Über recurrierende Reihen.

Von Eugen Netto in Giessen.

Im zweiten Bande der „Monatshefte für Mathematik und Physik“ hat Herr E. Study eine Arbeit über recurrierende Reihen und bilineare Formen veröffentlicht. Im §. 3 stellt er ein allgemeines Problem auf und gibt für den Fall $n=3$ das durch vollständige Induction gewonnene Resultat. Ich will die Frage im Folgenden allgemein erledigen.

Zwischen den Größen $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ möge eine durch

$$(1) \quad a_k = c_1 a_{k-1} + c_2 a_{k-2} + c_3 a_{k-3} + \dots + c_n a_{k-n} \\ (k = n, n+1, n+2, \dots)$$

festgelegte Recursionsformel bestehen, in welcher die Größen $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ willkürlich gewählt sein können. Mit Hülfe der für $k-1$ geltenden Formel kann man aus der Formel (1) a_{k-1} eliminieren, dann a_{k-2} u. s. f., bis man zu

$$(2) \quad a_h = C_k^{(n-1)} a_{n-1} + C_k^{(n-2)} a_{n-2} + \dots + C_k^{(0)} a_0$$

gelangt. Die Aufgabe besteht in der Berechnung der Größen $C_k^{(h)}$.

Setzt man in (1) $k=n$ und dann alle $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots$ bis auf a_h gleich Null, a_h aber $=1$, so erhält man $a_n = C_n^{(h)}$; dann bei denselben Annahmen über die Anfangsglieder $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ weiter $a_{n+1} = C_{n+1}^{(h)}, \dots, a_k = C_k^{(h)}$. Die Größen $C_n^{(h)}, C_{n+1}^{(h)}, \dots$ sind also auch der Formelreihe (1) unterworfen. Wir wollen die Anfangswerte von $C_k^{(h)}$, d. h. $C_n^{(h)}, C_{n+1}^{(h)}, \dots$ aufstellen. In (1) ist für $k=n$ nur a_h von Null verschieden, also wird

$$(3) \quad C_n^{(h)} = c_{n-h};$$

in (1) ist ferner für $k=n+1$ rechts a_n und a_h von Null verschieden, daher ergibt sich

$$(3a) \quad C_{n+1}^{(h)} = c_1 C_n^{(h)} + c_{n+1-h}$$

und ebenso weiter

$$(3b) \quad \begin{aligned} C_{n+2}^{(h)} &= c_1 C_{n+1}^{(h)} + c_2 C_n^{(h)} + c_{n+2-h}, \\ &\dots \dots \dots \\ C_{n+h}^{(h)} &= c_1 C_{n+h-1}^{(h)} + c_2 C_{n+h-2}^{(h)} + \dots + c_h C_n^{(h)} + c_n, \end{aligned}$$

und von nun ab gilt die Formel

$$(3c) \quad C_{n+k}^{(h)} = c_1 C_{n+k-1}^{(h)} + c_2 C_{n+k-2}^{(h)} + \dots + c_k C_n^{(h)},$$

wobei nur alle c_k mit einem Index größer als n gleich Null gesetzt werden müssen.

Um nun die $C_k^{(h)}$ zu bestimmen, setzen wir die Borchardt'sche erzeugende Function an

$$f(u) = C_n^{(h)} + C_{n+1}^{(h)} u + C_{n+2}^{(h)} u^2 + \dots;$$

dann wird gemäß (3), (3a), (3b), (3c)

$$\begin{aligned} f(u) (1 - c_1 u - c_2 u^2 - \dots - c_n u^n) &= C_n^{(h)} + (C_{n+1}^{(h)} - c_1 C_n^{(h)}) u + \\ &+ (C_{n+2}^{(h)} - c_1 C_{n+1}^{(h)} - c_2 C_n^{(h)}) u^2 + \dots + \\ &+ (C_{n+h}^{(h)} - c_1 C_{n+h-1}^{(h)} - \dots - c_h C_n^{(h)}) u^h = \\ &= c_{n-h} + c_{n+1-h} u + c_{n+2-h} u^2 + \dots + c_n u^h \end{aligned}$$

und also

$$f(u) = \frac{c_{n-h} + c_{n+1-h} u + c_{n+2-h} u^2 + \dots + c_n u^h}{1 - c_1 u - c_2 u^2 - \dots - c_n u^n}.$$

Es kommt also nur noch darauf an, die jetzt gefundene Form für $f(u)$ in eine nach wachsenden Potenzen von u fortschreitende Reihe zu entwickeln. Der Coefficient von u^k liefert dann die Größe $C_{n+k}^{(h)}$. Da nun

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 - c_1 u - c_2 u^2 - \dots - c_n u^n} = \\ &= 1 + \sum \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)!}{p_1! p_2! \dots p_n!} c_1^{p_1} c_2^{p_2} \dots u^{p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots} \end{aligned}$$

ist, wobei die Summe über Null und alle positiven Werte von $p_1, p_2, \dots, p_n$ erstreckt wird, für welche $p_1 + p_2 + \dots + p_n > 0$ ist, so hat man

$$(4) \quad C_{n+k}^{(h)} = c_{n-h} \Sigma(k) + c_{n+1-h} \Sigma(k-1) + \dots + c_n \Sigma(k-h).$$

Dabei bedeutet für jedes positive ganze k

$$\Sigma(k) = \Sigma \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)!}{p_1! p_2! \dots p_n!} c_1^{p_1} c_2^{p_2} \dots c_n^{p_n}; \quad \Sigma(0) = 1$$

$$(p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + np_n = k).$$

Die Formel (4) gestaltet sich im Falle $h=0$ besonders einfach; dabei ist

$$(4a) \quad C_{n+k}^{(0)} = c_n \Sigma(k).$$

Andererseits ersieht man aus

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= C_k^{(n-1)} a_n + C_k^{(n-2)} a_{n-1} + \dots + C_k^{(0)} a_1 \\ &= C_k^{(n-1)} (c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_n a_0) + C_k^{(n-2)} a_{n-1} + \dots + C_k^{(0)} a_1 \\ &= (C_k^{(n-1)} c_1 + C_k^{(n-2)}) a_{n-1} + (C_k^{(n-1)} c_2 + C_k^{(n-3)}) a_{n-2} + \dots + \\ &\quad + C_k^{(n-1)} c_n a_0, \end{aligned}$$

dass

$$(6) \quad \begin{aligned} C_{k+1}^{(n-1)} &= C_k^{(n-1)} c_1 + C_k^{(n-2)}, \quad C_{k+1}^{(n-2)} = C_k^{(n-1)} c_2 + C_k^{(n-3)}, \dots \\ &\dots, \quad C_{k+1}^{(0)} = C_k^{(n-1)} c_n \end{aligned}$$

ist; und das letzte Resultat gibt durch Vergleichung mit (4a)

$$(7) \quad C_{n+k}^{(n-1)} = \Sigma(k+1).$$

Folglich ist wegen (4)

$$(8) \quad \Sigma(k+1) = c_1 \Sigma(k) + c_2 \Sigma(k-1) + \dots + c_n \Sigma(k-n+1).$$

Aus (6) entnehmen wir ferner der Reihe nach

$$\begin{aligned} C_{n+k}^{(n-2)} &= \Sigma(k+2) - c_1 \Sigma(k+1) \\ (7a) \quad C_{n+k}^{(n-3)} &= \Sigma(k+3) - c_1 \Sigma(k+2) - c_2 \Sigma(k+1) \\ C_{n+k}^{(n-4)} &= \Sigma(k+4) - c_1 \Sigma(k+3) - c_2 \Sigma(k+2) - c_3 \Sigma(k+1). \\ &\dots \end{aligned}$$

Die Formeln (7) und (7a) liefern für die Berechnung des $C_k^{(n-1)}, C_k^{(n-2)}, \dots, C_k^{\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right)}$ bequemere Methoden als die Formeln (4), welche umgekehrt für die Berechnung der $C_k^{(0)}, C_k^{(1)}, \dots$ vorzuziehen sind.

Aus (8) kann man noch den Determinantensatz

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \Sigma(k) & \Sigma(k-1) & \dots & \Sigma(k-n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma(k-n) & \Sigma(k-n-1) & \dots & \Sigma(k-2n) \end{vmatrix} = 0 \quad (k \geq 2n)$$

entnehmen.

Die Summe, welche man aus (5) erhält, wenn alle $c_1, c_2, \dots, c_n$ gleich 1 gesetzt werden, möge durch

$$(10) \quad \Sigma_k^{(n)} = \Sigma \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)!}{p_1! p_2! \dots p_n!} \quad (p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + np_n = k)$$

bezeichnet werden, ihre zahlentheoretische Bedeutung ist die folgende: $\Sigma_k^{(n)}$ gibt die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = k$$

wobei die Werte x nur Null oder ganze positive Zahlen $1, 2, \dots, n$ sein dürfen, und alle Umstellungen des x untereinander, so weit sie verschiedene Folgen ergeben, als verschiedene Lösungen gezählt werden.“

So hat man für $k=4, n \geq 4$

$$\begin{array}{ll} 1+1+1+1=4, & 1+3=4 \\ 1+1+2 & =4, \quad 3+1=4 \\ 1+2+1 & =4, \quad 2+2=4 \\ 2+1+1 & =4, \quad 4=4 \end{array} \quad \Sigma_4^{(4)} = 8$$

und für $k=5, n=3$

$$\begin{array}{ll} 1+1+1+1+1=5, & 1+3+1=5 \\ 1+1+1+2 & =5, \quad 3+1+1=5 \\ 1+1+2+1 & =5, \quad 1+2+2=5 \\ 1+2+1+1 & =5, \quad 2+1+2=5 \\ 2+1+1+1 & =5, \quad 2+2+1=5 \\ 1+1+3 & =5, \end{array} \quad \Sigma_5^{(3)} = 11.$$

Für dieses Zeichen gilt dann nach (8) die Recursionsformel

$$(11) \quad \Sigma_{k+1}^{(n)} = \Sigma_k^{(n)} + \Sigma_{k-1}^{(n)} + \dots + \Sigma_{k-n}^{(n)} \quad (k \geq n).$$

Ist $k < n$, dann bricht die rechte Seite mit $\Sigma_0^{(n)}$ ab. Die erzeugende Function liefert

$$(12) \quad \frac{1}{1-u-u^2-\dots-u^n} = \Sigma_0^{(n)} + \Sigma_1^{(n)} u + \Sigma_2^{(n)} u^2 + \dots + \Sigma_k^{(n)} u^k + \dots$$

Von dem Ausdrucke (5) wollen wir noch zwei Eigenschaften ableiten.

Setzt man $c_1 = c_2 = \dots = c_n = -1$, dann geht die erzeugende Function in

$$\frac{1}{1 + u + u^2 + \dots + u^n} = \frac{1 - u}{1 - u^{n+1}} =$$

$$= 1 - u + u^{n+1} - u^{n+2} + u^{2n+2} - u^{2n+3} + \dots$$

über, und daraus folgt

$$(13) \quad \sum (-1)^{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)!}{p_1! p_2! \dots p_n!}$$

$$(p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + np_n = k)$$

ist gleich $+1$ für $k = m(n+1)$,

gleich -1 für $k = m(n+1) + 1$;

und gleich 0 in allen anderen Fällen.

Setzt man ferner, unter der Annahme, dass n gerade sei,

$$c_1 = c_3 = \dots = +1, \quad c_2 = c_4 = \dots = -1,$$

dann geht die erzeugende Function in

$$\frac{1}{1 - u + u^2 - \dots + u^n} = \frac{1 + u}{1 + u^{n+1}} =$$

$$= 1 + u - u^{n+1} - u^{n+2} + u^{2n+2} + u^{2n+3} - \dots$$

über, und daraus folgt

$$(14) \quad \sum (-1)^{p_2 + p_4 + \dots + p_n} \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_n)!}{p_1! p_2! \dots p_n!}$$

$$(p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + np_n = k; \text{ } n \text{ gerade})$$

ist gleich $+1$ für $k = 2m(n+1)$ oder $k = 2m(n+1) + 1$,

gleich -1 für $k = (2m+1)(n+1)$ oder $k = (2m+1)(n+1) + 1$,

und gleich 0 in allen anderen Fällen.

Ist dagegen n ungerade, so liefert dieselbe Annahme für die c

$$\frac{1}{1 - u + u^2 - \dots - u^n} = \frac{1 + u}{1 - u^{n+1}} =$$

$$= 1 + u + u^{n+1} + u^{n+2} + u^{2n+2} + u^{2n+3} + \dots,$$

und daher ergibt sich in diesem Falle

$$(14a) \quad \sum (-1)^{p_2+p_4+\dots+p_n} \frac{(p_1+p_2+\dots+p_n)!}{p_1! p_2! \dots p_n!} \\ (p_1+2p_2+3p_3+\dots+np_n=k; \ n \text{ ungerade})$$

ist gleich $+1$ für $k=m(n+1)$ oder $k=m(n+1)+1$
und gleich 0 in allen anderen Fällen.

Ähnliche Theoreme kann man in beliebiger Zahl auf ähnlichem Wege ableiten, so z. B. wenn als erzeugende Function

$$\frac{1}{1+u^1-u^3-u^4+u^6+u^7-\dots} = \frac{1-u+u^2}{1 \pm u^n}$$

angenommen wird.

Es sei zum Schlusse noch erwähnt, dass das behandelte Problem noch bei einer anderen algebraischen Frage auftritt. Wenn die Gleichung

$$x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - c_3 x^{n-3} - \dots - c_n = 0$$

gegeben ist, so kann jede höhere als die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz einer Wurzel ξ derselben durch die niedrigsten Potenzen homogen und linear dargestellt werden

$$\begin{aligned} \xi^n &= c_1 \xi^{n-1} + c_2 \xi^{n-2} + c_3 \xi^{n-3} + \dots + c_{n-1} \xi + c_n, \\ \xi^{n+1} &= (c_1^2 + c_2) \xi^{n-1} + (c_1 c_2 + c_3) \xi^{n-2} + \dots + (c_1 c_{n-1} + c_n) \xi + c_1 c_n, \\ \xi^{n+2} &= (c_1^3 + 2c_1 c_2 + c_3) \xi^{n-1} + \dots + (c_1^2 + c_2) c_n, \\ &\dots \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, dass sich

$$\begin{aligned} \xi^{n+k} &= C_{n+k}^{(n-1)} \xi^{n-1} + C_{n+k}^{(n-2)} \xi^{n-2} + \dots + C_{n+k}^{(1)} \xi + C_{n+k}^{(0)} \\ &= \sum (k) \{ c_1 \xi^{n-1} + c_2 \xi^{n-2} + \dots + c_n \} \\ &+ \sum (k-1) \{ c_2 \xi^{n-1} + c_3 \xi^{n-2} + \dots + c_n \xi \} + \\ &+ \dots + \\ &+ \sum (k-n) \{ c_{n-1} \xi^{n-1} + c_n \xi^{n-2} \} + \sum (k-n+1) c_n \xi^{n-1} \end{aligned}$$

ergibt.