Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen.

2. Mitteilung.

Von

Emil Hilb in Würzburg.

In der ersten Mitteilung¹⁾ haben wir die Lösung der als Beispiel herausgegriffenen Differenzengleichung

$$(1) \quad (ax + b)f(x+1) + (cx + d)f(x) = g(x)$$

durch Grenzbedingungen der Form

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Delta^n f(x)|} < q$$

festgelegt, wo Δ irgendeine geeignete distributive Operation, q eine entsprechend gewählte Konstante ist. Wählt man als solche Operation speziell

$$(3) \quad E(f(x)) = f(x+1),$$

so erhält man, wenn

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|g(c+n)|} < \left| \frac{c}{a} \right|$$

ist,

$$5) \quad f(x) = \frac{g(x)}{cx+d} - \frac{ax+b}{(cx+d)(cx+d+c)} g(x+1) + \frac{(ax+b)(ax+b+a)}{(cx+d)(cx+d+c)(cx+d+2c)} g(x+2) -$$

als einzige Lösung von (1), für welche

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(x+n)|} < \left| \frac{c}{a} \right|$$

ist. In der so gewonnenen Lösung von (1) haben wir das Analogon der Nörlundschen²⁾ Hauptlösung für die Differenzengleichungen

$$(7) \quad f(x+1) \pm f(x) = g(x).$$

¹⁾ Math. Zeitschrift 14 (1922), S. 211–229.

²⁾ Vgl. die in I zitierte Arbeit von Nörlund.

Ist nun für (1) die Bedingung (4) nicht erfüllt, so entsteht nach Nörlund die Frage, ob man nicht durch geeignete Summation aus (5) trotzdem eine brauchbare Lösung erhält. Die Diskussion dieser Frage für beliebige Differenzgleichungen mit rationalen Koeffizienten, allerdings noch unter einer in § 2 angegebenen Einschränkung, bildet die Aufgabe dieser zweiten Mitteilung. Durch Einführung eines geeigneten Parameters λ , wie man es bei den Integralgleichungen längst gewohnt ist, gelingt die Zurückführung dieser Frage auf bekannte Fragen der Funktionentheorie. Läßt man aber die eben erwähnte Einschränkung fallen, so müssen, wie mir scheint, erst die entsprechenden Sätze der Funktionentheorie ausgebaut werden, worauf ich daher erst in einer der folgenden Mitteilungen zurückkommen möchte.

§ 1.

Behandlung des einfachsten Falles.

Wir betrachten die Differenzgleichung

$$(8) \quad f(x) + \lambda f(x+1) = g(x).$$

Dann ergibt die allgemeine Theorie, die in unserer ersten Mitteilung, allerdings nur, wie erwähnt, an (1) durchgeführt wurde (vgl. die Behandlung des allgemeinen Falles im folgenden Paragraph), unmittelbar:

Ist

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|g(x+n)|} < \frac{1}{|\lambda|},$$

so ist

$$(10) \quad f(x) = g(x) - \lambda g(x+1) + \lambda^2 g(x+2) - \dots$$

die einzige Lösung von (8), für welche

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(x+n)|} < \frac{1}{|\lambda|}$$

ist. Ist dagegen

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|g(x+n)|} \geq \frac{1}{|\lambda|},$$

so kann man über die Existenz der durch das Funktionselement (10) definierten Funktion in bezug auf λ eben genau das aussagen, was man über das Verhalten einer Potenzreihe auf dem Konvergenzkreis oder über die Frage weiß, wann ein gegebenes λ dem zu (10) gehörigen Hauptstern in der λ -Ebene angehört. Die wichtigsten hier in Betracht kommenden Sätze finden sich in dem Referat von Bieberbach in der math. Enc. II C 4 S. 460–487 zusammengestellt. Um dem nicht von vornherein orientierten Leser einen Begriff von der Art dieser Sätze zu geben, greife ich

den bei Bieberbach l. c. S. 467 mitgeteilten Satz von Wigert heraus: Damit (10) eine ganze Funktion von $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ definiert, ist notwendig und hinreichend, daß $g(x)$ eine ganze Funktion ist, die höchstens dem Minimaltypus der Ordnung Eins angehört. In diesem Falle liefert also die durch das Funktionselement (10) gegebene Funktion eine Lösung von (8), außer für $\lambda = -1$.

Nörlund hat nun die über das Verhalten der Reihen (10) auf dem Konvergenzkreis bekannten Sätze durch Anwendung der Euler-Maclaurin'schen Summenformel vermehrt, speziell auch für den Fall, daß $g(x)$ für $x > a$ m -mal differenzierbar ist und $\int_a^\infty g^{(m)}(x) dx$ absolut konvergiert.

Der einfache Zusammenhang mit der Funktionentheorie, der durch Einführung des Parameters λ evident wird, ist, soviel ich sehe, von Nörlund nicht explizite hervorgehoben; im Gegenteil, er trennt streng die Fälle, in denen in (7) das $+$ - oder $-$ -Zeichen gilt, was nur dann Bedeutung hat, wenn $\lambda = -1$ singuläre Stelle auf dem Konvergenzkreis ist.

Ferner zeigt Nörlund, daß man durch Abziehen einer Konstanten, die bei unserem hier eingenommenen Standpunkt derart von λ abhängt, daß sie geeignet ∞ wird, wenn λ nach -1 rückt, das Unendlichwerden von (10) in bestimmten Fällen kompensieren kann.

§ 2.

Die Hauptlösung einer beliebigen Differenzengleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten.

Wir wenden uns jetzt zu der Differenzengleichung

$$(13) \quad \sum_{r=0}^m \lambda^r P_r(x) f(x+r) \equiv \sum_{r=0}^m \lambda^r \sum_{p=0}^n a_{rp} x^p f(x+r) = g(x),$$

worin also die $P_r(x)$ Polynome in x vom Grade n sind. Durch wiederholte Anwendung des E -Prozesses, d. h. durch wiederholtes Ersetzen von x durch $x+1$ erhält man für die Unbekannten

$$(14) \quad t(x+k) = \xi_k \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

die Gleichungen

$$(15) \quad \sum_{r=0}^m \lambda^r \sum_{p=0}^n a_{rp} (x+k)^p \xi_{r+k} = g(x+k), \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Nach der von uns entwickelten Theorie³⁾ suchen wir eine lineare Diffe-

³⁾ Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten. Math. Ann. 82 (1920), S. 1–39, insb. S. 3–7; Math. Ann. 84 (1921), S. 16–30.

rentialgleichung n -ter Ordnung, deren Koeffizienten in der unabhängigen Veränderlichen z Polynome des Grades m sind, derart, daß das Rekursionssystem für die Koeffizienten eines als Potenzreihe in z angesetzten Integrals ein Gleichungssystem ergibt, dessen linke Seite aus der von (15) durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen entsteht. Man erhält die Hilfsdifferentialgleichung

$$(16) \quad \sum_{\mu=0}^n \frac{z^\mu}{\mu!} \sum_{\nu=0}^m \lambda^\nu z^\nu \sum_{p=0}^n a_{\nu p} \Delta^\mu(x^p) \frac{d^\mu \varphi(z)}{dz^\mu} = 1,$$

wo allgemein

$$(17) \quad \Delta h(x) = h(x+1) - h(x),$$

also speziell

$$(18) \quad \Delta^\mu(x^p) = 0 \quad \text{für} \quad \mu > p, \quad \Delta^\mu(x^\mu) = \mu!$$

ist. Der Koeffizient der höchsten Ableitung $\frac{d^n \varphi(z)}{dz^n}$ in (16) ist

$$(19) \quad z^n \sum_{r=0}^m a_{rn} \lambda^r z^r = z^n \gamma(\lambda z);$$

sind $z_1, z_2, \dots, z_m$ die dem absoluten Betrage nach geordneten Wurzeln der Gleichung

$$(20) \quad \gamma(z) = \sum_{r=0}^m a_{rn} z^r = 0,$$

so hat die Differentialgleichung (16) außer Null die singulären Stellen $\frac{z_1}{\lambda}, \frac{z_2}{\lambda}, \dots, \frac{z_m}{\lambda}$.

Wir machen nun die *wesentliche Voraussetzung*

$$(21) \quad a_{0n} \neq 0,$$

dann ist $z=0$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit, für welche die determinierende Fundamentalgleichung für die Exponenten r

$$(22) \quad \sum_{\mu=0}^n a_{0\mu} (x+r)^p = 0$$

ist. Wir machen vorübergehend die weitere Annahme, es sei x so gewählt, daß (22) weder für $r=0$, noch für eine ganze positive Zahl erfüllt sei, so daß die (16) entsprechende homogene Differentialgleichung kein in $z=0$ reguläres Integral, (16) selbst also höchstens ein einziges solches Integral hat. Dieses setzen wir nun in der Form

$$(23) \quad \varphi(z) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varphi_\sigma \lambda^\sigma z^\sigma$$

an, dann erhält man für die φ_σ das Rekursionssystem

$$(24) \quad \sum_{\varrho=0}^k (\varphi_{k-\varrho} \lambda^{k-\varrho}) \lambda^{\varrho} \left[\sum_{p=0}^n a_{\varrho p} x^p + \binom{k-\varrho}{1} \lambda \left(\sum_{p=0}^n a_{\varrho p} x^p \right) + \dots \right. \\ \left. + \binom{k-\varrho}{n} \lambda^n \left(\sum_{p=0}^n a_{\varrho p} x^p \right) \right] = \delta_{0k} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

oder nach einer bekannten Formel der Differenzenrechnung

$$(25) \quad \sum_{\varrho=0}^k \varphi_{k-\varrho} \lambda^{k-\varrho} \lambda^{\varrho} \sum_{p=0}^n a_{\varrho p} (x+k-\varrho)^p = \delta_{0k} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

wo $\delta_{00}=1$, sonst $\delta_{0k}=0$ ist, wo ferner $a_{\varrho p}=0$ für $\varrho > m$. Speziell ist also

$$(26) \quad \varphi_0 = \frac{1}{\sum_{p=0}^n a_{0p} x^p}, \quad \varphi_1 = \frac{\sum_{p=0}^n a_{1p} x^p}{\sum_{p=0}^n a_{0p} x^p \sum_{p=0}^n a_{0p} (x+1)^p} \text{ usf.}$$

Die Reihe (23) konvergiert als Lösung von (16) für

$$(27) \quad |z| < \frac{|z_1|}{|\lambda|}.$$

Es entspricht jetzt tatsächlich (25) dem Gleichungssystem (15) in der gewünschten Weise, so daß wie l. c.⁸⁾ folgt:

Ist

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|g(x+n)|} < \frac{|z_1|}{|\lambda|},$$

so hat die Differenzengleichung (13) eine und nur eine Lösung $f(x)$, für welche

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f(x+n)|} < \frac{|z_1|}{|\lambda|}$$

und zwar ist diese Lösung

$$(30) \quad f(x) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varphi_{\sigma} \lambda^{\sigma} g(x+\sigma) = \frac{g(x)}{\sum_{p=0}^n a_{0p} x^p} \cdot \frac{g(x+1) \sum_{p=0}^n a_{0p} x^p}{\sum_{p=0}^n a_{0p} x^p \sum_{p=0}^n a_{0p} (x+1)^p} \cdot \lambda + \dots$$

In den oben ausgeschlossenen Punkten x verschwinden hier auftretende Nenner.

Es hängen nun die Größen φ_{σ} zwar von x , aber nicht von λ ab, es hat daher die durch die Reihe

$$(31) \quad \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varphi_{\sigma} \lambda^{\sigma}$$

dargestellte Funktion nur die singulären Stellen $z_1, z_2, \dots, z_m$, von denen natürlich einige zusammenfallen können. Wir nehmen nun an, es sei (28)

nicht erfüllt und fassen $f(x)$ als analytische Funktion von λ auf. Dann folgt aus dem Hadamardschen Multiplikationssatz der Fundamentalsatz:

Hat bei festem x die Funktion

$$(32) \quad \sum_{\sigma=0}^{\infty} \lambda^{\sigma} g(x + \sigma)$$

„in der ganzen λ -Ebene“ die singulären Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, so hat die Funktion

$$(33) \quad f(x) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varphi_{\sigma} \lambda^{\sigma} g(x + \sigma)$$

in der λ -Ebene höchstens in den Punkten $\lambda_{\mu} z_r$ ($r = 1, 2, \dots, m$; $\mu = 1, 2, \dots$) singuläre Stellen.

Auf den Fall, daß (21) nicht erfüllt ist, daß also (23) im allgemeinen für jedes z divergiert, hoffe ich in einer der folgenden Mitteilungen zurückkommen zu können.

(Eingegangen am 14. April 1922.)