Elementarer Beweis eines Reihensatzes von Herrn Hilbert.

Von

F. WIENER in Göttingen.

Herr Hilbert hat in seinen Untersuchungen über die Theorie der Integralgleichungen bewiesen, daß die quadratische Form unendlich vieler reeller positiver Variabeln x_α

$$K = \sum_{\alpha, \beta}^{\infty} \frac{x_\alpha x_\beta}{\alpha + \beta}$$

beschränkt sei.*) Notwendig und hinreichend dafür ist, daß $\sum \frac{x_\alpha x_\beta}{\alpha + \beta}$ für alle x_α ($\alpha = 1, 2, \dots$) konvergiere, für die $\sum x_\alpha^2 \leq \text{const}$ ist.***) Die Beschränktheit der Form K sowie die Konvergenz der Summe wurde bisher mit Hilfe eines geeigneten Integrales bewiesen.

Im folgenden soll auf elementarem Wege bewiesen werden:

Satz I: Wenn $\sum_1^\infty x_\alpha^2$ konvergiert ($x_\alpha \geq 0$), so konvergiert auch

$$\sum_{\alpha, \beta}^{\infty} \frac{x_\alpha x_\beta}{\alpha + \beta}.$$

Es wird sich weiter ergeben, daß auch die Verallgemeinerung gilt:

Satz II: Wenn $\sum_1^\infty x_\alpha^r$ konvergiert ($x_\alpha \geq 0$), so konvergiert auch

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}^{\infty} \frac{x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_r}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r)^{r-1}}.$$

*) Vergl. H. Weyl, Singuläre Integralgleichungen usw., Inauguraldissertation, Göttingen 1908, S. 83.

**) Vergl. E. Hellinger und O. Toeplitz, Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, Göttinger Nachrichten 1906, S. 351.

Die Beweise beider Sätze sollen sich folgendermaßen gestalten: Im § 1 wird gezeigt, daß man sich auf den Fall beschränken kann, wo $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_r \geq \dots$. Im § 2 wird unter dieser Annahme Satz I bewiesen. Im § 3 wird unter derselben Annahme gezeigt, daß Satz II gilt, wenn aus der Konvergenz einer Summe $\sum_{\alpha}^{\infty} \xi_{\alpha}^{r-1}$ ($\xi_{\alpha} \geq 0$) die Konvergenz einer Summe $\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}} \frac{\xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \dots \xi_{\alpha_{r-1}}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{r-1})^{r-2}}$ folgt. Diese Tatsache kann wegen Satz I als bewiesen angenommen werden.

§ 1.

Die lineare Form

$$S_n^{(1)} = \sum_{\alpha}^n a_{\alpha} x_{\alpha},$$

für die $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$ ist, nimmt bei allen $n!$ Permutationen der Elemente $x_{\alpha} \geq 0$ dann ein Maximum an, wenn $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ ist.

Ebenso nimmt die bilineare Form

$$S_n^{(2)} = \sum_{\alpha, \beta}^n a_{\alpha\beta} x_{\alpha} y_{\beta},$$

für die $x_{\alpha} \geq 0, y_{\alpha} \geq 0$ und

$$(1) \quad a_{\alpha\beta} \geq a_{\alpha+1, \beta} \quad a_{\alpha\beta} \geq a_{\alpha, \beta+1}$$

ist, bei allen $(n!)^2$ Permutationen der Elemente dann ein Maximum an, wenn $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ und $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ ist. Man hat nämlich:

$$S_n^{(2)} = \sum_{\alpha}^n x_{\alpha} \sum_{\beta}^n a_{\alpha\beta} y_{\beta} = \sum_{\beta}^n y_{\beta} \sum_{\alpha}^n a_{\alpha\beta} x_{\alpha}.$$

Wegen (1) ist bei jeder Anordnung der Elemente y_{α}

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n.$$

$S_n^{(2)}$ wird also nicht verkleinert, wenn man die x_{α} der Größe nach ordnet. Ordnet man hernach die Elemente y_{α} der Größe nach, so wird keines der b_{α} , also auch nicht $S_n^{(2)}$ verkleinert, w. z. b. w.

Durch dieselbe Überlegung beweist man: bei allen $(n!)^r$ Permutationen der Elemente $x_{\alpha}^{(\rho)} \geq 0$ ($\rho = 1, 2, \dots, r$; $\alpha_{\rho} = 1, 2, \dots, n$) nimmt die Form

$$\begin{aligned} S_n^{(r)} &= \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}^n a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} x_{\alpha_1}^{(1)} x_{\alpha_2}^{(2)} \dots x_{\alpha_r}^{(r)} \\ &= \sum_{\alpha_1}^n x_{\alpha_1}^{(1)} \sum_{\alpha_2, \dots, \alpha_r}^n a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} x_{\alpha_2}^{(2)} \dots x_{\alpha_r}^{(r)} = \sum_{\alpha_1}^n x_{\alpha_1}^{(1)} b_{\alpha_1}, \end{aligned}$$

für die $a_{\alpha_1 \dots \alpha_\rho \dots \alpha_r} \geq a_{\alpha_1 \dots \alpha_\rho + 1 \dots \alpha_r}$ ist, dann ein Maximum an, wenn für alle ρ $x_1^{(\rho)} \geq x_2^{(\rho)} \geq \dots \geq x_n^{(\rho)}$ ist.

Für die unendliche Summe

$$S = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\infty} a_{\alpha_1 \dots \alpha_r} x_{\alpha_1}^{(1)} \dots x_{\alpha_r}^{(r)}$$

gilt dann der folgende

Hilfssatz: Ist

$$(2) \quad x_{\alpha_\rho}^{(\rho)} \geq 0,$$

$$(3) \quad \lim_{\alpha_\rho \rightarrow \infty} x_{\alpha_\rho}^{(\rho)} = 0,$$

$$(1a) \quad a_{\alpha_1 \dots \alpha_\rho \dots \alpha_r} \geq a_{\alpha_1 \dots \alpha_\rho + 1 \dots \alpha_r} \geq 0,$$

ist ferner S konvergent und $= A$, sobald die Elemente so geordnet sind, daß

$$x_1^{(\rho)} \geq x_2^{(\rho)} \geq \dots \geq x_n^{(\rho)} \geq x_{n+1}^{(\rho)} \geq \dots,$$

so konvergiert auch

$$S' = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\infty} a_{\alpha_1 \dots \alpha_r} y_{\alpha_1}^{(1)} \dots y_{\alpha_r}^{(r)},$$

wo $y_1^{(\rho)}, y_2^{(\rho)}, \dots$ irgendeine (auch von ρ abhängige) Anordnung der Elemente $x_1^{(\rho)}, x_2^{(\rho)}, \dots$ bedeutet, und der Wert A' der Summe S' ist $\leq A$.

Man bilde

$$S'_i = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^i a_{\alpha_1 \dots \alpha_r} y_{\alpha_1}^{(1)} \dots y_{\alpha_r}^{(r)}.$$

$x_m^{(\rho)}$ sei das $x^{(\rho)}$ mit höchstem Index, das unter den $y^{(\rho)}$ in S'_i vorkommt, und $n = \text{Max}(m) = \text{Max}(m(\rho))$. Dann bilde man:

$$S'_n = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^n a_{\alpha_1 \dots \alpha_r} x_{\alpha_1}^{(1)} \dots x_{\alpha_r}^{(r)}$$

$$\text{und } S_n = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^n a_{\alpha_1 \dots \alpha_r} x_{\alpha_1}^{(1)} \dots x_{\alpha_r}^{(r)}.$$

Die Elemente $x_{\alpha_\rho}^{(\rho)}$ sollen in ihrer Gesamtheit mit den Elementen $x_{\alpha_\rho}^{(\rho)}$ übereinstimmen ($\rho = 1, 2, \dots, r$) und zwar so, daß $x_{\alpha_\rho}^{(\rho)} = y_{\alpha_\rho}^{(\rho)}$ ($\alpha_\rho = 1, 2, \dots, l$) ist. Dann ist

$$S'_i \leq S'_n, \text{ weil es in } S'_n \text{ enthalten ist,}$$

und $S'_n \leq S_n$ nach dem zuvor Bewiesenen, also:

$$S'_i \leq S_n < S \leq A, \text{ w. z. b. w.}$$

Bei der hier zu betrachtenden Reihe

$$L = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\infty} \frac{x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_r}}{(\alpha_1 + \dots + \alpha_r)^{r-1}}$$

sind die Bedingungen (2) und (1a) des Hilfssatzes erfüllt und, da $\sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha}^r$ konvergiert, auch die Bedingung (3). Ist also einmal die Konvergenz von L für $x_1 \geq x_2 \geq \dots x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$ bewiesen, so folgt aus dem Hilfssatze, daß sie es für alle anderen Fälle ist.

§ 2.

Zugleich mit $K = \sum_{\alpha, \beta}^{\infty} \frac{x_{\alpha} x_{\beta}}{\alpha + \beta}$ konvergiert und divergiert die Reihe

$$K' = \sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha} \sum_{\beta}^{\infty} \frac{x_{\beta}}{\alpha + \beta} = \sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha} \varphi_{\alpha}.$$

Da $x_{\alpha} \geq x_{\alpha+1}$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum x_{\alpha}^2$ auch die Konvergenz von $\sum \alpha x_{\alpha}^2$. Bedeutet a^2 die nächste Quadratzahl hinter α , ist also

$$a = a(\alpha) = [\sqrt{\alpha}] + 1 > \sqrt{\alpha},$$

so erweist sich

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha} &= \sum_{\beta}^{\infty} \frac{x_{\beta}}{\alpha + \beta} = \sum_{\beta}^{\alpha^2-1} \frac{x_{\beta}}{\alpha + \beta} + \sum_{\beta}^{\infty} \left(\sum_{\nu}^{\nu^2-1} \frac{x_{\beta}}{\alpha + \beta} \right) \\ &\leq c_1 x_{\alpha} + c_2 \sum_{\nu}^{\infty} \frac{x_{\nu^2}}{\nu}. \end{aligned}$$

c_1 und c_2 bedeuten hier, wie später c_3 und c_4 , gewisse Konstanten. Es ist ferner

$$K' = \sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha} \varphi_{\alpha} \leq c_1 \sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha}^2 + c_2 \sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha} \left(\sum_{\nu}^{\infty} \frac{x_{\nu^2}}{\nu} \right),$$

wobei

$$(4) \quad \sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha} \left(\sum_{\nu}^{\infty} \frac{x_{\nu^2}}{\nu} \right) = \sum'$$

gesetzt wird. Die Konvergenz von K' ist also bewiesen, sobald es die von $\sum'$ ist. Man hat weiter:

$$(5) \quad \sum_{\nu}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\alpha}} \leq c_3 \frac{1}{n^{\alpha-1}} \quad (\alpha \geq 2),$$

$$(6) \quad \sum_{\nu}^n \frac{1}{\sqrt{\nu}} \leq c_4 \sqrt{n},$$

$$(7) \quad \left(\sum_{\nu}^{\infty} a_{\nu} x_{\nu} \right)^2 \leq \left(\sum_{\nu}^{\infty} a_{\nu}^2 \right) \left(\sum_{\nu}^{\infty} x_{\nu}^2 \right),$$

vorausgesetzt, daß beide Summen zur rechten konvergieren.

Aus (7) und (5) folgt:

$$(8) \quad \left(\sum_{\nu}^{\infty} \frac{x_{\nu^2}}{a(\alpha)} \right)^2 \leq \sum_{\nu}^{\infty} \frac{1}{a(\alpha)} \sum_{\nu}^{\infty} x_{\nu^2}^2 \leq \frac{c_3}{a(\alpha)} \sum_{\nu}^{\infty} x_{\nu^2}^2,$$

$$\left(\sum_{\nu}^{\infty} \frac{x_{\nu^2}}{a(\alpha)} \right)^2 \leq c_3 \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{\nu}^{\infty} x_{\nu^2}^2.$$

Aus (4), (7) und (8) folgt:

$$\begin{aligned} \left(\sum' \right)^2 &\leq \sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha}^2 \sum_{\alpha}^{\infty} \left(\sum_{\nu}^{\infty} \frac{x_{\nu^2}}{a(\alpha)} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha}^2 \right) \left(\sum_{\alpha}^{\infty} \frac{c_3}{\sqrt{\alpha}} \sum_{\nu}^{\infty} x_{\nu^2}^2 \right) \\ &\leq c_3 \left(\sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha}^2 \right) \left(\sum_{\nu}^{\infty} x_{\nu^2}^2 \sum_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Da $a(\alpha) > \sqrt{\alpha}$ ist, so erweist sich $b(\nu) \leq \nu^2$.

Nach (6) folgt dann:

$$\left(\sum' \right)^2 \leq c_3 c_4 \left(\sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha}^2 \right) \left(\sum_{\nu}^{\infty} \nu x_{\nu}^2 \right),$$

w. z. b. w. *)

§ 3.

Zugleich mit der Reihe

$$L = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\infty} \frac{x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_r}}{(\alpha_1 + \dots + \alpha_r)^{r-1}}$$

*) Es ergibt sich leicht auch die Konvergenz der Reihe $\sum_{\alpha}^{\infty} \varphi_{\alpha}^2$.

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha}^{\infty} \varphi_{\alpha}^2 &= \sum_{\alpha}^{\infty} \left(\sum_{\beta}^{\infty} \frac{x_{\beta}}{\alpha + \beta} \right)^2 \leq \sum_{\alpha}^{\infty} \left(c_1 x_{\alpha} + c_2 \sum_{\nu}^{\infty} \frac{x_{\nu^2}}{\nu} \right)^2 \\ &\leq 2c_1^2 \sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha}^2 + 2c_2^2 \sum_{\alpha}^{\infty} \left(\sum_{\nu}^{\infty} \frac{x_{\nu^2}}{\nu} \right)^2 \leq 2c_1^2 \sum_{\alpha}^{\infty} x_{\alpha}^2 + 2c_2^2 c_3 c_4 \sum_{\nu}^{\infty} \nu x_{\nu^2}^2. \end{aligned}$$

konvergiert und divergiert die Reihe:

$$L' = \sum_{\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_r}^{\infty} \frac{x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_r}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r)^{r-1}} \\ = \sum_{\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{r-1}}^{\infty} x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_{r-1}} \sum_{\alpha_r}^{\infty} \frac{x_{\alpha_r}}{\alpha_{r-1} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r)^{r-1}}.$$

Aus (5) folgt:

$$L' \leq c_3 \sum_{\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{r-1}}^{\infty} \frac{x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_{r-1}}}{(\alpha_1 + \dots + \alpha_{r-1})^{r-2}} x_{\alpha_r}.$$

Da $x_1 \geq x_2 \geq \dots$, so ist $x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_{r-1}} x_{\alpha_r} \leq \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \dots \xi_{\alpha_{r-1}}$, wenn $\xi_{\alpha} = x_{\alpha}^{\frac{r}{r-1}}$ gesetzt wird. Es konvergiert dann ersichtlich die Summe

$$\sum_{\alpha}^{\infty} \xi_{\alpha}^{r-1}.$$

Also ist in der Tat die Konvergenz der Summe L' eine Folge einer Konvergenz der Summe

$$M' = \sum_{\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{r-1}}^{\infty} \frac{\xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_{r-1}}}{(\alpha_1 + \dots + \alpha_{r-1})^{r-2}},$$

wo

$$\sum_{\alpha}^{\infty} \xi_{\alpha}^{r-1}$$

konvergiert. Damit ist auch Satz II bewiesen.