X.

*Geometrische Eigenschaften der für die neue Karte
von Frankreich gewählten Projections-Art;*

von PUISSANT in Paris *).

1. **U**nter dem Vorfitze des Hrn De la Place hat die königl. Commission *des services publics*, der sogenannten *modificirten Projection Flamsteed's*, vor allen andern geographischen Projections-Arten den Vorzug zum Behuf der neuen Karte von Frankreich gegeben, in welcher alle topographische Aufnahmen vereinigt werden sollen. In dieser Projections-Art denkt man sich den Haupt-Meridian, (hier den Meridian der königl. Sternwarte zu Paris), in eine gerade Linie abgewickelt; alle Parallelkreise aber abgewickelt in concentrische Kreise, deren Krümmung von der des mittleren Parallelkreises abhängt, das heisst, von der Krümmung desjenigen, der mit einem Halbmesser beschrieben ist, gleich dem Stück der Tangente des elliptischen Meridians unter 50° Breite, das zwischen dem Berührungspunkte und der gehörig verlängerten Erdaxe liegt. Man gewinnt dadurch den Vorthail, daß alle Theile des Haupt-Meridians und der Parallelkreise genau dasselbe Verhältniß zu einander haben, wie auf der sphäroidischen Erde selbst. Die übrigen

*) Ausgezogen aus dem *Bullet. des Sciences* 1821 von *Gilb.*

geometrischen Eigenschaften dieser Projections - Art gehen alle aus dieser hervor, und lassen sich aus ihr durch die folgende Analyse leicht ableiten.

2. Wir wollen fürs Erste annehmen, irgend eine in der Ebene der Projection gezogene krumme Linie sey durch Polar-Coordinaten gegeben, und dem zu Folge mit R den Radius vector irgend eines ihrer Punkte M , und mit Θ den Winkel bezeichnen, den dieser Radius vector mit dem Haupt-Meridiane macht. Ein zweites System rechtwinkliger Coordinaten X, Y habe seinen Anfang bei demselben Punkte, als die Radii vectores R , und es sey ds ein Element der krummen Linie. Es ist dann bekanntlich

$$(1) \quad X = R \cos \Theta; \quad Y = R \sin \Theta; \quad ds^2 = dR^2 + R^2 d\Theta^2$$

Nun sey ds , das Element eines Parallelkreises auf dem durch Umdrehung gebildeten Sphäroid, ρ der Halbmesser der Krümmung desselben, und dp die Amplitude dieses Elements des Parallelkreises, gemessen durch einen Kreisbogen der zum Halbmesser die Einheit hat. Es ist dann

$$ds = \rho \cdot dp$$

Da nun aber auf der neuen Karte von Frankreich die Projectionen der Parallelkreise concentrische Kreise, und die auf diesen Curven genommenen Abmessungen dieselben als auf der Erdkugel sind, so läßt sich diese Eigenschaft analytisch ausdrücken, wenn man $dR = 0$ und $ds = \rho$ setzt. Und dann giebt die Differential-Gleichung (1) folgendes:

$$\rho \cdot dp = R \cdot d\Theta$$

woraus durch Integriren folgt

$$(2) \quad \rho \cdot p = R \cdot \Theta$$

ohne Constante, weil die Länge p von dem Haupt-Meridiane an gerechnet, zugleich mit dem Winkel Θ Null wird.

Wenn R der Breite H entspricht (*correspond*) und a, b die halben Axen der erzeugenden Ellipse des Erdsphäroids bezeichnen, so hat man

$$\rho = a \cdot \cos H : \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \sin^2 H\right)^{\frac{1}{2}} = N \cdot \cos H$$

Diesem gemäß folgt aus der Gleichung (2)

$$\Theta = \frac{\rho p}{R} = p \cdot \frac{N}{R} \cdot \cos H.$$

3. Man bezeichne nun mit u den Winkel, welchen die an der Curve eines der andern Meridiane der Karte gezogene Tangente, mit dem Radius vector R des Berührungspunktes macht, so ist nach der bekannten Theorie

$$(3) \quad \tan u = \frac{R \cdot d\Theta}{dR}$$

und es folgt dann aus der Gleichung (2), wenn man alles variabel setzt, p ausgenommen,

$$\frac{R \cdot d\Theta}{dR} = \frac{p \cdot d\rho}{dR} = \Theta$$

Da aber dR dem Elemente ds der erzeugenden Ellipse des Erd-Sphäroids gleich ist, so muß auch, wenn man mit H die Breite des Punktes M bezeichnet, dessen rechtwinkliche Coordinaten der Projection, X, Y sind, seyn

$$\frac{d\rho}{dR} = \sin H,$$

und also auch

$$(4) \quad \text{tang } u = p \cdot \sin H - \Theta$$

Ist endlich noch Ψ der Winkel, den die Berührungslinie des krummlinigen Meridians auf der Karte mit der Axe des Coordinaten X , das ist den geradlinigen Haupt-Meridian macht, so muß, da dann $\Psi = \Theta + u$ ist, sehr nahe seyn

$$(5) \quad \Psi = p \cdot \sin H$$

4. Bezeichnet ds das Element eines krummlinigen Meridians der Karte, so hat man wegen der Gleichung (3)

$$ds = \frac{dR}{\cos u} = dR \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2} u)^{-1}$$

Das will sagen, eine kleine geodetische Linie wächst nach der Richtung des Meridians auf der Projection nach dem Verhältnisse, als $\cos u$ abnimmt.

5. Es möge K irgend eine geodetische Linie, z. B. die Seite eines der gemessenen Dreiecke erster Ordnung bedeuten, welche einen Winkel Z mit dem Meridiane, der durch den einen ihrer Endpunkte geht, mache. Es werde die Projection dieses Winkels und der Linie gesucht.

Man denke sich auf der Erde das unendlich kleine zwischen der Linie K und dem erwähnten Meridiane enthaltenen Stückchen ds , eines Parallelkreises. Dieses läßt sich immer für die Höhe eines rechtwinkligen elementaren Dreiecks nehmen, dessen Seiten ds , $d\sigma$, dK sind, und in so fern ist

$$\text{tang } Z = \frac{ds}{d\sigma}$$

Auf der Karte sind aber die Projectionen der beiden Seiten ds , $d\sigma$ die folgenden: ds , $\frac{d\sigma}{\cos u}$ und bilden hier einen Winkel, der den Werth von $100^\circ \rightarrow u$ hat. Ist daher Z' die Projection des Azimuth Z , so hat man, wie bei einiger Aufmerksamkeit leicht erhellet,

$$\tan Z' (1 - \frac{1}{2} \tan Z \cdot \sin 2u) = \tan Z \cdot \cos^2 u$$

In der Praxis sind Z und Z' immer sehr wenig von einander verschieden, selbst an den östlichen und westlichen Enden der Karte. Daher läßt sich, Maclaurin's Lehrsatz zu Folge, setzen

$$Z' = Z + \frac{dZ'}{du} \cdot u + \left(\frac{dZ'}{du}\right)^2 \cdot \frac{u^2}{2} + \dots,$$

und folglich auch

$$(6) \quad Z' = Z + u \cdot \sin^2 Z - \frac{u^2}{2} \cdot \sin 2Z \cdot \cos^2 Z$$

Es ist nicht schwer zu übersehen, daß man auch in endlichen Ausdrücken hat

$$\tan (Z' - Z) = \frac{\sin Z \cdot \sin (Z - u)}{\cos^2 Z} \cdot \sin u : \left(1 + \frac{\sin Z \cdot \sin (Z - u) \cdot \cos u}{\cos Z}\right)$$

Ferner folgt aus der Eigenschaft der Projection, daß wenn K' die Projection von K ist, seyn müsse

$$K' \cdot \cos (Z - u \cdot \cos^2 Z) = K \cdot \cos Z$$

oder in eine Reihe entwickelt:

$$(7) \quad K' = K \cdot \left(1 - \frac{u}{2} \sin 2Z + \frac{u^2}{4} \sin^2 2Z + \frac{u^2}{2} \cos^4 Z \dots\right)$$

6. Da der Winkel Z' um den Ψ vermindert ist, welchen der Meridian der Karte mit der Axe der Coor-

dinaten X macht, so hat man für das modificirte Azimuth Z

$$(8) \quad Z = Z' - \psi = Z - \Theta - u \cdot \cos^2 Z$$

Wenn dieses modificirte Azimuth bekannt ist, so bedient man sich desselben als eines *Azimut de départ* um, nach Cassini's Art, die relativen Coordinaten aller trigonometrischen Punkte, die in einem Blatte der Karte vorkommen, zu berechnen, wobei man die Spitze des Winkels Z als Anfangspunkt dieser Axen, und diese selbst den Axen der Coordinaten X, Y parallel annimmt. Diese Methode beruht auf der Voraussetzung, daß alle in einem kleinen Raum enthaltenen trigonometrisch bestimmten Punkte, sich sehr nahe in einer und derselben Ebene befinden; welches sich ohne merkliche Fehler thun läßt, weil man immer unmittelbar auf der Karte die absoluten Coordinaten der Spitze eines Dreiecks erster Ordnung erhalten, und die Projection dieses Punktes für den Anfang der relativen Coordinaten aller andern in dem Blatte, auf welchem man das Terrain darstellen soll, enthaltenen secundären Punkte nehmen kann. Jedes solches Blatt stellt bei einem Maßstabe von $\frac{1}{100000}$ ein Rechteck von 8000 Meter Länge und 5000 Meter Breite vor.

7. Um die graphischen Operationen zu vereinfachen, nimmt man am füglichsten als Anfang der rechtwinkligen Coordinaten den Punkt, wo der mittlere Parallelkreis den Haupt-Meridian durchschneidet. Bezeichnet man diese neuen rechtwinkligen Coordinaten mit x, y , so ist, wie in die Augen fällt,

$$X = t \mp x, \quad Y = y$$

wobei das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Punkt M nördlich oder südlich

von dem neuen Anfangspunkte liegt. In diesem Falle hat man, kraft der anfänglichen Hypothese

$$t = a \cotg h : (1 - e^2 \sin^2 h)^{\frac{1}{2}}$$

wenn h die Breite des mittleren Parallelkreises, und e^2 das Quadrat der Excentricität der Erdmeridiane bedeutet. Folglich giebt in dieser Breite die Gleichung (4) $u = 0$; das heißt die Meridiane der Karte durchschneiden den mittleren Parallelkreis unter rechten Winkeln.

8. Das Differential $d\Sigma$, des zwischen zwei Meridianen und zwei Parallelkreisen enthaltenen Flächenraums, ist nur um ein Unendlich-Kleines zweiter Ordnung von dem Flächenraume des Sectors verschieden, dessen Bogen einer dieser Parallelkreise ist; das heißt, es ist, der obigen Bezeichnung zu Folge,

$$d\Sigma = s, dR.$$

Das Differential $d\Sigma$ des auf der Erde enthaltenen Flächenraums, der diesem entspricht, ist aber

$$d\Sigma = s, d\sigma.$$

Folglich ist

$$d\Sigma = d\Sigma \text{ und endlich } \Sigma = \Sigma.$$

Daraus folgt, daß die Größen (*aires*) auf der Erde befindlicher Flächenräume (*espaces*) in der Projection nicht verändert werden.

Dieses sind die vorzüglichsten Eigenschaften, welche die neue Karte von Frankreich haben wird. Die Ausführung derselben ist seit 1819 dem königl. Corps *des ingénieurs géographes militaires* anvertraut. Die zahlreichen geodetischen und topographischen Resultate, welche man seit jener Zeit schon erhalten hat, bezeugen, daß diese Karte, welche man nach einem Maßstabe von $\frac{1}{700000}$ der wahren Größe entwirft, in ihrer Art eines der schätzbarsten und nützlichsten Denkmäler seyn werde.