Su di un sistema generale di equazioni che si può integrare col metodo delle caratteristiche.

(Di ORAZIO TEDONE, a Milano.)

I.

1. Sia $u_1, u_2, \dots, u_m$ un sistema di m funzioni regolari, qualunque delle $m+1$ variabili $x, x_1, x_2, \dots, x_m$ e poniamo:

$$\theta = \sum_1^m \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \varpi_{h,k} = \frac{\partial u_h}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_h}, \quad (1)$$

d'onde:

$$\varpi_{h,h} = 0, \quad \varpi_{h,k} = -\varpi_{k,h}.$$

Proponiamoci, quindi, il problema di determinare il sistema delle funzioni $u_1, u_2, \dots, u_m$ in modo che soddisfino al sistema delle m equazioni:

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial \theta}{\partial x_l} - a^2 \sum_1^m \frac{\partial \varpi_{l,i}}{\partial x_i} - X_l = 0 \quad (l=1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

dove le X_l sono delle funzioni regolari, note.

Le equazioni (2) possono porsi sotto una qualunque delle forme seguenti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} - a^2 \sum_1^m \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} - (b^2 - a^2) \frac{\partial \theta}{\partial x_l} - X_l &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} - (b^2 - 2a^2) \frac{\partial \theta}{\partial x_l} - 2a^2 \sum_1^m \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} - a^2 \sum_1^m \frac{\partial \varpi_{l,i}}{\partial x_i} - X_l &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(2') \\ &(2'') \end{aligned} \quad (l=1, 2, \dots, m),$$

e, se x s'interpreta come il valore del tempo ed $x_1, x_2, \dots, x_m$ s'interpretano come le coordinate ortogonali di un punto in uno spazio lineare ad m dimensioni, si vede facilmente che esse possono interpretarsi come le equazioni del moto elastico di un corpo solido, omogeneo ed isotropo in quello spazio ad m

dimensioni. In questo caso le u_i sono da interpretarsi come le componenti dello spostamento, θ come la dilatazione e le $\varpi_{h,k}$ come le rotazioni del corpo solido intorno alle intersezioni degli m iperpiani coordinati a due a due.

2. Per procedere alla integrazione delle equazioni (2) consideriamo $x, x_1, x_2, \dots, x_m$ come le coordinate di un punto in uno spazio lineare ad $m+1$ dimensioni, spazio che indicheremo col simbolo (x, x_i) . Indichiamo con S_{m+1} una porzione finita di questo spazio, con Σ_m la varietà ad m dimensioni che le serve di contorno e, come al solito, indichiamo con n la direzione della normale a Σ_m diretta verso l'interno di S_{m+1} . Supporremo poi che Σ_m soddisfi alle solite condizioni perchè allo spazio S_{m+1} possa applicarsi il teorema di GREEN.

Allora, se $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ è un altro sistema di funzioni pure regolari, soddisfacenti alle (2), quando per le X_l si sostituiscono altre funzioni X'_l , col solito procedimento, si può stabilire la formola fondamentale:

$$\int_{S_{m+1}} \left(\sum_1^m X_i u'_i - \sum_1^m X'_i u_i \right) dS_{m+1} + \int_{\Sigma_m} \left(\sum_1^m U_i u'_i - \sum_1^m U'_i u_i \right) d\Sigma_m = 0, \quad (A)$$

dove:

$$U_l = \frac{\partial u_l}{\partial x} \frac{dx}{dn} - b^2 \theta \frac{dx_l}{dn} - a^2 \sum_1^m \varpi_{l,i} \frac{dx_i}{dn}, \quad (3)$$

e le U'_l rappresentano le espressioni analoghe alle U_l calcolate con le funzioni u'_l . Chiameremo le U_l le *funzioni coniugate alle u_l* .

3. Sia ora (x', x'_i) un punto determinato dello spazio (x, x_i) e chiamiamo α la retta parallela all'asse x condotta per questo punto. Introduciamo, quindi, nelle nostre considerazioni le due varietà coniche, di rotazione intorno alla retta α , aventi il vertice nel punto (x', x'_i) e per equazioni.

$$\frac{b(x' - x)}{\pm r} = 1, \quad \frac{a(x' - x)}{\pm r} = 1, \quad r = \sqrt{\sum_1^m (x'_i - x_i)^2}. \quad (4)$$

Chiameremo queste due varietà col nome di *varietà caratteristiche delle equazioni (2)* e le indicheremo con i simboli B ed A rispettivamente.

Se supponiamo che la direzione positiva della normale a queste varietà sia quella che va all'interno della porzione dello spazio (x, x_i) in cui sia

$\left| \frac{b(x' - x)}{r} \right| > 1$, ovvero $\left| \frac{a(x' - x)}{r} \right| > 1$, nei punti di esse si avrà:

$$\frac{dr}{dn} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dr}{dn} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad (5)$$

e, se supponiamo scelta convenientemente la direzione positiva dell'asse x , sulle falde delle stesse varietà coniche su cui $x' > x$ si avrà:

$$\frac{dx}{dn} = -\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}, \text{ ovvero } \frac{dx}{dn} = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad (6)$$

mentre sulle falde su cui $x' < x$ si avrà:

$$\frac{dx}{dn} = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}, \text{ ovvero } \frac{dx}{dn} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}. \quad (6')$$

Sarà pure necessario, per le nostre considerazioni, introdurre la varietà cilindrica di rotazione intorno alla stessa retta α , che ha per equazione $r = \varepsilon$, ε essendo una costante arbitraria, e che indicheremo col simbolo C . Notiamo, a questo proposito, che in tutti i punti di C è $\frac{dx}{dn} = 0$ e che sceglieremo la direzione positiva della normale a C in modo che in ogni suo punto sia pure $\frac{dr}{dn} = +1$.

4. Supponiamo ora che sia:

$$u'_i = \frac{\partial \psi_b}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

In conseguenza di questa posizione avremo:

$$\sigma' = \sum_1^m \frac{\partial^2 \psi_b}{\partial x_i^2}, \quad \sigma_{h,k} = 0,$$

e, quindi, i primi membri delle equazioni (2) si riducono a:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left[\frac{\partial^2 \psi_b}{\partial x^2} - b^2 \sum_1^m \frac{\partial^2 \psi_b}{\partial x_i^2} \right] - X_l \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

Se dunque $\psi(x, x_i)$ soddisfa alla equazione:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \sum_1^m \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} = 0, \quad (8)$$

le funzioni u'_l date dalle (7) e costruite con la funzione:

$$\psi_b = \psi[\pm b(x' - x), x'_i - x_i], \quad (9)$$

forniranno un sistema di integrali particolari delle (2) quando le X_l sieno eguali a zero.

Ricercando ora gli integrali della (8) che sono della forma :

$$\psi = x \varphi(\tau), \quad \tau = \frac{x}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{\sum_1^m x_i^2},$$

si trova che la funzione φ deve soddisfare all'equazione :

$$\tau(1 - \tau^2) \varphi''(\tau) + [2 + (m - 3)\tau^2] \varphi'(\tau) = 0, \quad (10)$$

onde, se $\tau > 1$, possiamo porre :

$$\varphi(\tau) = \int_0^\tau \frac{(\tau^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}}}{\tau^2} d\tau, \quad (11)$$

e, se $\tau < 1$, possiamo porre :

$$\varphi(\tau) = \int_0^\tau \frac{(1 - \tau^2)^{\frac{m-1}{2}}}{\tau^2} d\tau. \quad (11')$$

Le funzioni u'_i date dalle (7) quando la funzione ψ_b è determinata a questo modo si chiameranno *integrali principali delle equazioni (2) di prima specie*.

Supponiamo, in secondo luogo, che :

$$u'_h = -\frac{\partial \psi_a}{\partial x_h}, \quad u'_k = \frac{\partial \psi_a}{\partial x_h}, \quad u'_i = 0 \text{ per } i \neq h, k. \quad (12)$$

In questo caso, osservando che $\theta' = 0$, i primi membri delle equazioni (2) diventano :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u'_h}{\partial x^2} - a^2 \sum_1^m i \frac{\partial \varpi_{h,i}}{\partial x_i} - X_h &= -\frac{\partial}{\partial x_h} \left[\frac{\partial^2 \psi_a}{\partial x^2} - a^2 \sum_1^m i \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial x_i^2} \right] - X_h, \\ \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x^2} - a^2 \sum_1^m i \frac{\partial \varpi_{k,i}}{\partial x_i} - X_k &= -\frac{\partial}{\partial x_h} \left[\frac{\partial^2 \psi_a}{\partial x^2} - a^2 \sum_1^m i \frac{\partial^2 \psi_a}{\partial x_i^2} \right] - X_k, \\ -a^2 \sum_1^m i \frac{\partial \varpi_{l,i}}{\partial x_i} - X_l &= -X_l \text{ per } l \neq h, k, \end{aligned}$$

quindi le equazioni (2) saranno verificate se supporremo :

$$X_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m) \quad \text{e} \quad \psi_a = \psi [\pm a(x' - x), x'_i - x_i],$$

la funzione ψ soddisfacendo sempre alla solita equazione (8).

Supporremo anche, nel caso presente, che ψ abbia la forma $x \varphi(\tau)$ e che quindi $\varphi(\tau)$ sia ancora determinata dalla (11) o (11').

Chiameremo le funzioni u'_i , date dalle (12), quando la funzione ψ_a è determinata come sopra, *integrali principali delle equazioni (2) di seconda specie*.

5. Facciamo coincidere ora, dapprima, la porzione S_{m+1} dello spazio (x, x_i) che compare nella (A), con la porzione $S'_{m+1,b}$ la quale è limitata dalla varietà B , dalla varietà C e dalla porzione $\Sigma'_{m,b}$ di una varietà Σ_m ad m dimensioni tale che ogni retta parallela all'asse x la incontri in un punto solo e che non abbia la retta α per tangente. In ogni punto di $S'_{m+1,b}$ sia inoltre:

$$|\tau_b| \geq 1, \quad \tau_b = \frac{b(x' - x)}{r},$$

potendo, del resto, però, essere $x' > x$, ovvero $x' < x$. Facciamo invece coincidere le funzioni u'_i col sistema degli integrali di prima specie delle nostre equazioni.

Con calcolo semplice si trova allora che in questo caso:

$$\left. \begin{aligned} u'_i &= -(\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_i}, \\ U'_i &= (m-1) \tau_b \frac{b}{r} (\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dx}{dn} - b^2 \frac{m-1}{r} (\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \frac{dx_i}{dn}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Ne viene, quindi, che su B è $u'_i = U'_i = 0$, mentre su C :

$$\left. \begin{aligned} u'_i &= -(\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_i}, \\ U'_i &= -b^2 \frac{m-1}{\varepsilon} (\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_i}, \quad \tau_b = \frac{b(x' - x)}{\varepsilon} (*). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Indicando, quindi, con (C) la porzione di C che fa parte del contorno di $S'_{m+1,b}$, la formola (A), nel caso che ci occupa, ci darà:

$$\int_{S'_{m+1,b}} \sum_1^m X_i u'_i dS_{m+1} + \int_{\Sigma'_{m,b} + (C)} \left(\sum_1^m U_i u'_i - \sum_1^m U'_i u_i \right) d\Sigma_m = 0. \quad (15)$$

(*) Nelle nostre considerazioni non insistiamo, in modo speciale, sui casi di $m=2$ e $m=3$ i quali richiederebbero qualche osservazione in più che nel caso generale, perchè essi sono svolti completamente nella Memoria del prof. VOLTERRA: *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes*. Act. Math., t. 18, e nella mia: *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi*. Atti della R. Accad. di Torino, s. II, t. XLVII.

E, se in questa formola facciamo tendere ε a zero, osservando che su C è $\frac{dx_i}{dn} = \frac{\partial r}{\partial x_i}$, quindi:

$$\sum_1^m u'_i \sum_1^m \varpi_{i,j} \frac{dx_i}{dn} = -(\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m \sum_1^m \varpi_{i,j} \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} = 0,$$

$$\sum_1^m U_i u'_i = b^2 (\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \theta, \quad \sum_1^m U'_i u_i = -b^2 \frac{m-1}{\varepsilon} (\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \sum_1^m u_i \frac{\partial r}{\partial x_i},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(C)} \left(\sum_1^m U_i u'_i - \sum_1^m U'_i u_i \right) d\Sigma_m = \pm 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} b^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-1} \theta(x, x') dx,$$

dove x_0 dinota il valore di x che corrisponde alla intersezione di α con Σ_m e dove vale il segno $+$, o il segno $-$, secondo che $x' > x_0$, ovvero $x' < x_0$, si trova, indicando con $S_{m+1,b}$ e $\Sigma_{m,b}$ ciò che diventano $S'_{m+1,b}$ e $\Sigma'_{m,b}$ quando $\varepsilon = 0$,

$$\begin{aligned} & \pm 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} b^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-1} \theta(x, x') dx = \int_{S_{m+1,b}} (\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m X_i \frac{\partial r}{\partial x_i} dS_{m+1} \\ & + \int_{\Sigma_{m,b}} (\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m U_i \frac{\partial r}{\partial x_i} d\Sigma_m - (m-1)b \int_{\Sigma_{m,b}} (\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_b \frac{dx}{dn} \sum_1^m u_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{d\Sigma_m}{r} \\ & + (m-1)b^2 \int_{\Sigma_{m,b}} (\tau_b^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \sum_1^m u_i \frac{dx_i}{dn} \frac{d\Sigma_m}{r}. \end{aligned} \quad (16)$$

Se deriviamo questa formola m volte, rapporto ad x' , la formola che si ottiene determina il valore di θ nel punto (x', x'_i) in funzione dei valori che acquistano le X in tutti i punti di $S_{m+1,b}$ e dei valori che le u_i e le derivate delle u_i , rapporto alle x ed x_i , acquistano su $\Sigma_{m,b}$.

6. Supponiamo, in secondo luogo, che S_{m+1} coincida con la porzione $S'_{m+1,a}$ dello spazio (x, x_i) limitata alla varietà A , dalla varietà C e dalla porzione $\Sigma'_{m,a}$ della stessa varietà Σ_m di prima; mentre le u'_i coincidono con un sistema di integrali principali di seconda specie.

Come innanzi, si trova, allora, facilmente:

$$\begin{aligned}
 u'_h &= (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_h}, \quad u'_k = -(\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_h}, \quad u'_l = 0 \text{ per } l \neq h, k, \\
 U'_h &= -(m-1) \frac{a}{r} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \frac{\partial r}{\partial x_h} \frac{dx}{dn} - a^2 (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial x_h} \\
 &\quad + (m-1) \frac{a^2}{r} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \frac{dr}{dn} \frac{\partial r}{\partial x_h} \\
 &\quad + a^2 (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_h \partial x_h} \frac{dx_h}{dn} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_h^2} \frac{dx_h}{dn} \right) \\
 &\quad - (m-1) \frac{a^2}{r} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \frac{\partial r}{\partial x_h} \left(\frac{\partial r}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dn} - \frac{\partial r}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dn} \right), \\
 U'_k &= (m-1) \frac{a}{r} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \frac{\partial r}{\partial x_h} \frac{dx}{dn} + a^2 (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial x_h} \\
 &\quad - (m-1) \frac{a^2}{r} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \frac{dr}{dn} \frac{\partial r}{\partial x_h} \\
 &\quad + a^2 (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_k^2} \frac{dx_h}{dn} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_h \partial x_k} \frac{dx_h}{dn} \right) \\
 &\quad - (m-1) \frac{a^2}{r} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \frac{\partial r}{\partial x_h} \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_h}{dn} - \frac{\partial r}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dn} \right), \\
 U'_l &= a^2 (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_h \partial x_l} \frac{dx_h}{dn} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_h \partial x_l} \frac{dx_h}{dn} \right) \\
 &\quad - (m-1) \frac{a^2}{r} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \frac{\partial r}{\partial x_l} \left(\frac{\partial r}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dn} - \frac{\partial r}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dn} \right) \\
 &\quad \text{per } l \neq h, k \\
 \tau_a &= \frac{a(x' - x)}{r},
 \end{aligned} \tag{17}$$

quindi, su A è $u'_l = U'_l = 0$ ($l = 1, 2, \dots, m$), mentre su C è:

$$\left. \begin{aligned} u'_h &= (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_k}, \quad u'_k = -(\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_h}, \quad u'_l = 0 \text{ per } l \neq h, k, \\ U'_h &= (m-1) \frac{a^2}{\varepsilon} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \frac{\partial r}{\partial x_k} - \frac{a^2}{\varepsilon} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_k}, \\ U'_k &= - (m-1) \frac{a^2}{\varepsilon} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \frac{\partial r}{\partial x_h} + \frac{a^2}{\varepsilon} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\partial r}{\partial x_h}, \\ U'_l &= 0 \text{ per } l \neq h, k \\ \tau_a &= \frac{a(x' - x)}{\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Chiamando (C') la porzione di C che appartiene al contorno di $S'_{m+1,a}$, la formola (A) ci darà dapprima:

$$\int_{S'_{m+1,a}} (X_h u'_h + X_k u'_k) dS_{m+1} + \int_{\Sigma'_{m,a} + (C')} (U_h u'_h + U_k u'_k) d\Sigma_m - \int_{\Sigma'_{m,a} + (C')} \sum_1^m U'_i u_i d\Sigma_m = 0. \quad (19)$$

Facciamo poi, come nel caso precedente, tendere, in questa formola, ε a zero. Poichè su C :

$$\begin{aligned} U_h u'_h + U_k u'_k &= -a^2 (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \varpi_{h,i} - \frac{\partial r}{\partial x_h} \varpi_{k,i} \right) \frac{\partial r}{\partial x_i}, \\ \sum_1^m U'_i u_i &= (m-1) \frac{a^2}{\varepsilon} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \left(u_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) \\ &\quad - \frac{a^2}{\varepsilon} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(u_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right), \end{aligned}$$

si ha, per $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon=0} \int_{(C')} (U_h u'_h + U_k u'_k) d\Sigma_m &= \mp \frac{2}{m} 2^{\frac{m}{2}} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-1} \varpi_{h,k}(x, x') dx, \\ \lim_{\varepsilon=0} \int_{(C')} \sum_1^m U'_i u_i d\Sigma_m &= \pm \frac{m-2}{m} 2^{\frac{m}{2}} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-1} \varpi_{h,k}(x, x') dx, \end{aligned}$$

quindi, chiamando $S_{m+1,a}$ e $\Sigma_{m,a}$ ciò che diventano $S'_{m+1,a}$ e $\Sigma'_{m,a}$ per $\varepsilon = 0$, la (19), per $\varepsilon = 0$, ci darà:

$$\begin{aligned}
 & \pm 2 \frac{\frac{m}{2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-1} \varpi_{h,k}(x, x') dx \\
 & = \int_{S_{m+1,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(X_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - X_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) dS_{m+1} \\
 & \quad + \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(U_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - U_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) d\Sigma_m \\
 & \quad + (m-1) a \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \frac{dx}{dn} \left(u_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
 & \quad + a^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(u_h \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial x_k} - u_k \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) d\Sigma_m \\
 & \quad - (m-1) a^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \frac{dr}{dn} \left(u_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
 & \quad - a^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m u_i \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_h \partial x_i} \frac{dx_h}{dn} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_i} \frac{dx_k}{dn} \right) d\Sigma_m \\
 & \quad + (m-1) a^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \tau_a^2 \sum_1^m a_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \left(\frac{\partial r}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dn} - \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dn} \right) \frac{d\Sigma_m}{r}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Possiamo eliminare, facilmente, da questa formola gli integrali impropri. Perciò osserviamo che:

$$\begin{aligned}
 & (m-1) \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 \frac{dr}{dn} u_h \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{d\Sigma_m}{r} = \int_{\Sigma'_{m,a}} \frac{dr}{dn} u_h \frac{\partial}{\partial x'_k} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} d\Sigma_m \\
 & = \int_{\Sigma'_{m,a}} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left[\frac{dr}{dn} u_h (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \right] d\Sigma_m + \int_{\Sigma'_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u_h \frac{d}{dn} \frac{\partial r}{\partial x_k} d\Sigma_m,
 \end{aligned}$$

e che:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma'_{m,\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left[\frac{dr}{dn} u_h (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \right] d\Sigma_m \\ &= \frac{\partial}{\partial x'_k} \int_{\Sigma_{m,\varepsilon}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u_h \frac{dr}{dn} d\Sigma_m \mp \frac{2}{m} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} (x' - x_0)^{m-1} u_h^0 \frac{dx_0}{dx'_k}, \end{aligned}$$

dove u_h^0 rappresenta il valore di u_h nel punto (x_0, x'_i) e $\frac{dx_0}{dx'_k}$ il valore della derivata di x rapporto ad x_k , ricavata dall'equazione di Σ_m , nel punto stesso. Similmente:

$$\begin{aligned} (m-1) \int_{\Sigma'_{m,\varepsilon}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a^2 u_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_h}{dn} \frac{d\Sigma_m}{r} &= \int_{\Sigma'_{m,\varepsilon}} u_i \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_h}{dn} \frac{\partial}{\partial x'_i} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} d\Sigma_m \\ &= \int_{\Sigma_{m,\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[u_i \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_h}{dn} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \right] d\Sigma_m + \int_{\Sigma'_{m,\varepsilon}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u_i \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_i} \frac{dx_h}{dn} d\Sigma_m, \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma'_{m,\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[u_i \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_h}{dn} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \right] d\Sigma_m \\ &= \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_{\Sigma_{m,\varepsilon}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u_i \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_h}{dn} d\Sigma_m \text{ per } i \neq k, \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma'_{m,\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left[u_k \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_h}{dn} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \right] d\Sigma_m \\ &= \frac{\partial}{\partial x'_k} \int_{\Sigma_{m,\varepsilon}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u_k \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_h}{dn} d\Sigma_m \mp \frac{2}{m} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} (x' - x_0)^{m-1} u_k^0 \frac{dx_0}{dx'_k}. \end{aligned}$$

L'equazione (20) può scriversi, quindi,

$$\begin{aligned}
 & \pm 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-1} \varpi_{h,k}(x, x_i) dx \\
 &= \pm \frac{4}{m} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} (x' - x_0)^{m-1} \left(u_h^0 \frac{dx_0}{dx'_h} - u_k^0 \frac{dx_0}{dx'_k} \right) \\
 & \quad + \int_{S_{m+1,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(X_h \frac{\partial r}{\partial x_h} - X_k \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) dS_{m+1} \\
 & \quad + \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} \left(U_h \frac{\partial r}{\partial x_h} - U_k \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) d\Sigma_m \\
 & \quad + (m-1) a \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \frac{dx}{dn} \left(u_h \frac{\partial r}{\partial x_h} - u_k \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
 & - a^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_k} \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u_h \frac{dr}{dn} d\Sigma_m - \frac{\partial}{\partial x'_h} \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u_k \frac{dr}{dn} d\Sigma_m \right\} \\
 & + a^2 \sum_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u_i \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_h}{dn} - \frac{\partial r}{\partial x_h} \frac{dx_k}{dn} \right) d\Sigma_m.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Derivando m volte, come prima, questa formola, rispetto ad x' , la formola che ne risulta determina il valore di $\varpi_{h,k}$ nel punto (x', x'_i) in funzione dei valori che le X assumono in $S_{m+1,a}$ e dei valori che le u_i e le derivate delle u_i rapporto alle x ed x_i assumono su $\Sigma_{m,a}$.

7. Si può pervenire a formole analoghe a quelle stabilite nel n.º prec. operando nel modo che segue.

Poniamo:

$$u'_h = \varphi(\tau_a), \quad u'_l = 0 \text{ per } l \neq h, \tag{22}$$

e $\varphi(\tau)$ soddisfi alla equazione (8). In conseguenza di questa ipotesi sarà:

$$\varphi'(\tau) = (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}}.$$

Supporremo poi che la costante arbitraria che viene a comparire in $\varphi(\tau)$ sia determinata in modo che, se $x' > x$, $\varphi(\tau_a)$ si annulli su quella falda di A su cui $x' > x$ e che, se, invece, $x' < x$, $\varphi(\tau_a)$ si annulli sull'altra falda di A su cui $x' < x$.

In conseguenza delle nostre posizioni, con calcolo agevole, si trova:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta' &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}, \quad \varpi_{i,h} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \varpi_{i,j} &= 0 \quad \text{per } i \text{ e } j \neq h, \\ U'_h &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} - a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{dn} - b^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dn} + a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dn}, \\ U'_l &= -b^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{dx_l}{dn} + a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \frac{dx_h}{dn} \quad \text{per } l \neq h, \\ X'_l &= -(b^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_l \partial x_h} \quad (l = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Sostituendo nella formola (A) questi risultati, si trova:

$$\begin{aligned} & \int_{S_{m+1}} X_h \varphi d S_{m+1} + (b^2 - a^2) \int_{S_{m+1}} \sum_1^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_i} u_i d S_{m+1} \\ & + \int_{\Sigma_m} U_h \varphi d \Sigma_m - \int_{\Sigma_m} u_h \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} - a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{dn} \right] d \Sigma_m \\ & + b^2 \int_{\Sigma_m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \sum_1^m u_i \frac{dx_i}{dn} d \Sigma_m - a^2 \int_{\Sigma_m} \frac{dx_h}{dn} \sum_1^m u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d \Sigma_m = 0, \end{aligned}$$

nell'ipotesi, s'intende, che il punto (x', x'_i) non sia contenuto in S_{m+1} , e, per essere:

$$\int_{S_{m+1}} \sum_1^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_h} u_i d S_{m+1} = - \int_{S_{m+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \vartheta d S_{m+1} - \int_{\Sigma_m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \sum_1^m u_i \frac{dx_i}{dn} d \Sigma_m,$$

la formola precedente si potrà scrivere:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{S_{m+1}} X_h \varphi d S_{m+1} + (b^2 - a^2) \int_{S_{m+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \vartheta d S_{m+1} \\ & + \int_{\Sigma_m} U_h \varphi d \Sigma_m - \int_{\Sigma_m} u_h \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} - a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{dn} \right] d \Sigma_m \\ & + a^2 \int_{\Sigma_m} \sum_1^m u_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{dx_i}{dn} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_h}{dn} \right) d \Sigma_m = 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Supponendo ora di avere scelto S_{m+1} come nel n.º prec. ed osservando che su una varietà di rotazione qualunque intorno alla retta α è:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{dx_i}{dn} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_h}{dn} = 0,$$

e che su A :

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} - a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{dn} = 0,$$

la formola (24) ci darà subito la:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{S_{m+1\alpha}} X_h \varphi dS_{m+1} + (b^2 - a^2) \int_{S_{m+1\alpha}} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_h} \theta dS_{m+1} \\ & + \int_{\Sigma'_{m\alpha} + (C)} U_h \varphi d\Sigma_m - \int_{\Sigma'_{m\alpha} + (C)} u_h \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} - a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{dn} \right] d\Sigma_m \\ & + a^2 \int_{\Sigma'_{m\alpha}} \sum_i^m u_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{dx_i}{dn} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_h}{dn} \right) d\Sigma_m = 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

E, se in questa formola facciamo tendere ε a zero, osservando che:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(C)} U_h \varphi d\Sigma_m &= 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(C)} u_h \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} - a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{dn} \right] d\Sigma_m \\ &= \pm 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^m \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-2} u_h(x, x') dx, \end{aligned}$$

abbiamo anche:

$$\left. \begin{aligned} & \pm 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^m \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-2} u_h(x, x') dx \\ & = \int_{S_{m+1\alpha}} X_h \varphi dS_{m+1} + (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x'_h} \int_{S_{m+1\alpha}} \varphi dS_{m+1} \\ & + \int_{\Sigma_{m\alpha}} U_h \varphi d\Sigma_m - \int_{\Sigma_{m\alpha}} u_h \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dn} - a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{dn} \right] d\Sigma_m \\ & + a^2 \int_{\Sigma_{m\alpha}} \sum_i^m u_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \frac{dx_i}{dn} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_h}{dn} \right) d\Sigma_m. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Non ci resta ora che a derivare questa equazione rispetto ad x'_k , a cambiare nel risultato h e k e a sottrarre dalla prima equazione la seconda per pervenire alla formola seguente :

$$\begin{aligned}
 & \pm 2 \frac{\frac{m}{2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^m \int_{x_0}^{x'} (x' - x)^{m-2} \varpi_{h,k}(x, x'_i) dx \\
 &= \pm 2 \frac{\frac{m}{2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^m (x' - x_0)^{m-2} \left(u_h^0 \frac{dx_0}{dx'_k} - u_k^0 \frac{dx_0}{dx'_h} \right) \\
 &+ \int_{S_{m+1,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \left(X_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - X_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) \frac{dS_{m+1}}{r} \\
 &+ \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \left(U_h \frac{\partial r}{\partial x_k} - U_k \frac{\partial r}{\partial x_h} \right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
 &+ a \frac{\partial}{\partial x'_k} \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} u_h \left(\frac{dx}{dn} - a \tau_a \frac{dr}{dn} \right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
 &- a \frac{\partial}{\partial x'_h} \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} u_k \left(\frac{dx}{dn} - a \tau_a \frac{dr}{dn} \right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
 &- a^2 \frac{\partial}{\partial x'_k} \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \sum_1^m u_i \left(\frac{\partial r}{\partial x_h} \frac{dx_i}{dn} - \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dx_h}{dn} \right) \frac{d\Sigma_m}{r} \\
 &+ a^2 \frac{\partial}{\partial x'_h} \int_{\Sigma_{m,a}} (\tau_a^2 - 1)^{\frac{m-3}{2}} \tau_a \sum_1^m u_i \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{dx_i}{dn} - \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dx_k}{dn} \right) \frac{d\Sigma_m}{r},
 \end{aligned} \tag{27}$$

la quale non differisce dalla derivata prima della (21) rispetto ad x' che per il coefficiente del termine $a^m (x' - x_0)^{m-2} \left(u_h^0 \frac{dx_0}{dx'_k} - u_k^0 \frac{dx_0}{dx'_h} \right)$.

8. Servendoci delle (21), ovvero delle (27), formiamo le espressioni:

$$b^2 \int_{x_0}^{x'} (x' - x) \theta(x, x'_i) dx, \quad a^2 \int_{x_0}^{x'} (x' - x) \varpi_{h,k}(x, x'_i) dx,$$

derivando la (16) e la (21) $m - 2$ volte, rispetto ad x' , ovvero la (16) $m - 2$ volte e la (27) $m - 3$ volte, e indichiamo i risultati, rispettivamente, con T e $P_{h,k}$. Avremo allora:

$$\frac{\partial T}{\partial x'_l} + \sum_1^m \frac{\partial P_{l,i}}{\partial x'_i} = \int_{x_0}^{x'} (x' - x) \left\{ b^2 \frac{\partial \theta(x, x'_i)}{\partial x'_l} + a^2 \sum_1^m \frac{\partial \varpi_{l,i}(x, x'_i)}{\partial x'_i} \right\} dx \\ - (x' - x_0) \left(b^2 \vartheta^0 \frac{dx_0}{dx'_l} + a^2 \sum_1^m \varpi_{l,i}^0 \frac{dx_0}{dx'_i} \right),$$

dove ϑ^0 e $\varpi_{l,i}^0$ indicano i valori di θ e di $\varpi_{l,i}$ nel punto (x_0, x'_i) . E, per mezzo delle equazioni (2) in cui si siano cambiate le x_i nelle x'_i , l'equazione precedente si potrà scrivere:

$$\int_{x_0}^{x'} (x' - x) \frac{\partial^2 u_l(x, x'_i)}{\partial x'^2} dx = (x' - x_0) \left(b^2 \vartheta^0 \frac{dx_0}{dx'_l} + a^2 \sum_1^m \varpi_{l,i}^0 \frac{dx_0}{dx'_i} \right) \\ + \frac{\partial T}{\partial x'_l} + \sum_1^m \frac{\partial P_{l,i}}{\partial x'_i} + \int_{x_0}^{x'} (x' - x) X_l(x, x'_i) dx.$$

Questa equazione, poi, alla sua volta, per essere:

$$\int_{x_0}^{x'} (x' - x) \frac{\partial^2 u_l(x, x'_i)}{\partial x'^2} dx = - (x' - x_0) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x} \right)^0 + u_l(x', x'_i) - u_l^0,$$

ci darà finalmente:

$$u_l(x', x'_i) = u_l^0 + (x' - x_0) \left\{ \left(\frac{\partial u_l}{\partial x} \right)^0 + b^2 \vartheta^0 \frac{dx_0}{dx'_l} + a^2 \sum_1^m \varpi_{l,i}^0 \frac{dx_0}{dx'_i} \right\} \\ + \frac{\partial T}{\partial x'_l} + \sum_1^m \frac{\partial P_{l,i}}{\partial x'_i} + \int_{x_0}^{x'} (x' - x) X_l(x, x'_i) dx \quad (l = 1, 2, \dots, m). \quad (28)$$

Le formole che sono rappresentate dalle (28) ci determinano i valori delle u_l nel punto (x', x'_i) per mezzo dei valori che le X_l e le u_l insieme alle derivate delle u_l rapporto alle x, x_i acquistano, rispettivamente, in $S_{m+1,b}$ ed in $\Sigma_{m,b}$, ovvero in $S_{m+1,a}$ ed in $\Sigma_{m,a}$, secondo che $b > a$, ovvero $a > b$.

9. Si potrebbero stabilire delle formole analoghe alle precedenti, partendo dalla forma (2'), ovvero dalla forma (2''), delle nostre equazioni, invece che dalla forma (2).

Così pure, si possono assoggettare $\Sigma_{m,b}$ e $\Sigma_{m,a}$ ad ipotesi particolari. Si può immaginare, ad es., che tanto $\Sigma_{m,b}$ come $\Sigma_{m,a}$ sieno composte di una

stessa porzione dell'iperpiano $x = x_0$, limitata dalla varietà ad $m - 1$ dimensioni Σ_{m-1} , e dalle porzioni della varietà cilindrica risultante dall'insieme delle parallele all'asse x condotte per i vari punti di Σ_{m-1} , comprese, rispettivamente, fra Σ_{m-1} , stessa e le varietà coniche B od A . Le formole che si ottengono a questo modo, possono essere interpretate anche nello spazio lineare ad n dimensioni (x_i) quando ad x si dia un significato differente da quello di coordinata, com'è il caso in cui s'interpreti come il valore del tempo. Queste formole, però, non attuano la integrazione del nostro sistema di equazioni, perchè in esse compaiono più elementi di quelli che son necessari per individuare i valori delle u , ma sarebbero da tenersi in considerazione speciale quando si volesse sviluppare la teoria dell'elasticità negli spazi superiori. Noi che abbiamo di mira, principalmente, la integrazione delle nostre equazioni, lasceremo da parte queste formole, come pure quelle quistioni che vi si riannodano.

Vogliamo però aggiungere l'osservazione seguente. Il processo indicato innanzi per la determinazione delle u , vien meno nel caso in cui il sistema integrale delle equazioni (2) è un sistema di funzioni indipendenti da x . In questo caso le equazioni (2) si riducono alle:

$$b^2 \frac{\partial \theta}{\partial x_l} + a^2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varpi_{li}}{\partial x_i} + X_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m), \quad (29)$$

e possono interpretarsi, quando $b^2 > 2a^2$, come le equazioni dell'equilibrio elastico nello spazio lineare ad m dimensioni (x_i). Per la trattazione di esse è superflua la considerazione dello spazio (x, x_i).

Le formole precedentemente stabilite sono suscettibili di determinarci, soltanto, i valori di θ e delle ϖ_{li} , e non è difficile pervenire da questi valori a quelle delle u_l . Noi, però, vogliamo, per questo, indicare un metodo che poi ci siamo accorti essere stato dato in modo completo dal prof. SOMIGLIANA (*) e che non abbiamo soppresso, soltanto per lasciare al soggetto la sua forma completa primitiva.

Anche su queste formole noi non intendiamo fermarci di proposito perchè esse non rappresentano l'integrale delle equazioni (29), contenendo più elementi di quelli che servono a determinare le u_l .

(*) *Annali di Matematica*, 1889, pag. 41.

Cominciamo perciò dal notare che, nel caso particolare che ci occupa, la formola fondamentale (A) si riduce a:

$$\int_{S_m} \left(\sum_1^m X_i u'_i - \sum_1^m X'_i u_i \right) dS_m + \int_{\Sigma_{m-1}} \left(\sum_1^m U_i u'_i - \sum_1^m U'_i u_i \right) d\Sigma_{m-1} = 0, \quad (30)$$

dove S_m indica una porzione finita dello spazio (x_i) , Σ_{m-1} il contorno di S_m e le U_i sono date dalle formole:

$$U_i = -b^2 \varrho \frac{d \cdot x_i}{d n} - a^2 \sum_1^m \varpi_{i,i} \frac{d x_i}{d n}. \quad (31)$$

Notiamo poi che se:

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m,$$

è un sistema di integrali particolari dell'equazione:

$$\sum_1^m \sum_1^m j \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} = 0,$$

posto:

$$S = \sum_1^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i},$$

si ha in:

$$u'_i = \sum_1^m \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_i^2} + \alpha \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad \alpha = \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \quad (32)$$

un sistema di integrali particolari delle equazioni (29) quando le X sono nulle.

Supponendo ora che (x'_i) sia un punto determinato interno ad S_m e non sul suo contorno Σ_{m-1} , potremo porre:

per il caso di $m = 2$:

$$\varphi_h = r^2 (\log r - 1), \quad \varphi_i = 0 \text{ per } i \neq h,$$

per il caso di $m = 3$:

$$\varphi_h = r, \quad \varphi_i = 0 \text{ per } i \neq h,$$

per il caso di $m = 4$:

$$\varphi_h = \log r, \quad \varphi_i = 0 \text{ per } i \neq h,$$

e per il caso di $m > 4$:

$$\varphi_h = \frac{1}{r^{m-h}}, \quad \varphi_i = 0 \text{ per } i \neq h, \quad r = \sqrt{\sum_1^m (x_i - x'_i)^2}.$$

Per poter applicare la formola (30) quando le u'_i sono così determinate, seguendo il solito processo, cominceremo ad applicarla allo spazio S'_m che si ottiene escludendo da S_m la porzione di esso che è limitata da una sfera Ω_{m-1} ad $m - 1$ dimensioni col centro nel punto (x'_i) e con raggio ε e poi faremo

tendere ε a zero. Si trova a questo modo facilmente:

$$A u(x'_i) = \int_{S_m} \sum_1^m X_i u'_i dS_m + \int_{\Sigma_{m-1}} \left(\sum_1^m U_i u'_i - \sum_1^m U'_i u_i \right) d\Sigma_{m-1}, \quad (33)$$

dove A indica un coefficiente numerico che per $m=2$ è eguale a $8\pi a^2$, per $m=3$

a $-8\pi a^2$, per $m=4$ a $-8\pi^2 a^2$ e per $m>4$ a $-4(m-4)(m-2) \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} a^2$.

II.

10. Dalle formole precedentemente stabilite si ottengono, però, dei risultati notevoli, supponendo in esse che $\Sigma_{m,b}$ si riduca alla porzione dell'iperpiano $x=x_0$, limitata dalla varietà caratteristica B , e che $\Sigma_{m,a}$ si riduca alla porzione dello stesso iperpiano, limitata dalla varietà caratteristica A .

Indicheremo queste due porzioni dell'iperpiano $x=x_0$, rispettivamente, con $S_{m,b}$ e con $S_{m,a}$. Esse sono limitate da due varietà sferiche concentriche ad $m-1$ dimensioni dello spazio (x_i) , il cui centro comune è il punto (x_0, x'_i) ed i cui raggi sono rispettivamente: $r_b = b(x' - x_0)$, $r_a = a(x' - x_0)$, presi in valore assoluto. Queste due varietà sferiche le indicheremo poi con $\Sigma_{m-1,b}$ e $\Sigma_{m-1,a}$, rispettivamente.

Per le formole che andiamo a stabilire supporremo, per semplicità, che le X_i sieno tutte nulle.

Osservando allora che sull'iperpiano $x=x_0$ è:

$$\frac{dx_i}{dn} = 0, \quad \frac{dx}{dn} = \pm 1,$$

a seconda che $x' > x_0$, ovvero $x' < x_0$, troviamo subito pel caso di $m=2p+1$:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} b^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x) \theta(x, x'_i) dx &= 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} b^{m-1} T \\ &= \frac{\partial^{p-1}}{\partial x'^{p-1}} \int_{S_{m,b}} \frac{\partial^p}{\partial x'^p} [b^2 (x' - x_0)^2 - r^2]^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dS_{m,b}}{r^{m-1}} \\ &\quad + \frac{\partial^p}{\partial x'^p} \int_{S_{m,b}} \frac{\partial^p}{\partial x'^p} [b^2 (x' - x_0)^2 - r^2]^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m \varphi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dS_{m,b}}{r^{m-1}}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x) \varpi_{h,k}(x, x'_i) dx &= 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^{m-1} P_{h,k} \\
&= \frac{\partial^{p-1}}{\partial x' p-1} \int_{S_{m,a}} \frac{\partial^p}{\partial x' p} [a^2 (x' - x_0)^2 - r^2]^{\frac{m-1}{2}} \left(\psi_h \frac{\partial r}{\partial x'_h} - \psi_k \frac{\partial r}{\partial x'_k} \right) \frac{dS_{m,a}}{r^{m-1}} \\
&\quad + \frac{\partial^p}{\partial x' p} \int_{S_{m,a}} \frac{\partial^p}{\partial x' p} [a^2 (x' - x_0)^2 - r^2]^{\frac{m-1}{2}} \left(\varphi_h \frac{\partial r}{\partial x_h} - \varphi_k \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \frac{dS_{m,a}}{r^{m-1}},
\end{aligned} \quad (35)$$

e per caso di $m = 2p$:

$$\begin{aligned}
2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} b^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x) \varrho(x, x'_i) dx &= 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} b^{m-1} T \\
&= \frac{\partial^{p-2}}{\partial x' p-2} \int_{S_{m,b}} \frac{\partial^p}{\partial x' p} [b^2 (x' - x_0)^2 - r^2]^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x'_i} \frac{dS_{m,b}}{r^{m-1}} \\
&\quad + \frac{\partial^{p-1}}{\partial x' p-1} \int_{S_{m,b}} \frac{\partial^p}{\partial x' p} [b^2 (x' - x_0)^2 - r^2]^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m \varphi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dS_{m,b}}{r^{m-1}},
\end{aligned} \quad (34')$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^{m+1} \int_{x_0}^{x'} (x' - x) \varpi_{h,k}(x, x'_i) dx &= 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} a^{m-1} P_{h,k} \\
&= \frac{\partial^{p-2}}{\partial x' p-2} \int_{S_{m,a}} \frac{\partial^p}{\partial x' p} [a^2 (x' - x_0)^2 - r^2]^{\frac{m-1}{2}} \left(\psi_h \frac{\partial r}{\partial x'_h} - \psi_k \frac{\partial r}{\partial x'_k} \right) \frac{dS_{m,a}}{r^{m-1}} \\
&\quad + \frac{\partial^{p-1}}{\partial x' p-1} \int_{S_{m,a}} \frac{\partial^p}{\partial x' p} [a^2 (x' - x_0)^2 - r^2]^{\frac{m-1}{2}} \left(\varphi_h \frac{\partial r}{\partial x_h} - \varphi_k \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \frac{dS_{m,a}}{r^{m-1}},
\end{aligned} \quad (35')$$

nelle cui formole le ψ_i e le φ_i indicano i valori che assumono le quantità $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ ed u_i quando al posto di x si sostituisce x_0 .

Le formole (28) ci danno invece:

$$u_l(x', x'_i) = \varphi_l^0 + (x' - x_0) \psi_l^0 + \frac{\partial T}{\partial x'_l} + \sum_1^m \frac{\partial P_{l,i}}{\partial x'_i}, \quad (l = 1, 2, \dots, m), \quad (36)$$

dove φ_l^0 e ψ_l^0 indicano i valori di φ_l e ψ_l nel punto (x_0, x'_i) .

11. Le formole (36) rappresentano l'integrale generale delle equazioni (2) quando le X_l sono eguali a zero. Infatti, si vede facilmente che T e $P_{l,i}$, $\frac{\partial T}{\partial x'}$ e $\frac{\partial P_{l,i}}{\partial x'}$ per $x' = x_0$ si annullano, perciò, per $x' = x_0$, $u_l(x', x'_i)$ si riduce a φ_l^0 e $\frac{\partial u_l}{\partial x'}$ si riduce a ψ_l^0 . Inoltre, dati ad arbitrio φ_l^0 e ψ_l^0 si trova che:

$$\varphi_l = \varphi_l^0 \left[x'_i + b(x' - x_0) \frac{\partial r}{\partial x_i} \right], \quad \psi_l = \psi_l^0 \left[x'_i + b(x' - x_0) \frac{\partial r}{\partial x_i} \right],$$

e quindi si possono costruire le espressioni di T e di $P_{l,i}$ e le (36).

Se le φ_l^0 , ψ_l^0 sono funzioni analitiche dei loro argomenti anche le u_l sono funzioni analitiche delle x' , x'_i e le (36) rappresentano quell'integrale delle equazioni (2) la cui esistenza è dimostrata dal teorema della KOWALEVSKY.

12. Può anche facilmente dimostrarsi in modo diretto che le funzioni u_l date dalle (36) soddisfano all'equazione (2), quando le X_l sono eguali a zero.

Se deriviamo, infatti, le (36) due volte rispetto ad x' si trova:

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x'_l} \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \sum_1^m \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x'^2}.$$

Il nostro asserto sarà dunque dimostrato quando avremo fatto vedere che:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} = b^2 \vartheta, \quad \frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x'^2} = a^2 \varpi_{l,i}, \quad (37)$$

dove, ora, le ϑ e $\varpi_{l,i}$ sono da costruirsi con le funzioni u_l delle x'_i date dalle (36).

Ma, poichè $P_{h,k} = -P_{k,h}$, $P_{h,h} = 0$, si trova subito che:

$$\sum_1^m \frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x'_l \partial x'_i} = 0,$$

quindi, se indichiamo con ϑ^* e $\varpi_{l,i}^*$ le espressioni analoghe alle ϑ e $\varpi_{l,i}$, costruite con le funzioni:

$$\varphi_l^0 + (x' - x_0) \psi_l^0,$$

avremo anche subito:

$$\vartheta = \vartheta^* + \sum_1^m \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2}.$$

Similmente, osservando che:

$$\frac{\partial P_{h,i}}{\partial x'_h} + \frac{\partial P_{i,h}}{\partial x'_h} + \frac{\partial P_{h,h}}{\partial x'_i} = 0,$$

si trova anche:

$$\varpi_{l,i} = \varpi_{l,i}^* + \sum_1^m \frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x'^2}.$$

Ne viene che le formole (37) possono anche scriversi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} = b^2 \sum_1^m \frac{\partial^2 T}{\partial x_i'^2} + b^2 \vartheta^*, \quad \frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x'^2} = a^2 \sum_1^m \frac{\partial^2 P_{l,i}}{\partial x_i'^2} + a^2 \varpi^*_{l,i}. \quad (38)$$

Noi ci limiteremo a dimostrare soltanto la prima di queste relazioni, giacchè le altre si dimostrano all'identico modo.

Anzi possiamo limitare la dimostrazione, evidentemente, al solo caso in cui soltanto le ψ_i sieno diverse da zero.

13. Prendiamo dapprima a considerare il caso di $m = 2p + 1$. Nelle ipotesi fatte, la (34) si potrà scrivere:

$$2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(m)}{\Gamma(\frac{m}{2})} b^{m-1} T = \frac{\partial^{m-2}}{\partial x'^{m-2}} \int_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2 (x' - x_0)^2}{r^2} - 1 \right]^p \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} dS_{m,b}. \quad (39)$$

Ora:

$$\begin{aligned} & \int_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2 (x' - x_0)^2}{r^2} - 1 \right]^p \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} dS_{m,b} \\ &= \sum_0^p (-1)^j \binom{p}{j} b^{2j} (x' - x_0)^{2j} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{dS_{m,b}}{r^{2j}} \\ &= \sum_0^p (-1)^{j+1} \binom{p}{j} \frac{b^{2j}}{2j-1} (x' - x_0)^{2j} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \psi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r^{2j-1}} dS_{m,b} \\ &= \sum_0^p (-1)^j \binom{p}{j} \frac{b^{2j}}{2j-1} (x' - x_0)^{2j} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{dS_{m,b}}{r^{2j-1}} \\ &+ \sum_0^p (-1)^{j+1} \binom{p}{j} \frac{b}{2j-1} (x' - x_0)^{2j} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dS_{m,b}. \end{aligned}$$

Quindi, osservando che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{dS_{m,b}}{r^{2j-1}} &= \frac{b}{r_b^{2j-1}} \int_{\Sigma_{m-1,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d\Sigma_{m-1,b}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{dS_{m,b}}{r^{2j-1}} &= \frac{b^2}{r_b^{2j-1}} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \left(\sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) dS_{m,b} - (2j-1) \frac{b^2}{r_b^{2j}} \int_{\Sigma_{m-1,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d\Sigma_{m-1,b}, \\ \frac{\partial}{\partial x'} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dS_{m,b} &= b \int_{\Sigma_{m-1,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d\Sigma_{m-1,b}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dS_{m,b} &= b^2 \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \left(\sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) dS_{m,b}, \end{aligned}$$

risulta :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \left\{ \int_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2 (x' - x_0)^2}{r^2} - 1 \right]^p \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} d S_{m,b} \right\} \\ &= \sum_1^p j (-1)^j \binom{p}{j} 2^j b^{2j} (x' - x_0)^{2j-2} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{d S_{m,b}}{r^{2j-1}} \\ &+ \sum_0^p j (-1)^j \binom{p}{j} b^2 \int_{S_{m-1,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d S_{m-1,b} . \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Allo stesso modo si ottiene facilmente :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x'_h} \left\{ \int_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2 (x' - x_0)^2}{r^2} - 1 \right]^p \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} d S_{m,b} \right\} \\ &= \sum_0^p (-1)^j \binom{p}{j} \frac{b^{2j}}{2^{j-1}} (x' - x_0)^{2j} \frac{\partial}{\partial x'_h} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{d S_{m,b}}{r^{2j-1}} , \end{aligned}$$

dove l'accento messo sull'integrale indica che nel fare la derivata rispetto ad x'_h bisogna supporre che la sfera $S_{m,b}$ resti immobile. La formola precedente si può quindi scrivere :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x'_h} \left\{ \int_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2 (x' - x_0)^2}{r^2} - 1 \right]^p \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} d S_{m,b} \right\} \\ &= \frac{b^{2p}}{2^{p-1}} (x' - x_0)^{2p} \frac{\partial}{\partial x'_h} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{d S_{m,b}}{r^{2p-1}} \\ &+ \sum_0^{p-1} (-1)^{j+1} \binom{p}{j} \frac{b^{2j}}{2^{j-1}} (x' - x_0)^{2j} \int_{S_{m,b}} \left(\sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{1}{r^{2j-1}} d S_{m,b} . \end{aligned}$$

Perciò anche :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \left\{ \int_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2 (x' - x_0)^2}{r^2} - 1 \right]^p \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} d S_{m,b} \right\} \\ &= \sum_0^p j (-1)^j \binom{p}{j} \left(\sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x_h} \right)^2 d S_{m-1,b} \\ &+ \frac{b^{2p}}{2^{p-1}} (x' - x_0)^{2p} \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{d S_{m,b}}{r^{2p-1}} \\ &+ \sum_0^{p-1} j (-1)^j \binom{p}{j} \frac{b^{2j}}{2^{j-1}} (x' - x_0)^{2j} \int_{S_{m,b}} \left(\sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_h^2} \frac{1}{r^{2j-1}} d S_{m,b} , \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
& \sum_1^m \frac{\partial^2}{\partial x_h'^2} \left\{ \int_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2(x' - x_0)^2}{r^2} - 1 \right]^p \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} d S_{m,b} \right\} \\
&= \sum_0^p (-1)^j \binom{p}{j} \int_{\Sigma_{m-1,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} d \Sigma_{m-1,b} \\
&\quad + 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} b^{2p} (x' - x_0)^{2p} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_i} \\
&\quad + \sum_0^{p-1} (-1)^{j+1} \binom{p}{j} 2(p-j) b^{2j} (x' - x_0)^{2j} \int_{S_{m,b}} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} \frac{d S_{m,b}}{r^{2j+1}}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Osservando poi, infine, che:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{m-2}}{\partial x'^{m-2}} \left\{ 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} b^{2p} (x' - x_0)^{2p} \sum_1^m \frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_i} \right\} &= 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} b^{m-1} (x' - x_0) \sum_1^m \frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_i} \\
&= 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma(m)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} b^{m-1} \vartheta^*,
\end{aligned}$$

si trova, finalmente, dimostrata la prima delle (38) (*), come si vede confrontando la (40) con la (41) dopo aver cambiato, nel primo termine del secondo membro di quest'ultima, j in $j-1$ ed aver osservato che:

$$\binom{p}{j-1} (p-j+1) = \binom{p}{j} j.$$

(*) La dimostrazione di questa proposizione si sarebbe potuta condurre anche in un modo alquanto differente. E vogliamo accennare particolarmente ad essa perchè è analoga a quella che abbiamo data pel caso di $m=3$ nella Memoria della R. Acc. di Torino, già citata. Senza assoggettare l'integrale:

$$\int_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2(x' - x_0)^2}{r^2} - 1 \right]^p \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} d S_{m,b},$$

ad alcuna trasformazione, si può cominciare dall'osservare che al variare di x' , ovvero di x'_h , l'integrale precedente varia in due modi differenti: nel primo modo varia soltanto il contorno di $S_{m,b}$ e nel secondo soltanto la funzione sotto il segno integrale, e serven-

14. Resta però sempre a considerare il caso di $m = 2p$. Perciò si osserva che:

$$\begin{aligned} & \int_{S_{m,b}} \left[\frac{b^2 (x' - x_0)^2}{r^2} - 1 \right]^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} dS_{m,b} \\ &= \int_{S_{m,b}} \frac{b^{m-1} (x' - x_0)^{m-1}}{r^{m-1}} \left[1 - \frac{r^2}{b^2 (x' - x_0)^2} \right]^{\frac{m-1}{2}} \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} dS_{m,b} \\ &= \sum_0^\infty (-1)^j \binom{\frac{m-1}{2}}{j} \int_{S_{m,b}} \frac{b^{m-2j-1} (x' - x_0)^{m-2j-1}}{r^{m-2j-1}} \sum_1^m \psi_i \frac{\partial r}{\partial x_i} dS_{m,b}, \end{aligned}$$

Poichè ora la serie precedente si può derivare termine a termine, la dimostrazione si può condurre, precisamente, come nel caso di $m = 2p + 1$.

III.

15. Facciamo ora coincidere la porzione S_{m+1} dello spazio (x, x_i) , che comparisce nella (A), con la porzione $\bar{S}'_{m+1,b}$ dello stesso spazio, la quale è limitata dalla varietà caratteristica B , dalla varietà cilindrica C e da una porzione $\bar{\Sigma}_{m,b}$ di una varietà $\bar{\Sigma}_m$ ad m dimensioni tale che in ogni suo punto sia $|\tau_b| \leq 1$. Questa condizione è allora soddisfatta in ogni punto di $\bar{S}'_{m+1,b}$. Facciamo inoltre coincidere le u'_i con gli integrali principali di prima specie delle nostre equazioni (2).

L'equazione (A) dietro queste ipotesi si ridurrà alla seguente:

$$\int_{\bar{S}'_{m+1,b}} \sum_1^m X_i u'_i dS_{m+1} + \int_{\bar{\Sigma}_{m,b} + (\bar{C})} \left(\sum_1^m U_i u'_i - \sum_1^m U'_i u_i \right) d\bar{\Sigma}_m = 0,$$

dosi poi del seguente principio generale, facilmente dimostrabile, e che contiene come caso particolare il teorema di LEIBNITZ:

Allorchè una funzione A al variare di un suo argomento α varia in k modi differenti, facendo corrispondere a ciascuno di questi modi di variare della A , ciascuna delle k quantità: $\alpha, b, c, \dots$, la derivata h^{ma} di A si può ottenere sostituendo nello sviluppo della potenza h^{ma} del polinomio $\alpha + b + c + \dots$, al posto della potenza $\alpha^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ la derivata di A di ordine $\alpha + \beta + \gamma + \dots$ ottenuta facendo variare A , α volte nella maniera che corrisponde ad α , β volte nella maniera che corrisponde a b , ecc.

dove $(\bar{C})$ indica la porzione della varietà C che fa parte del contorno di $\bar{S}'_{m+1,b}$. Facendo ora tendere a zero il raggio ε di C la parte del secondo integrale che è estesa a $(\bar{C})$ si annulla ed il primo integrale si riduce all'integrale analogo che è esteso a tutta la porzione $\bar{S}_{m+1,b}$ dello spazio (x, x_i) che è compresa fra la varietà caratteristica B e $\bar{\Sigma}_{m,b}$. A questo modo l'equazione precedente si riduce a:

$$\int_{\bar{S}_{m+1,b}} \sum_i^m X_i u'_i dS_{m+1} + \int_{\bar{\Sigma}_{m,b}} \left(\sum_i^m U_i u'_i - \sum_i^m U'_i u_i \right) d\Sigma_m = 0,$$

la quale è una relazione identica fra le varie quantità che in essa compaiono.

A relazioni identiche si perviene supponendo che, sulla (A) , S_{m+1} si riduca alla porzione di spazio $\bar{S}'_{m+1,a}$ che è limitata dalla varietà caratteristica A , da C e dalla porzione $\bar{\Sigma}_{m,a}$ della stessa varietà $\bar{\Sigma}_m$ di prima, tale che in ogni suo punto sia $|\tau_a| \leq 1$, facendo coincidere le u'_i con uno qualunque dei sistemi degli integrali di seconda specie delle nostre equazioni e poi andando al limite per $\varepsilon = 0$.

16. Nel caso di m pari è possibile però trovare altri sistemi d'integrali particolari delle nostre equazioni che ci permettano di determinare i valori delle u_i nel punto (x', x'_i) in funzione dei valori delle X_i nelle porzioni di spazio $\bar{S}_{m+1,b}$ ed $\bar{S}_{m+1,a}$ e dei valori delle u_i e delle derivate parziali delle u_i rispetto alle variabili x, x_i in tutti i punti di $\bar{\Sigma}_{m,b}$ e di $\bar{\Sigma}_{m,a}$. È ciò che ora ci proponiamo di mostrare brevemente.

Introduciamo perciò nelle nostre considerazioni l'iperpiano $x = x'$ e chiamiamo I' la parte di questo iperpiano che è compresa fra $\bar{\Sigma}_m$ e C . I' divide la porzione dello spazio (x, x_i) compresa fra $\bar{\Sigma}_m$, B e C che innanzi abbiamo chiamata $\bar{S}'_{m+1,b}$ in due parti. Quella in cui $x \geq x'$ continueremo a chiamarla $\bar{S}'_{m+1,b}$ e quella in cui $x \leq x'$ la chiameremo, invece, $\bar{S}''_{m+1,b}$. Chiameremo ancora $\bar{\Sigma}_{m,b}$ e (C') le porzioni di Σ_m e di C che insieme a B e ad I' formano il contorno di $\bar{S}'_{m+1,b}$; chiameremo invece $\bar{\Sigma}''_{m,b}$ e (C'') le porzioni di Σ_m e di C che insieme, ancora, a B e ad I' formano il contorno di $\bar{S}''_{m+1,b}$.

Ricordiamo poi che, nel caso di $m = 2p$, la funzione:

$$\psi = (x' - x) \nabla^{p-1} \int_0^{x'-x} \frac{\sqrt{r^2 - u^2}}{u^2} \log \frac{r^2 - u^2}{r} du, \quad \nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

soddisfa alla equazione (8). Essa può porsi anche sotto l'altra forma:

$$\psi = (x' - x) \nabla^{p-1} \int_0^{\tau} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau, \quad \tau = \frac{x' - x}{r}.$$

Possiamo quindi costruire i due sistemi di integrali delle equazioni (2), analoghi agli integrali di prima specie che abbiamo di già considerati:

$$\begin{aligned} v'_i = b(x' - x) & \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right. \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \tau_b} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right]_{\tau_b=1} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_b=1} \right\}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} v''_i = b(x' - x) & \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right. \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \tau_b} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right]_{\tau_b=1} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_b=1} \right\}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\tau_b = \frac{b(x' - x)}{r}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Si vede facilmente che le v'_i e le loro funzioni coniugate, che indicheremo con V'_i , si annullano su quella falda di B su cui $x' \leq x_i$; mentre le v''_i e le loro funzioni coniugate, V''_i , si annullano sull'altra falda di B su cui $x' \geq x_i$. Similmente possiamo costruire sistemi di integrali analoghi a quelli di seconda

specie, ponendo :

$$\begin{aligned}
 v_h^{'''} &= -a(x' - x) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right. \\
 &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial \tau_a} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right]_{\tau_{a=1}} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x_k} \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_{a=1}} \right\}, \\
 v_k^{'''} &= a(x' - x) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right. \\
 &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial \tau_a} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right]_{\tau_{a=1}} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x_h} \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_{a=1}} \right\}, \\
 v_i^{'''} &= 0 \text{ per } i \neq h, k.
 \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
 v_h^{IV} &= -a(x' - x) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right. \\
 &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial \tau_a} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right]_{\tau_{a=1}} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x_k} \\
 &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_{a=1}} \right\}, \\
 v_k^{IV} &= a(x' - x) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right. \\
 &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial \tau_a} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right) \right]_{\tau_{a=1}} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x_h} \\
 &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_{a=1}} \right\}, \\
 v_i^{IV} &= 0 \text{ per } i \neq h, k.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Si vede anche ora facilmente che il sistema di integrali v_i''' e le loro funzioni coniugate V_i''' si annullano su quella falda di A su cui $x' \leq x$; mentre gli integrali (45) e le loro funzioni coniugate V_i^{IV} si annullano sull'altra falda di A , su cui $x' \geq x$.

Ed ora applichiamo la formola (A) in ciascuna delle due porzioni dello spazio (x, x_i) : $\bar{S}'_{m+1,b}$ ed $\bar{S}''_{m+1,b}$, ponendo, per le u'_i , nel primo caso gli integrali (42) e nel secondo gli integrali (43). Notando allora che su I' è $x = x'$, potremo scrivere le due formole seguenti:

$$\int_{\bar{S}'_{m+1,b}} \sum_1^m X_i v'_i dS_{m+1} + \int_{\bar{\Sigma}'_{m,b}(C')} \left(\sum_1^m U_i v'_i - \sum_1^m V'_i u_i \right) d\Sigma_m - \int_{I'} \sum_1^m u_i \frac{\partial v'_i}{\partial x} dI' = 0,$$

$$\int_{\bar{S}''_{m+1,b}} \sum_1^m X_i v''_i dS_{m+1} + \int_{\bar{\Sigma}''_{m,b}(C'')} \left(\sum_1^m U_i v''_i - \sum_1^m V''_i u_i \right) d\Sigma_m + \int_{I'} \sum_1^m u_i \frac{\partial v''_i}{\partial x} dI' = 0.$$

Facendo ora, in queste formole, tendere ϵ a zero, si trova subito che gli integrali estesi a (C') e a (C'') svaniscono, mentre l'integrale esteso ad I' diventa l'integrale esteso a tutta la porzione I dell'iperpiano $x = x'$, compresa fra la varietà $\bar{\Sigma}_m$. Inoltre, al limite, $\bar{S}'_{m+1,b}$ ed $\bar{S}''_{m+1,b}$ rappresentano le due porzioni dello spazio (x, x_i) limitate da $\bar{\Sigma}'_{m,b}$, B ed I e da $\bar{\Sigma}''_{m,b}$, B ed I , rispettivamente. Se ora sommiamo le due relazioni precedenti, ponendo prima:

$$\left. \begin{aligned} \bar{T} = & \int_{\bar{S}'_{m+1,b}} \sum_1^m X_i v'_i dS_{m+1} + \int_{\bar{S}''_{m+1,b}} \sum_1^m X_i v''_i dS_{m+1} \\ & + \int_{\bar{\Sigma}'_{m,b}} \left(\sum_1^m U_i v'_i - \sum_1^m V'_i u_i \right) d\Sigma_m + \int_{\bar{\Sigma}''_{m,b}} \left(\sum_1^m U_i v''_i - \sum_1^m V''_i u_i \right) d\Sigma_m, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

potremo scrivere la formola:

$$\bar{T} = 2b \sum_1^m \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_I u_i \left(\nabla^{p-1} \int_0^{x_i} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau=b=1} dI. \quad (47)$$

Allo stesso modo, applicando la formola (A) nelle due porzioni dello spazio (x, x_i) : $\bar{S}'_{m+1,a}$, $\bar{S}''_{m+1,b}$, dopo aver posto per le u'_i nel primo caso gli integrali (44) e nel secondo gli integrali (45), si possono stabilire delle for-

mole analoghe. E, se poniamo:

$$\left. \begin{aligned} \overline{P}_{h,k} = & \int_{\overline{S}'_{m+1,\alpha}} (X_h v_h''' + X_k v_k''') d S_{m+1} + \int_{\overline{S}''_{m+1,\alpha}} (X_h v_h^{IV} + X_k v_k^{IV}) d S_{m+1} \\ & + \int_{\overline{\Sigma}'_{m,\alpha}} (U_h v_h''' + U_k v_k''' - V_h''' u_h - V_k''' u_k) d \Sigma_m \\ & + \int_{\overline{\Sigma}''_{m,\alpha}} (U_h v_h^{IV} + U_k v_k^{IV} - V_h^{IV} u_h - V_k^{IV} u_k) d \Sigma_m, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

queste formole potranno scriversi come segue:

$$\left. \begin{aligned} \overline{P}_{h,k} = & 2 a \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_k} \int_I u_h \left(\nabla^{p-1} \int_0^{t_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_{a=1}} dI \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial x'_h} \int_I u_k \left(\nabla^{p-1} \int_0^{t_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_{a=1}} dI \right\} \\ & (h, k = 1, 2, \dots m). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Per determinare ora il valore di una qualunque delle u , per es., di u_j , nel punto (x', x'_i) , deriviamo la (47) rispetto ad x'_j e tutte le formole analoghe alla (49) in cui h ha il valore j , rispetto ad x'_k e sommiamo i risultati dopo di aver divisa la prima per b e le altre per a . Troviamo, facilmente, a questo modo:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{b} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x'_j} + \frac{1}{a} \sum_1^m \frac{\partial \overline{P}_{j,k}}{\partial x'_k} \\ & = 2 \sum_1^m \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} \int_I u_j \left(\nabla^{p-1} \int_0^{t_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_{b=1}} dI. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

A questo punto notiamo che:

$$\left(\nabla^{p-1} \int_0^{t_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_{b=1}} = \left(\nabla^{p-1} \int_0^{t_a} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_{a=1}},$$

è un integrale particolare dell'equazione:

$$\sum_1^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i'^2} = 0,$$

e che nel punto $x_i = x'_i$ diventa infinita come $\frac{1}{r^{m-2}}$.

Applicando quindi un ragionamento analogo a quello che si fa per stabilire il teorema di Poisson, nella teoria del potenziale, e notando che:

$$2 \lim_{r=0} r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nabla^{p-1} \int_0^{\tau_b} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau^2} \log(r(1-\tau^2)) d\tau \right)_{\tau_b=1} = \pi (-2)^{p-1} \Gamma(p),$$

si trova:

$$2^p (-\pi)^{p+1} u_j(x', x'_i) = \frac{1}{b} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x'_j} + \frac{1}{a} \sum_1^m \frac{\partial \bar{P}_{j,k}}{\partial x'_k}, \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (51)$$

Novembre 1897.