

This article was downloaded by: [New York University]

On: 21 April 2015, At: 16:32

Publisher: Taylor & Francis

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK

Scandinavian Actuarial Journal

Publication details, including instructions for authors and subscription information:

<http://www.tandfonline.com/loi/sact20>

Sur une méthode d'approximation applicable à certains problèmes actuariels

Reinh Palmqvist ^a

^a Stockholm

Published online: 22 Dec 2011.



To cite this article: Reinh Palmqvist (1921) Sur une méthode d'approximation applicable à certains problèmes actuariels, Scandinavian Actuarial Journal, 1921:1, 152-178, DOI: [10.1080/03461238.1921.10405331](https://doi.org/10.1080/03461238.1921.10405331)

To link to this article: <http://dx.doi.org/10.1080/03461238.1921.10405331>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Taylor & Francis makes every effort to ensure the accuracy of all the information (the "Content") contained in the publications on our platform. However, Taylor & Francis, our agents, and our licensors make no representations or warranties whatsoever as to the accuracy, completeness, or suitability for any purpose of the Content. Any opinions and views expressed in this publication are the opinions and views of the authors, and are not the views of or endorsed by Taylor & Francis. The accuracy of the Content should not be relied upon and should be independently verified with primary sources of information. Taylor and Francis shall not be liable for any losses, actions, claims, proceedings, demands, costs, expenses, damages, and other liabilities whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with, in relation to or arising out of the use of the Content.

This article may be used for research, teaching, and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, redistribution, reselling, loan, sub-licensing, systematic supply, or distribution in any form to anyone is expressly forbidden. Terms & Conditions of access and use can be found at <http://www.tandfonline.com/page/terms-and-conditions>

Sur une méthode d'approximation applicable à certains problèmes actuariels.

Par Reinh. Palmqvist (Stockholm).

Il arrive souvent que l'on désire connaître le changement approximatif que subit une prime ou une autre quantité, employée dans les opérations d'assurances sur la vie, en augmentant ou diminuant le taux d'intérêt appliqué, mais sans faire le calcul détaillé des nombres cardinaux, nécessaires pour le calcul exact. La plupart des expressions, d'où l'on se sert dans les mathématiques d'assurances sur la vie, pouvant se ramener à des rentes viagères, il suffit pour ce but à calculer les changements que subissent ces quantités en variant le taux d'intérêt.

Le problème de trouver une formule pour le calcul de la valeur approximative d'une rente viagère a été étudié auparavant dans ce journal par M. STEFFENSEN.¹ Après avoir démontré les inégalités remarquables

$$\int_{b-\lambda}^b f(t) dt \leq \int_a^b f(t) \varphi(t) dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t) dt, \quad (1)$$

où

$$\lambda = \int_a^b \varphi(t) dt, \quad (1')$$

¹ On certain inequalities between mean values, and their application to actuarial problems. Skandinavisk Aktuarietidskrift 1918, p. 82. Voir aussi la note du même auteur dans le Journal of the Institute of Actuaries, vol. LI, p. 274 (On certain Inequalities and Methods of Approximation).

qui ont lieu si $f(t)$ désigne une fonction intégrable jamais croissante entre a et b , tandis que $\varphi(t)$ désigne une fonction aussi intégrable qui dans cette intervalle est positive et plus petite que l'unité, il les applique pour déduire la formule d'approximation

$$a_x = \frac{1 - (1 + i)^{-e_x + i\varepsilon_x}}{i}, \quad (2)$$

où ε_x est défini par l'équation

$$\varepsilon_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\infty} t l_{x+t} - \frac{1}{2} e_x (e_x + 1). \quad (2')$$

Si, connaissant la valeur a_x de la rente viagère

$$\sum_{t=1}^{\infty} (1 + i)^{-t} \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

nous cherchons la valeur approximative de

$$a'_x = \sum_{t=1}^{\infty} (1 + i')^{-t} \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

nous avons seulement à remplacer les quantités a_x , e_x , ε_x et i dans la formule (2) par a'_x , a_x , α_x et h , en posant

$$i' = i + h$$

et

$$\alpha_x = (1 + i)^{-1} \frac{S_x}{D_x} - \frac{1}{2} a_x (a_x + 1). \quad (2'')$$

Comme l'a montré M. STEFFENSEN par des exemples, ces formules d'approximation donnent des résultats très satisfaisants,¹ beaucoup meilleurs que ceux qui résultent de la formule bien connue

¹ Les formules d'approximation de M. STEFFENSEN font sujet de quelques recherches de M. LEVER, publiées dans le vol. LII du Journal of the Institute of Actuaries (On obtaining values of Life Annuities at isolated rates of interest), où il montre quels bon services elles rendent si l'on veut interpoler entre deux valeurs connues d'une rente viagère correspondant à deux taux d'intérêt.

$$a'_x = a_x - h \frac{(1+i)^{-1} S_x}{D_x}, \quad (3)$$

obtenue en développant a'_x en série suivant les puissances de h et négligeant les puissances depuis la seconde.

Les inégalités (1) de M. STEFFENSEN ont une certaine liaison avec une inégalité de M. JENSEN,¹ comme l'a montré M. MEIDELL.² C'est l'inégalité suivante:

En désignant par $e(t)$ une fonction intégrable et positive dans l'intervalle (a, b) et par $\psi(t)$ une autre fonction aussi intégrable, on a

$$\int_a^b e(t) \psi(\alpha(t)) dt \geq \text{ou} \leq \int_a^b e(t) dt \cdot \psi \left(\frac{\int_a^b e(t) \alpha(t) dt}{\int_a^b e(t) dt} \right) \quad (4)$$

suivant que $\psi(t)$ est une fonction convexe ou concave dans l'intervalle (α_1, α_2) , α_1 et α_2 désignant la limite inférieure et la limite supérieure d'une fonction arbitraire $\alpha(t)$ dans l'intervalle (a, b) .

Cette inégalité peut aussi être appliquée directement au calcul numérique des expressions des mathématiques d'assurance. En particulier M. MEIDELL en a déduit la formule d'approximation

$$a'_x = a_x (1 + hv)^{-\frac{S_x}{N_x}} \quad (5)$$

qui, eu égard à sa simplicité, donne des valeurs très satisfaisantes.

Au lieu de déduire les formules d'approximation (2) et (5) comme cas spéciaux des inégalités (1) et (4), on peut aussi arriver à ces mêmes résultats en s'appuyant sur deux théorèmes très élémentaires de la théorie des intégrales définies.

¹ Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta mathematica*, 30, p. 175.

² Note sur quelques inégalités et formules d'approximation. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1918, p. 180.

L'un est ce théorème bien connu :

Si $\varphi(t)$ est une fonction positive pour $a \leq t \leq b$, nous pouvons toujours trouver une quantité ξ , comprise entre a et b , telle que

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)dt = f(\xi) \int_a^b \varphi(t)dt. \quad (6)$$

L'autre est le théorème analogue, dû à M. BONNET,¹ savoir :

Si $\varphi(t)$ est une fonction positive et décroissante, quand t varie de a à b , nous pouvons trouver une quantité ξ , comprise entre a et b , telle que

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)dt = \varphi(a) \int_a^\xi f(t)dt. \quad (7)$$

Comme le procédé pour obtenir les formules d'approximation, nommées ci-dessus, en employant pour point de départ les formules (6) et (7), n'est pas sans intérêt au point de vue du calcul d'approximation général, étant susceptible d'une généralisation qui fera sujet des études suivantes, nous allons détailler ces déductions très simples.²

Nous posons dans (6)

$$f(t) = (1 + i)^{-t}$$

et

$$\varphi(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\bar{a}_x = (1 + i)^{-\xi} \int_0^\infty \frac{l_{x+t}}{l_x} dt \quad (0 < \xi < \infty)$$

¹ Voir par exemple E. PICARD, Traité d'Analyse, 2^{me} éd., t. I, p. 7.

² Ce procédé est d'ailleurs analogue à celui dont s'est servi M. STÉPHANSEN pour arriver à la formule (2).

ou, en remplaçant le signe \int par le signe Σ ,

$$a_x = (1+i)^{-\xi} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x} = (1+i)^{-\xi} e_x \quad (1 < \xi < \infty). \quad (8)$$

Nous en déduisons

$$\xi = \frac{\log e_x - \log a_x}{\log (1+i)}$$

ou, en développant en série suivant les puissances de i et tenant compte seulement du premier terme de la série,

$$\xi = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} t l_{x+t}}{\sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t}}. \quad (8')$$

Si nous connaissons a_x au lieu de e_x et cherchons a'_x , nous remarquons que

$$(1+i')^{-t} = (1+hv)^{-t} (1+i)^{-t}$$

et posons

$$f(t) = (1+hv)^{-t}$$

et

$$p(t) = (1+i)^{-t} \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

Nous aurons alors

$$a'_x = (1+hv)^{-\xi} a_x, \quad (9)$$

où

$$\xi = \frac{S_x}{N_x}, \quad (9')$$

c'est-à-dire la formule d'approximation (5) de M. MEIDELL.

Pour arriver à la formule d'approximation de M. STEFFENSEN nous prenons pour point de départ le théorème de M. BONNET et posons comme auparavant

$$f(t) = (1 + i)^{-t}$$

et

$$q(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

Donc la formule (7) nous donne, en remplaçant l'intégrale par une somme,

$$a_x = \sum_{t=1}^{\xi} (1 + i)^{-t} = \frac{1 - (1 + i)^{-\xi}}{i} \quad (1 < \xi < \infty), \quad (10)$$

d'où nous déduisons

$$\xi = -\frac{\log(1 - ia_x)}{\log(1 + i)}$$

ou, en développant en série suivant les puissances de i et s'arrêtant au deuxième terme,

$$\xi = e_x - i \left[\frac{\sum_{t=1}^{\infty} t l_{x+t}}{l_x} - \frac{e_x(e_x + 1)}{2} \right]. \quad (10')$$

Si nous connaissons a_x au lieu de e_x et désirons connaître a'_x , nous employons le même procédé et aurons

$$a'_x = \sum_{t=1}^{\xi} (1 + hv)^{-t} = \frac{1 - (1 + hv)^{-\xi}}{hv} \quad (1 < \xi < \infty). \quad (11)$$

Donc

$$\xi = -\frac{\log(1 - hv a'_x)}{\log(1 + hv)}$$

ou, développant en série de h et négligeant les puissances supérieures à la première,

$$\xi = a_x - hv \left[v \frac{S_x}{D_x} - \frac{a_x(a_x + 1)}{2} \right]^1 \quad (11')$$

Nous voulons maintenant regarder d'un autre point de vue le procédé pour arriver aux formules d'approximation de MM. STEFFENSEN et MEIDELL qui vient d'être décrit.

Ce procédé peut être caractérisé comme voici :

La fonction de i (ou de h , si a_x est supposé connu) qui représente la rente viagère est remplacée par une autre fonction, disons φ , contenant un paramètre ξ . En égalant la rente a_x (ou a'_x) à cette nouvelle fonction φ , le paramètre ξ y devient fonction de i (ou de h), et on le développe en une série suivant les puissances de cette variable. Si nous supprimons dans cette série les puissances supérieures à la première et substituons dans la fonction φ l'expression, ainsi obtenue de ξ , cette fonction donne des valeurs plus approchées des valeurs vraies de la rente viagère que celles que l'on obtient en développant a_x (ou a'_x) directement en série de i (ou de h) et tenant compte du même nombre de termes de la série.

La propriété des méthodes relatées de donner des approximations meilleures qu'un procédé direct résulte, cela va sans dire, de la nature particulière de la fonction φ . Ainsi, l'utilité pratique des formules de MM. STEFFENSEN et MEIDELL dépend du fait qu'elles sont spécialement adoptées aux propriétés de la fonction a_x (ou a'_x).

Nous nous proposons maintenant d'étudier ce problème général :

Si nous posons une fonction donnée $f(x)$ égale à une autre fonction $\varphi(x, y)$, contenant un paramètre y , puis développons y en une série de TAYLOR suivant les puissances de $x - a$, a étant une valeur de x , pour laquelle $f(x)$ ainsi que $f'(x)$ est connu, en négligeant les puissances depuis la seconde, et enfin mettons en $\varphi(x, y)$ cette expression de y ,

¹ Cette formule diffère un peu de (2''); elle s'en transforme en remplaçant hv par h en (11).

quelles conditions faut-il attribuer à la fonction φ pour que la valeur approximative que nous obtenons ainsi de $f(x)$ soit plus approchée de la valeur vraie que ne l'est la valeur, obtenue par un développement direct de $f(x)$ en série de TAYLOR en négligeant les mêmes puissances de $x-a$?

Nous supposons donc que nous connaissons la valeur de $f(x)$ pour $x=a$, ainsi que celle de la dérivée en ce point. Si nous posons

$$f_1(x) = f(a) + (x-a)f'(a), \quad (12)$$

la différence $\varepsilon(x)$ entre $f(x)$ et la valeur approximative $f_1(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$\varepsilon(x) = \int_a^x f''(u)(x-u)du = \int_a^x f'(u)du - (x-a)f'(a). \quad (13)$$

En égalant les fonctions $f(u)$ et $\varphi(u, v)$, v devient fonction de u , et nous supposons que v varie de b à y , quand u varie de a à x .¹

Posons

$$y = [v]_{u=a} + (x-a) \left[\frac{dv}{du} \right]_{u=a} + \delta(x). \quad (14)$$

Suivant les suppositions faites ci-dessus, nous aurons $[v]_{u=a} = b$, et, en dérivant les deux membres de l'égalité $f(u) = \varphi(u, v)$ par rapport à u , nous obtenons

$$f'(u) = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du},$$

d'où

$$\left[\frac{dv}{du} \right]_{u=a} = \frac{f'(a) - \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b}}.$$

¹ Nous ne nous occuperons que des fonctions continues et dérivables.

Quant au terme complémentaire $\delta(x)$ nous pouvons lui donner la forme

$$\delta(x) = \int_a^x \frac{d^2 v}{du^2} (x-u) du = \int_a^x \frac{dv}{du} du - (x-a) \frac{f'(a) - \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b}}. \quad (15)$$

En introduisant la fonction $\lambda(x)$ par l'égalité

$$\int_a^x \frac{dv}{du} du = \frac{\int_a^x f'(u) du - (x-a) \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\lambda(x)},$$

le reste $\delta(x)$ prend la forme

$$\delta(x) = \frac{\int_a^x f'(u) du - (x-a) \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\lambda(x)} - (x-a) \frac{f'(a) - \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b}}, \quad (15')$$

où

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - f(a) - \int_a^x \frac{\partial \varphi(u, b)}{\partial u} du + \int_a^x \frac{\partial \varphi(u, b)}{\partial u} du - (x-a) \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{y-b}.$$

Or, on a

$$f(x) = \varphi(x, y), \quad f(a) = \varphi(a, b)$$

et

$$\varphi(x, b) = \varphi(a, b) + \int_a^x \frac{\partial \varphi(u, b)}{\partial u} du;$$

done

$$\lambda(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x),$$

où

$$\lambda_1(x) = \frac{\varphi(x, y) - \varphi(x, b)}{y - b}$$

et

$$\lambda_2(x) = \frac{\int_a^x \frac{\partial \varphi(u, b)}{\partial u} du - (x - a) \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{y - b}.$$

Si nous négligeons maintenant dans (14) le terme complémentaire et posons

$$f_2(x) = \varphi \left(x, b + (x - a) \frac{f'(a) - \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b}} \right), \quad (16)$$

nous obtenons une valeur approximative de $f(x)$ qui diffère de celui-ci par une quantité $\varrho(x)$, à laquelle nous pouvons donner la forme

$$\varrho(x) = \varphi(x, y) - \varphi \left(x, b + (x - a) \frac{f'(a) - \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b}} \right) = \delta(x) \mu(x),$$

où

$$\mu(x) = \frac{\varphi(x, y) - \varphi \left(x, b + (x - a) \frac{f'(a) - \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b}} \right)}{y - b - (x - a) \frac{f'(a) - \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b}}}.$$

Observons enfin que nous pouvons trouver deux quantités ξ et η , situées, celle-là dans l'intervalle (b, y) , celle-ci dans l'intervalle

$$\left(b + (x-a) \frac{f'(a) - \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b}}, y \right),$$

et telles que

$$\lambda_1(x) = \frac{\partial \varphi(x, \xi)}{\partial \xi} \quad (17)$$

et

$$\mu(x) = \frac{\partial \varphi(x, \eta)}{\partial \eta}. \quad (18)$$

Nous pouvons aussi trouver une quantité ζ_1 , située dans l'intervalle (a, x) , et une autre quantité ζ_2 , située dans l'intervalle (a, ζ_1) , telles que

$$\lambda_2(x) = \frac{(x-a)(\zeta_1-a)}{y-b} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(\zeta_2, b)}{\partial \zeta_2^2}. \quad (19)$$

Ceci posé, nous chercherons les conditions qu'il faut attribuer à la fonction φ pour que $f_2(x)$ soit une meilleure approximation de $f(x)$ que $f_1(x)$, c'est-à-dire pour que $|\varrho(x)| < |\varepsilon(x)|$.

Pour fixer les idées, nous supposons que $x > a$, ce qui, bien entendu, ne renferme aucune restriction.

Nous voulons montrer que la fonction $\varphi(x, y)$ peut toujours être déterminée de manière à rendre $|\varrho(x)| < |\varepsilon(x)|$, supposé que l'on puisse déterminer

1) soit une quantité k_1 telle que

$$f'(u) > k_1 \quad (a \leq u \leq x), \quad (20)$$

2) soit une quantité k_2 telle que

$$f'(u) < k_2 \quad (a \leq u \leq x). \quad (20')$$

Dans le premier cas nous choisissons $\varphi(x, y)$ de sorte que $\varphi(x, v)$ devienne une fonction croissante et convexe de v pour $v \geq b$, tandis que $\varphi(u, b)$ sera une fonction pas convexe dans l'intervalle (a, x) et

$$\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} \leq k_1 \quad \left(\begin{array}{c} a \leq u \leq x \\ b \leq v \end{array} \right). \quad (21)$$

Dans le second cas, au contraire, nous choisissons $\varphi(x, y)$ de sorte que $\varphi(x, v)$ devienne une fonction décroissante et concave de v pour $v \geq b$, tandis que $\varphi(u, b)$ sera une fonction pas concave dans l'intervalle (a, x) et

$$\frac{\partial \varphi(u, b)}{\partial u} \geq k_2 \quad \left(\begin{array}{c} a \leq u \leq x \\ b \leq v \end{array} \right). \quad (21')$$

Dans tous les deux cas nous choisirons $\varphi(x, y)$ de manière à donner toujours le même signe aux quantités $\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$

$\left(\begin{array}{c} a \leq u \leq x \\ b \leq v \end{array} \right)$, et aussi à rendre

$$\left| \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \right| \geq \left| \frac{\partial \varphi(x, b)}{\partial b} \right|. \quad (22)$$

Il est maintenant facile à démontrer que $|\mu(x)| < |\lambda(x)|$.

Nous remarquons d'abord que v va toujours en croissant quand u varie de a à x , les expressions

$$f'(u) - \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}$$

et

$$\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$$

ayant le même signe quand u varie de a à x , et par conséquent $\frac{dv}{du}$ étant toujours positif dans l'intervalle (a, x) .¹ Donc $b < y$ et de même

¹ Nous aurions pu tout aussi bien déterminer $\varphi(u, v)$ de telle sorte que $\frac{dv}{du}$ devienne constamment négatif dans l'intervalle (a, x) .

$$b < b + (x - a) \frac{f'(a) - \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b}}.$$

Il en résulte immédiatement que

$$\xi < \eta. \quad (23)$$

Si $\varphi(x, v)$ est une fonction croissante et convexe de v , les dérivées partielles du premier et second ordre par rapport à v sont l'une positive, l'autre négative; donc

$$\frac{\partial \varphi(x, v)}{\partial v}$$

est une fonction décroissante de v , et nous aurons, ayant égard à (17), (18) et (23),

$$\mu(x) < \lambda_1(x).$$

Si, au contraire, $\varphi(x, v)$ est une fonction décroissante et concave de v , les dérivées partielles du premier et second ordre par rapport à v sont l'une négative, l'autre positive; donc

$$\frac{\partial \varphi(x, v)}{\partial v}$$

est une fonction croissante de v et nous aurons dans ce cas

$$-\mu(x) < -\lambda_1(x).$$

Nous avons donc toujours

$$|\mu(x)| < |\lambda_1(x)|.$$

Mais la formule (19) nous montre que $\lambda_2(x)$ est une quantité positive ou négative suivant que $\varphi(u, b)$ est une fonction concave ou convexe de u dans l'intervalle (a, x) . Or cette fonction, n'étant par hypothèse ni convexe en même temps que $\varphi(x, v)$, est une fonction croissante de v , ni con-

cave en même temps que celle-ci est décroissante, nous concluons que $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ ont toujours le même signe; donc

$$|\lambda_1(x)| \leq |\lambda(x)|$$

et d'autant plus

$$|\mu(x)| < |\lambda(x)|. \quad (24)$$

Enfin nous réduisons les deux fractions, dont est composée l'expression (15'), au même dénominateur en posant

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \\ &= \frac{\int_a^x f'(u) du - (x-a) \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a} - (x-a) f'(a) + (x-a) \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial a}}{\nu(x)} = \frac{\varepsilon(x)}{\nu(x)}. \end{aligned}$$

Mais les deux dénominateurs de (15') $\lambda(x)$ et $\frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b}$ ont le même signe, d'où il suit que le dénominateur commun $\nu(x)$ est situé entre ces deux quantités.

Dans ce qui précède, nous avons montré que $|\mu(x)| < |\lambda(x)|$. Cependant nous avons aussi

$$|\mu(x)| < \left| \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \right| \quad (25)$$

en vertu des inégalités

$$\left| \frac{\partial \varphi(x, v)}{\partial v} \right| < \left| \frac{\partial \varphi(x, b)}{\partial b} \right| \leq \left| \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \right| \quad (b < v).$$

Nous aurons donc

$$|\mu(x)| < |\nu(x)|$$

et par conséquent

$$|\varrho(x)| < |\varepsilon(x)|, \quad (26)$$

d'où il suit que $f_2(x)$ est une approximation plus exacte de $f(x)$ que l'expression $f_1(x)$, la fonction φ satisfaisant aux conditions posées.

Nous avons présumé jusqu'ici que φ soit une fonction non seulement de y mais aussi de x . Cependant le même résultat peut être obtenu en supposant φ fonction seulement de y , pourvu que $f'(u)$ ne s'annule pas entre a et x . Les conditions qu'il faut poser se simplifient alors essentiellement. En effet, on arrive au même résultat comme auparavant en supposant que $\varphi(v)$ soit une fonction croissante et convexe, si $f(u)$ croît dans l'intervalle (a, x) , mais décroissante et concave, si $f(u)$ décroît dans cette intervalle.¹

Il est facile à former des exemples d'une fonction $\varphi(x, y)$ ou $\varphi(y)$ remplissant les conditions données.

1) Posons

$$\varphi(x, y) = e^{-\frac{x}{y}}.$$

C'est une fonction croissante et convexe pour $y > \frac{x}{2} > 0$, puisque

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x}{y}}$$

est positif pour $x > 0$ et

¹ Si $f(u)$ croît et décroît dans l'intervalle (a, x) , c'est-à-dire si $f'(u)$ s'annule dans cette intervalle, on pourrait appliquer le procédé à la fonction $f(u) + ku$ au lieu de $f(u)$, k étant une quantité positive ou négative telle que $f'(u) + k$ ne s'annule pas entre a et x ; cela veut dire d'ailleurs le même que de poser

$$\varphi(u, v) = \varphi(v) - ku.$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = \frac{x}{y^4} e^{-\frac{x}{y}} (x - 2y)$$

est négatif pour $x > 0$ et $y > \frac{x}{2}$. Elle est en outre une fonction toujours concave de x ,

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = \frac{e^{-\frac{x}{y}}}{y^2}$$

étant toujours positif. Enfin nous aurons aussi

$$\left| \frac{\partial \varphi(a, b)}{\partial b} \right| > \left| \frac{\partial \varphi(x, b)}{\partial b} \right|$$

pour $x > a$.

2) Dans la fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x},$$

au contraire, nous trouverons une fonction décroissante et concave pour $y > 0$, puisque

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$$

est toujours négatif, tandis que

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3}$$

est positif pour $y > 0$. C'est de plus une fonction convexe pour $x > 0$, car

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

est alors négatif. En outre $\frac{\partial \varphi(x, b)}{\partial b}$ est indépendant de x .

3) Si nous admettons que la fonction φ dépend seulement de y , nous pouvons poser par exemple

$$\varphi(y) = \sqrt{y}$$

pour obtenir une fonction croissante et convexe (pour $y > 0$), ou

$$\varphi(y) = e^{-y}$$

pour obtenir une fonction décroissante et concave.

Nous sommes donc arrivés au résultat suivant:

Si $f(x)$ est une fonction, dont nous connaissons la valeur pour $x = a$ ainsi que celle de la dérivée, nous pouvons toujours, et d'une infinité de manières, former une fonction $\varphi(x, y)$ ou $\varphi(y)$, où y peut être déterminé de manière que cette fonction donne une approximation de $f(x)$ qui est plus exacte que celle obtenue par le développement de TAYLOR autour du point $x = a$ en négligeant les puissances de $x - a$ supérieures à la première.

Nous observons de plus ce fait remarquable:

Pour la construction d'une fonction $\varphi(x, y)$ ou $\varphi(y)$, ayant cette propriété, il faut seulement connaître si la fonction $f(x)$ est croissante ou décroissante dans l'intervalle (a, x) . En cas que $f(x)$ et croît et décroît dans l'intervalle (a, x) , il suffit de pouvoir déterminer une quantité k , positive ou négative, telle que $f'(x) + k$ reste supérieur ou inférieur à zéro dans cette intervalle.

Au contraire, il est évident que le degré de diminution de la différence absolue entre la valeur vraie et la valeur approximative de $f(x)$, que l'on obtient par l'emploi de la fonction $\varphi(x, y)$ ou $\varphi(y)$ au lieu du développement de TAYLOR, dépend de la manière dont varie $f(x)$ entre a et x .

Les conditions, dont nous avons démontré ci-dessus la suffisance pour notre but, ne sont pas toutefois nécessaires.

En effet, la fonction qu'a proposé M. MEIDELL pour le calcul approché des rentes viagères, savoir

$$\varphi(h, \xi) = (1 + hv)^{-\xi} a_{x\overline{n}},$$

ne les remplit pas, les dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 \varphi(h, \xi)}{\partial h^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varphi(h, \xi)}{\partial \xi^2}$$

étant toutes deux positives.

Quant à la fonction de M. STEFFENSEN

$$\varphi(i, \xi) = \frac{1 - (1 + i)^{-\xi}}{i},$$

elle ne les remplit non plus, parce qu'elle est convexe non seulement par rapport à ξ mais aussi par rapport à i (au moins pour les i petits).

Comme application des résultats obtenus nous choisissons d'abord les trois fonctions très simples que voici

$$\varphi(y) = \frac{1}{y}, \quad (26)$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{y^2} \quad (27)$$

et

$$\varphi(y) = e^{-y}, \quad (28)$$

pour calculer quelques rentes viagères, en appliquant la table de mortalité des dix-sept compagnies d'assurance sur la vie suédoises¹ (${}^sM_u^h$) et les taux de $3\frac{1}{2}$ et $4\frac{1}{2}$ %, les valeurs pour 4 % étant supposées connues.

Les fonctions choisies nous donnent les formules

$$a'_x = a_x \left(1 + \frac{hv S_x}{N_x} \right)^{-1}, \quad (26')$$

¹ Voir G. STOLTZ, Utjämning av sjutton svenska livförsäkringsbolags dödlighetstabeller för läkareundersökta livförsäkrade. Stockholm 1917, p. 92—127.

$$a'_x = a_x \left(1 + \frac{h\nu S_x}{2N_x} \right)^{-2} \quad (27')$$

et

$$a'_x = a_x e^{-\frac{h\nu S_x}{N_x}}. \quad (28')$$

Les tables I et II montrent les résultats, auxquels aboutissent ces formules, ainsi que les valeurs exactes et celles qui résultent des formules (3), (2) et (5).

Table I. $a_x - {}^sM_u^h - 3\frac{1}{2}\%$.

x	Valeurs exactes	Valeurs approximatives d'après					
		(3)	(2)	(5)	(26')	(27')	(28')
30	19,171	19,091	19,164	19,142	19,191	19,164	19,138
40	16,575	16,524	16,570	16,557	16,587	16,570	16,554
50	13,428	13,401	13,426	13,419	13,449	13,426	13,417
60	9,945	9,933	9,944	9,941	9,948	9,944	9,940

Table II. $a_x - {}^sM_u^h - 4\frac{1}{2}\%$.

x	Valeurs exactes	Valeurs approximatives d'après					
		(3)	(2)	(5)	(26')	(27')	(28')
30	16,599	16,527	16,592	16,575	16,613	16,593	16,572
40	14,655	14,608	14,650	14,639	14,664	14,651	14,637
50	12,146	12,119	12,142	12,137	12,150	12,143	12,135
60	9,207	9,195	9,206	9,203	9,209	9,206	9,202

Dans la table III sont données les valeurs qu'on obtient pour $4\frac{1}{2}\%$, en appliquant les mêmes formules et supposant connues les valeurs correspondant à $3\frac{1}{2}\%$.

Table III. $a_x - {}^sM_u^h - 4\frac{1}{2}\%$.

x	Valeurs exactes	Valeurs approximatives d'après					
		(3)	(2)	(5)	(26')	(27')	(28')
30	16,599	16,276	16,572	16,496	16,656	16,574	16,484
40	14,655	14,451	14,640	14,591	14,719	14,639	14,582
50	12,146	12,036	12,137	12,111	12,166	12,136	12,105
60	9,207	9,158	9,202	9,192	9,216	9,202	9,188

Nous voyons que la formule (27') donne les meilleurs résultats des formules (26'), (27') et (28') dans les trois cas étudiés. Or, ces trois formules pouvant s'écrire sous la forme commune

$$a'_x = a_x \left(1 + \frac{h\nu S_x}{kN_x} \right)^{-k}, \quad (29)$$

en donnant à k respectivement les valeurs 1, 2 et ∞ , les résultats obtenus ci-dessus indiquent que la formule la plus utile de cette forme doit se présenter, si l'on donne au constant k une valeur entre 1 et 2. Si, par exemple, on pose $k=1,5$, la formule (29) donne les valeurs très satisfaisantes qu'indique la table IV.

Table IV. $a_x - {}^sM_u^h$.

x	a_x connu pour 4 %				a_x connu pour 3 1/2 %	
	a_x calculé pour 3 1/2 %		a_x calculé pour 4 1/2 %			
	a_x	Δ	a_x	Δ	a_x	Δ
30	19,173	-0,002	16,600	- 0,001	16,602	- 0,003
40	16,576	-0,001	14,656	-0,001	14,658	-0,003
50	13,428	0,000	12,145	+ 0,001	12,146	0,000
60	9,945	0,000	9,207	0,000	9,207	0,000

Pour voir si cette dernière formule est aussi utile au calcul des rentes viagères correspondant à une autre table de mortalité que celle appliquée ci-dessus, nous supposons connues les rentes viagères pour 4 % et la table anglaise HM^1 et calculons les valeurs pour $3\frac{1}{2}$ %, $4\frac{1}{2}$ % et 5 %. La table V montre le résultat.

Table V. $a_x - HM$.

x	$3\frac{1}{2}$ %		$4\frac{1}{2}$ %		5 %	
	a_x	d	a_x	d	a_x	d
20	20,223	+0,002	17,260	+0,002	16,039	+0,008
30	18,416	0,000	15,989	0,000	14,968	+0,003
40	16,103	0,000	14,260	0,000	13,466	0,000
50	13,188	-0,001	11,936	0,000	11,383	0,000
60	9,835	0,000	9,107	0,000	8,776	0,000

En appliquant une table de mortalité, employée par certaines compagnies suédoises pour l'assurance des rentes immédiates (femmes), et supposant connues les valeurs pour 6 %, nous obtenons pour $6\frac{1}{2}$ % et 7 % les valeurs approximatives données dans la table VI.

Table VI. a_x — table de mortalité pour les rentes immédiates, femmes.

x	$6\frac{1}{2}$ %		7 %	
	a_x	d	a_x	d
40	13,081	+0,001	12,364	+0,004
50	11,891	+0,001	11,320	+0,001
60	9,989	0,000	9,594	+0,001
70	7,380	0,000	7,158	0,000

¹ Institute of Actuaries life tables. London 1872.

Enfin nous vérifierons la formule au cas de deux têtes en employant la table de mortalité des dix-sept compagnies anglaises. Nous supposons que les valeurs pour $3\frac{1}{2}\%$ sont connues.

Table VII. a_{xy} — table de mortalité des dix-sept compagnies anglaises — 4 %.

x	$y = x$		$y = x + 10$	
	a_{xy}	d	a_{xy}	d
30	14,305	+0,002	13,145	+0,002
40	12,299	+0,001	10,723	+0,001
50	9,627	0,000	7,860	0,000
60	6,717	0,000	5,045	0,000

Nous avons donc trouvé dans

$$a'_x = a_x \left(1 + \frac{hvS_x}{1,5N_x} \right)^{-1,5} \quad (30)$$

une formule d'approximation qui donne avec une exactitude presque étonnante la valeur d'une rente viagère pour une augmentation ou diminution du taux d'intérêt.¹

Les résultats obtenus ci-dessus peuvent être généralisés au cas, où l'on a égard à trois ou plusieurs termes de la série de TAYLOR. Cependant nous ne nous occuperons que du cas de trois termes, les autres cas offrant peu d'intérêt au point de vue des applications.

Supposons donc que les valeurs $f(a)$, $f'(a)$ et $f''(a)$ soient connues, et soit $\varepsilon(x)$ l'erreur qu'on fait en posant

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a). \quad (31)$$

¹ Il est évident que la formule après une petite modification peut être employée aussi pour le calcul des rentes temporaires.

Nous entendons comme auparavant par $\varphi(y)$ une fonction croissante et convexe, si $f(x)$ croît entre a et x ($a < x$), mais décroissante et concave, si $f(x)$ décroît dans l'intervalle (a, x) . En égalant $f(x)$ à cette fonction, y devient fonction de x , et nous développons y suivant les puissances de $x - a$, en négligeant les puissances supérieures à la seconde. En vertu des relations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{\varphi'(y)}$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f''(x) - \varphi''(y) \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(y)} \right]^2}{\varphi'(y)}$$

ce développement reçoit la forme

$$y = b + (x - a) \frac{f'(a)}{\varphi'(b)} + \frac{(x - a)^2}{2} \cdot \frac{f''(a) - \varphi''(b) \left[\frac{f'(a)}{\varphi'(b)} \right]^2}{\varphi'(b)} + \delta(x),$$

b désignant la valeur de y pour laquelle $\varphi(y)$ prend la valeur $f(a)$, et $\delta(x)$ désignant la somme des termes négligés. Ce reste peut être écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \delta(x) = & \frac{f(x) - f(a) - \frac{(x - a)^2}{2} \varphi''(b) \left[\frac{f'(a)}{\varphi'(b)} \right]^2}{\lambda(x)} + \\ & + \frac{\frac{(x - a)^2}{2} \varphi''(b) \left[\frac{f'(a)}{\varphi'(b)} \right]^2 - (x - a) f'(a) - \frac{(x - a)^2}{2} f''(a)}{\varphi'(b)}, \end{aligned}$$

en posant

$$\lambda(x) = \frac{\varphi(y) - \varphi(b)}{y - b} - \frac{(x - a)^2 \varphi''(b) \left[\frac{f'(a)}{\varphi'(b)} \right]^2}{2(y - b)}$$

Mais

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(b)}{y - b} = \varphi'(\xi) \quad (b < \xi < y);$$

donc

$$|\lambda(x)| > |\varphi'(\xi)|,$$

$\varphi'(\xi)$ et $\varphi''(b)$ ayant des signes contraires.

Posons maintenant

$$f(x) = \varphi \left(b + (x-a) \frac{f'(a)}{\varphi'(b)} + \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \frac{f''(a) - \varphi''(b) \left[\frac{f'(a)}{\varphi'(b)} \right]}{\varphi'(b)} \right) + \varrho(x); \quad (32)$$

alors nous aurons

$$\varrho(x) = \delta(x) \varphi'(\eta),$$

où η est une quantité comprise entre

$$b + (x-a) \frac{f'(a)}{\varphi'(b)} + \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \frac{f''(a) - \varphi''(b) \left[\frac{f'(a)}{\varphi'(b)} \right]}{\varphi'(b)} \text{ et } y.$$

En supposant que la limite inférieure de cette intervalle est plus grande que b , ce qui est certainement le cas si $f'(a)$ et $f''(a)$ ont les mêmes signes ou si

$$\frac{|\varphi''(b)|}{[\varphi'(b)]^2} > \frac{|f''(a)|}{[f'(a)]^2},^1$$

nous aurons $\xi < \eta$ et

$$|\varphi'(\eta)| < |\varphi'(\xi)|,$$

et par conséquent

$$|\varphi'(\eta)| < |\lambda(x)| \text{ et } |\varphi'(\eta)| < |\varphi'(b)|,$$

¹ On peut toujours faire remplir cette condition en multipliant $\varphi(y)$ par un constant convenable.

d'où résulte, $\lambda(x)$ et $\varphi'(b)$ ayant les mêmes signes,

$$|\varphi(x)| < |\varepsilon(x)|.$$

Ce résultat peut être utilisé s'il s'agit de déterminer le taux d'intérêt correspondant à une annuité donnée.¹

Nous avons

$$a_{\overline{n}} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

ou, introduisant le taux d'intérêt continu δ au lieu de l'intérêt annuel i et développant suivant les puissances de δ ,

$$\frac{a_{\overline{n}}}{n} = 1 - \frac{n+1}{2}\delta + \frac{(n+1)(2n+1)}{12}\delta^2 - \dots \quad (33)$$

En négligeant dans cette série les puissances supérieures à δ , on obtient une équation du premier degré pour l'approximation de δ . Cette équation nous donne

$$\delta = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{a_{\overline{n}}}{n} \right), \quad (34)$$

formule qui, toutefois, donne des valeurs approximatives, assez éloignées des valeurs vraies. Si nous maintenons aussi le terme contenant δ^2 , nous obtenons une équation du second degré pour calculer δ qui, cependant, alors devient en général complexe.

Cependant, par la méthode indiquée plus haut cette formule peut être remplacée par une formule, donnant des valeurs acceptables.

¹ De nombreuses formules sont proposées pour ce calcul. Voir Institute of Actuaries Text-Book, I (new edition), p. 102. Une formule très simple et utile est proposée par M. STEFFENSEN dans le vol. I du Journal of the Institute of Actuaries (A formula for the Rate of Interest in an Annuity-Certain). Dans une note laissée, publiée dans le vol. VIII des Transactions of the Faculty of Actuaries (Notes on Compound Interest Formulas and Tables), GEORG HARDY a déduit une formule très intéressante, donnant des valeurs très précises, mais qui est assez compliquée.

En effet, posons

$$f(\delta) = \frac{a_{\overline{n}}}{n} \text{ et } \varphi(y) = y^{-k},$$

où k est une quantité positive. Nous avons

$$f(0) = 1, f'(0) = -\frac{n+1}{2}, f''(0) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

et

$$b = 1, \varphi'(1) = -k, \varphi''(1) = k(k+1).$$

Donc

$$y = 1 + \frac{n+1}{2k}\delta - \frac{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (k+1)\frac{(n+1)^2}{4k}}{k}\delta^2.$$

Si nous fixons k de manière à rendre le coefficient de δ^2 égal à zéro, nous aurons

$$k = \frac{3(n+1)}{n-1}$$

et

$$\frac{a_{\overline{n}}}{n} = \left(1 + \frac{n-1}{6}\delta\right)^{-\frac{3(n+1)}{n-1}},$$

d'où nous obtenons

$$\delta = \frac{6}{n-1} \left(\left(\frac{n}{a_{\overline{n}}} \right)^{\frac{n-1}{3(n+1)}} - 1 \right). \quad (35)$$

Posons par exemple $n = 30$ et $a_{\overline{n}} = 17,292$. Alors la formule (35) nous donne

$$\delta = \frac{6}{29} \left(\left(\frac{30}{17,292} \right)^{\frac{29}{93}} - 1 \right) = 0,0388$$

tandis que la vraie valeur à quatre décimales est 0,0392. En employant la formule (34), nous obtenons la valeur 0,0273.

En donnant d'autres valeurs à k ou employant une autre fonction $\varphi(y)$, nous pouvons arriver à d'autres formules qui donnent des valeurs plus précises, mais nous ne poursuivrons pas ce but; notre intention n'étant que de montrer qu'on peut en certains cas se servir aussi de la méthode plus générale qui vient d'être indiquée pour déduire une formule d'approximation.