensetzt, anlangt, so wird man es zunächst mit den einfachsten versuchen. Wegen der Gleichung (10) wird man vor allem r^2 selbst heranziehen, wobei

$$r^2 = c^2 \frac{\cos \xi}{\cos \eta + \cos \xi}$$

oder auch

$$\frac{1+r^2}{2} = c^2 \frac{\cos \eta}{\cos \eta + \cos \xi}, \quad \frac{1-r^2}{2} = c^2 \frac{\cos \xi}{\cos \eta + \cos \xi}.$$

Alle noch hinzutretenden Anteile müssen im Unendlichen von niedrigerer Ordnung unendlich werden, und zwar müssen sie, da sie gerade Funktionen sind, regulär sein. Der Umstand führt sofort auf

$$\eta y = \frac{\eta \sin \eta}{\cos \eta + \cos \xi}.$$

In der Tat ist die gesuchte Lösung von der Form

$$\psi = A \frac{\cos \eta}{\cos \eta + \cos \xi} + B \frac{\eta \sin \eta}{\cos \eta + \cos \xi} \dots \dots \dots (11),$$

wenn wir mit A und B Konstante bezeichnen. Gl. (8) gibt sogleich

$$A \cos \eta_0 + B \eta_0 \sin \eta_0 = C \sin \eta_0 \dots \dots \dots (12)$$

und Gl. (9) gibt nach Ausführung der Differentiation nach η in den Ausdrücken (11) und (9)

$$\left. \begin{aligned} A \sin \eta_0 + B(\eta_0 \cos \eta_0 + \sin \eta_0) &= C \cos \eta_0 \\ B(\eta_0 + \cos \eta_0 \sin \eta_0) &= C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13).$$

Die Gleichungen (12) und (13) sind miteinander verträglich; ihre Determinante verschwindet identisch. Es ergibt sich daraus

$$B = \frac{A}{\sin^2 \eta_0}, \quad C = A \frac{\eta_0 + \cos \eta_0 \sin \eta_0}{\sin \eta_0}.$$

Wenn wir endlich die Spannung pro Längeneinheit im Unendlichen mit p bezeichnen, so folgt aus

$$\psi \rightarrow \frac{p}{2} r^2 = \frac{p}{2} c^2 \frac{2}{\cos \eta + \cos \xi} = A \frac{1}{\cos \eta + \cos \xi}$$

für A die Aussage

$$A = p c^2.$$

Wir erhalten daher die gesuchte Spannungsfunktion in der einfachen Gestalt

$$\psi = p c^2 \frac{\cos \eta + \frac{1}{\sin^2 \eta_0} \eta \sin \eta}{\cos \eta + \cos \xi} \dots \dots \dots (14).$$

3. Die Spannungskomponenten. Wie ich in der eingangs erwähnten Arbeit auseinandergesetzt habe und wie durch sinngemäße Auffassung des Begriffes Differentialquotient einleuchtet, sind die Spannungskomponenten in den Koordinaten ξ, η , für die wir in der Loveschen Bezeichnung $\xi\xi, \eta\eta$ und $\xi\eta$ schreiben, durch die Produkte der bzgl. zweiten kovarianten Ableitungen von ψ nach den Koordinaten mit λ dargestellt. Die Spannung, die uns insbesondere interessiert, ist die Tangentialspannung $\xi\xi$, für die sich folgender Ausdruck ergibt:

$$\xi\xi = \lambda \psi_{\eta\eta} - \frac{1}{2} \lambda_{\xi} \psi_{\xi} + \frac{1}{2} \lambda_{\eta} \psi_{\eta} \dots \dots \dots (15)$$

und für λ seinen Wert eingesetzt

$$\xi\xi = \frac{p}{\sin^2 \eta_0} \frac{2 \cos \eta \cos^2 \xi + (3 \cos^2 \eta + \cos^2 \eta_0) \cos \xi + \cos \eta (\cos^2 \eta + \cos^2 \eta_0)}{\cos \eta + \cos \xi} \dots \dots \dots (16).$$

Für den Rand der Kreise $\eta = \pm \eta_0$ erhält man den einfachen Ausdruck

$$[\hat{\xi} \hat{\xi}]_{\eta = \pm \eta_0} = p \frac{2 \cos \eta_0}{\sin^2 \eta_0} (\cos \eta_0 + \cos \xi) \quad (17),$$

während die beiden anderen Spannungskomponenten $\hat{\eta}$ und $\hat{\xi}$, die durch analoge Gleichung wie (15) gegeben sind, für $\eta = \pm \eta_0$ identisch 0 ergeben.

Abb. 2

In Abb. 2 ist zunächst die Tangentialspannung $\hat{\xi} \hat{\xi}$ an jenen Durchmesserendpunkten, in welchen die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Kreise (d. i. die y -Achse) diese schneidet, für alle Kreise des durch den Wert $c = 1$ gekennzeichneten Büschels dargestellt; dabei ist auch $p = 1$ gesetzt. Die dafür geltenden Formeln sind nach Gl. (17)

$$\begin{aligned} \text{innerer Durchmesserendpunkt } (\xi = 0): \quad \xi/\bar{\xi} &= \frac{2 \cos \tau_0 (\cos \eta_0 + 1)}{\sin^2 \tau_0}, \\ \text{äußerer} \quad \quad \quad (\xi = \pi): \quad \xi/\bar{\xi} &= \frac{2 \cos \tau_0 (\cos \eta_0 - 1)}{\sin^2 \tau_0}. \end{aligned}$$

Für andere p sind diese Werte mit p zu multiplizieren. Die Spannungen an den inneren Durchmesserendpunkten stellen sich weit höher heraus wie außen, und zwar um so höher, je größer die Kreise werden, je näher sie also der x -Achse kommen, d. h. je schmaler der zwischen den Kreisen bleibende Querschnitt wird. Wenn die Kreise auf das Paar der Grundpunkte A und B einschrumpfen ($\eta_0 = \pm \infty$), so nähert sich $\xi/\bar{\xi}$ dem Werte 2, und dies ist jener Wert, den die Spannung auch für ein einzelnes Kreisloch

Abb. 3

(von beliebiger Größe) in einem allseits gleichmäßig gespannten Bleche annimmt¹⁾. Für zwei Löcher (und wahrscheinlich auch für beliebig viele, die sich nicht häufen) tritt dieser Wert nur für den Fall auf, wo es sich um unendlich kleine Löcher, also um Punktierungen handelt.

Ferner ist in Abb. 3 für eine Anzahl von Kreispaares der Verlauf der Spannung $\xi\xi$ längs der außerhalb der Kreise verlaufenden Stücke der Verbindungslinie der Mittelpunkte aufgetragen. Die so erhaltenen Kurven erscheinen zwischen den zwei Äesten der in Abb. 2 dargestellten Kurve eingehängt, die hier punktiert eingetragen ist.

Leon und Zidlicky²⁾ haben für die nach einer Richtung gespannte doppelt durchlochte Scheibe (Kautschukplatte) Versuche angestellt und auch die Spannungsverteilung zwischen den Löchern dargestellt; die hier erhaltenen Ergebnisse stimmen damit qualitativ gut überein. Zahlenmäßig läßt sich ein Vergleich wegen der verschiedenen Belastungen nicht durchführen.

Die numerischen Werte von $\xi\xi$ sind aus folgender Zahlentafel zu ersehen.

a) Innerhalb der Löcher ($\xi = 0$)								b) außerhalb der Löcher ($\xi = \pi$)							
$\eta_0 =$	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	
$\eta = 0,1$	402,5	102,0	15,9	3,91	1,31	1,01	$\sim 1,0$	1,01	1,00	1,06	1,00	1,00	1,00	1,005	
$= 0,2$		104,0	16,3	3,95	1,31	1,04			1,02	0,96	0,99	1,04	1,03	1,03	
$= 0,5$			17,7	4,28	1,34	1,05				1,05	1,02	1,06	1,01	0,85	
$= 1,0$				5,64	1,68	1,06					1,19	1,05	1,00	0,84	
$= 2,0$					2,72	1,23						1,58	1,03	0,83	
$= 3,0$						2,22	$\sim 1,0$						1,82	0,99	
$= 4,0$							$\sim 2,0$							1,87	

26

Anwendung der elementaren Turbinentheorie auf die Berechnung der Windräder.

Von C. PFLEIDERER in Braunschweig.

Angesichts der heutigen Notlage unseres Wirtschaftslebens wird der Ausnutzung der in den bewegten Luftmassen enthaltenen Energiemengen besonderes Interesse zugewandt. Tatsächlich handelt es sich hier auch um sehr bedeutende Kraftquellen, denen gegenüber unsere Wasserkräfte an Umfang stark in den Hintergrund treten.

Die Berechnung des Windrades geschieht heute allgemein in der Weise, daß man von den Erfahrungswerten über den Winddruck auf gerade oder gewölbte Flächen ausgeht, die schräg zum Wind gestellt sind³⁾. Bei dieser Berechnungsweise tritt der Einfluß von Form und Krümmung der Schaufel nicht unmittelbar in die Erscheinung. Es kommt hierbei nicht zum Ausdruck, daß die Arbeitsleistung des Windrades ausschließlich auf der Ablenkung des Windes durch die Schaufelflächen beruht, also die Verhältnisse sehr ähnliche sind wie bei den Turbinen. Einige der in neuester Zeit erschienenen Arbeiten⁴⁾ benützen die für die Erkenntnis der Wirkung der Luftschraube geschaffene Theorie der idealen Strahlbewegung; diese Theorie nimmt die Schaufelfläche als Schraubenfläche an und gibt keinen Aufschluß über die Krümmung der Schaufelprofile, die nach der Erfahrung einen zu beachtenden Einfluß besitzt. Die Behandlung des Windrades als Umkehrung des Propellers ist nun zweifellos für die Erlangung eines allgemeinen Einblicks zweckmäßig und wertvoll. Sie ist aber nur in beschränktem Maße zulässig, wie bei-

¹⁾ S. z. B. A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, 1. Bd., München 1920, S. 306.

²⁾ Leon und Zidlicky, Die Ausnutzung des Materials in gelochten Körpern. Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 915, S. 11.

³⁾ Otto Stertz, Moderne Windturbinen, Leipzig 1912. Vergl. auch Paul La Cour, Die Windkraftmaschinen und ihre Anwendung, deutsch von Dr. Joh. Kaufmann, Leipzig 1905.

⁴⁾ M. Munk, Ueber vom Winde getriebene Luftschrauben, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1920, S. 220, ferner Wilh. Hoff, Theorie der idealen Windkraftmaschinen, ebenda, S. 223, endlich A. Betz, Das Maximum der theoretisch möglichen Ausnutzung des Windes durch Windmotore, Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen 1920, S. 307.