ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nº 2794.

Die Lage der Asteroiden-Bahnebenen.

Von Ingenieur *Glauser*.

Herr S. Newcomb hat in einer Abhandlung in Nr. 1382 der A. N. das Gesetz der Vertheilung der Knoten und Perihelien der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter zu bestimmen gesucht. Ich gedachte auf diesem Wege, mit Beschränkung auf die Lage der Bahnebenen, einen Schritt weiter zu gehen, nicht nur deshalb, weil statt der 57 damals untersuchten Asteroiden nun deren 260 in Betracht gezogen werden können, sondern auch, weil die Behandlung des Gegenstandes in etwas anderer Form einen klareren Einblick und ein tieferes Eindringen gestattet.

Indem nämlich Newcomb von den Lagen der Bahnebenen nur je ein einzelnes Element, und zwar ein den maassgebenden Kräften fernstehendes, nämlich den Knoten mit der Erdbahn, in Betracht gezogen, hat er von der wirklichen Gesetzmässigkeit nur einen sehr verschleierte Ausdruck erhalten, nämlich ein ziemlich schwaches Uebergewicht der Knoten in gewissen Quadranten der Ekliptik, nach dem Ausdruck in § 1 dortiger Abhandlung eine Tendenz der Asteroidenbahnknoten, sich dem Knoten der Jupitersbahn in der Ekliptik zu nähern. Es mag jedoch gleich hier bemerkt werden, dass dabei die physische Wirkung der Erde in keiner Weise betheiligt ist. Die etwas dichtere Gruppierung der Knoten der Asteroidenbahnen in der Ekliptik um die Knoten der Jupitersbahn herum ist nur die geometrische Folge der gleichmässigen Vertheilung der Knoten der Asteroidenbahnen ringsum in der Jupitersbahn; letztere Vertheilung ist als der ursprüngliche und einfachste Ausdruck der bestehenden Gesetzmässigkeit zu betrachten.

Werden die Pole der verschiedenen Bahnebenen in stereographischer Projection, deren Mittelpunkt der Ekliptikpol, aufgetragen, so gelangt man am leichtesten zu einem die ganze Lage der Bahnebenen, nicht nur ihre Knoten, sondern auch die Neigungen, übersichtlich darstellenden Bild. Die ganze Schaar der Pole bildet auf demselben eine rundliche Wolke, die sich ungefähr gleichmässig um einen Punkt grösster Verdichtung lagert, welcher Punkt vom Ekliptikpol wesentlich abseits und nach ungefährender Schätzung nahe dem Pol der Jupitersbahn liegt.

Es soll nun unsere Aufgabe sein, auf dem Rechnungswege die Begründung der hier constatirten Thatsache und ihre genaueren Einzelheiten zu suchen.

Da sich von vornherein die Hauptwirkung auf die Asteroidenbahnen als von Jupiter ausgehend erwarten lässt, so ist es zweckmässig, als Grundebene nicht die Ekliptik, sondern die Ebene der Jupitersbahn anzunehmen. Dadurch vereinfachen sich sehr wesentlich die Ausdrücke der säcularen Variationen der Bahnebenen namentlich in dem Fall, wo nur die Wirkung Jupiters in Betracht gezogen wird. (Auch Newcomb's numerische Resultate beruhen wohl einzig auf dieser Wirkung, worüber zwar, wie überhaupt über den Gang seiner Rechnungen, alle Angaben fehlen.)

Betrachten wir zunächst diesen einfachsten Fall, nämlich

§ 1.

Vertheilung der Bahnebenen der Asteroiden zufolge ihrer säcularen Aenderungen durch Jupiter allein.

Die Integralformeln, welche die Knotenlänge Ω und die Neigung i , bezogen auf eine feste Grundebene, durch die Hilfsgrössen

$$p = \tan i \cdot \sin \Omega \quad \text{und} \quad q = \tan i \cdot \cos \Omega$$

für irgend eine Zeit t bestimmen, sind im Fall von nur 2 Planeten m (Asteroid) und m_1 (Jupiter):

$$(1) \quad \begin{cases} p = N \sin(h t + k) + N' \sin(h' t + k') \\ p_1 = N_1 \sin(h t + k) + N'_1 \sin(h' t + k') \\ q = N \cos(h t + k) + N' \cos(h' t + k') \\ q_1 = N_1 \cos(h t + k) + N'_1 \cos(h' t + k') \end{cases}$$

wo zwischen den Constanten die Relationen bestehen:

$$(2) \quad \begin{cases} N h = -[a a_1] N + [a a_1] N_1 \\ N' h' = -[a a_1] N' + [a a_1] N'_1 \\ N_1 h = -[a_1 a] N_1 + [a_1 a] N \\ N'_1 h' = -[a_1 a] N'_1 + [a_1 a] N' \end{cases}$$

hierbei sind

$$[a a_1] = -\frac{3}{4} m_1 a^{1/2} a_1 \frac{B}{(a_1^2 - a^2)^2}$$

$$[a_1 a] = -\frac{3}{4} m a^{1/2} a \frac{B}{(a_1^2 - a^2)^2}$$

wo

$$B = -2 a_1 \left[\frac{1}{2} \frac{a}{a_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{a}{a_1} \right)^3 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \left(\frac{a}{a_1} \right)^5 - \frac{1}{16} \cdot \frac{5}{128} \left(\frac{a}{a_1} \right)^7 - \dots \right]$$

h und h' sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung, die sich aus der Verbindung der ersten Relationen (2) ergibt. Sie finden sich

$$\begin{aligned} h &= -([a_1 a] + [a a_1]) \\ h' &= 0 \end{aligned}$$

Der ersteren entspricht:

$$N_1 = -\frac{[a_1 a]}{[a a_1]} N;$$

der letzteren: $N_1' = N'.$

Werden diese Werthe in (1) eingeführt, und die Constanten N' und k' gemäss der Annahme der Jupitersbahn als Grundebene durch $p_1 = 0$ und $q_1 = 0$ für $t = 0$ bestimmt, indem zugleich wegen der verschwindend kleinen Asteroidenmasse $[a_1 a] = 0$ gesetzt wird, so ergeben sich:

$$\begin{aligned} p &= N \sin(h t + k) \\ q &= N \cos(h t + k) \end{aligned}$$

$$\text{woraus} \quad \left. \begin{aligned} \tan i &= \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{q} = N = \text{const.} \\ \tan \delta &= \frac{p}{q} = \tan(h t + k) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{und daneben:} \quad \begin{aligned} p_1 &= 0 \\ q_1 &= 0. \end{aligned}$$

Während also die Ebene der Jupitersbahn unverändert bleibt, verschiebt sich in ihr der Knoten der Asteroidenbahn bei constanter Neigung mit constanter Geschwindigkeit

$$h = -[a a_1]$$

die sich z. B. für $a = 2.3$, etwa den Planeten (18) Mel-

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= N \sin(h t + k) + N' \sin(h' t + k') + N'' \sin(h'' t + k'') \\ q &= N \cos(h t + k) + N' \cos(h' t + k') + N'' \cos(h'' t + k'') \\ p_1 &= N_1 \sin(h t + k) + N_1' \sin(h' t + k') + N_1'' \sin(h'' t + k'') \\ q_1 &= N_1 \cos(h t + k) + N_1' \cos(h' t + k') + N_1'' \cos(h'' t + k'') \\ p_2 &= N_2 \sin(h t + k) + N_2' \sin(h' t + k') + N_2'' \sin(h'' t + k'') \\ q_2 &= N_2 \cos(h t + k) + N_2' \cos(h' t + k') + N_2'' \cos(h'' t + k'') \end{aligned} \right.$$

wo zwischen den Constanten die Relationen gelten:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} N h &= -([a a_1] + [a a_2]) N + [a a_1] N_1 + [a a_2] N_2 \\ N_1 h &= -([a_1 a] + [a_1 a_2]) N_1 + [a_1 a] N + [a_1 a_2] N_2 \\ N_2 h &= -([a_2 a] + [a_2 a_1]) N_2 + [a_2 a] N + [a_2 a_1] N_1 \end{aligned} \right.$$

und analoge für die einfach und doppelt accentuirten h , N , N_1 , N_2 .

h , h' , h'' sind die 3 Wurzeln der aus Verbindung der 3 Gleichungen (2) hervorgehenden cubischen Gleichung und ergeben sich unter Nullsetzung von $[a_1 a]$ und $[a_2 a]$ wegen der verschwindenden Kleinheit der Asteroidenmasse:

$$\begin{aligned} h &= 0 \\ h' &= -([a a_1] + [a a_2]) \\ h'' &= -([a_1 a_2] + [a_2 a_1]) \end{aligned}$$

Hiernach folgen die Werthe:

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{([a a_1] + [a a_2])[a_2 a_1] + h[a_2 a_1]}{([a a_1] + [a a_2])[a_2 a_1] + h[a a_1]} \cdot N \\ N_1 &= \frac{[a a_1] + [a a_2] + h}{[a a_1]} \cdot N - \frac{[a a_2]}{[a a_1]} \cdot N_2. \end{aligned}$$

und analoge für die accentuirten h , N , N_1 , N_2 .

pomene und (80) Sappho entsprechend, $= 0.0010561$ er giebt, so dass die Bahnpole dieser Planeten in etwa 6000 Jahren denjenigen Jupiters umkreisen.

Diesen für jeden Planeten constanten, aber von Planet zu Planet nach Maassgabe der mittleren Sonnenweite verschiedenen Umlaufgeschwindigkeiten entsprechend könnte die Vertheilung der Asteroidenbahnpole um denjenigen Jupiters herum jederzeit nur eine wesentlich gleichmässige sein. Die Uebereinstimmung der Knoten der Asteroiden mit demjenigen Jupiters in der Ekliptik, im Sinne der Resultate Newcomb's, geht hieraus unmittelbar hervor und wird um so schärfer sich aussprechen, je weniger die Asteroidenbahnen gegen diejenige Jupiters geneigt sind.

Sollen ausser Jupiter noch weitere Planeten in Betracht gezogen werden, so muss es sich allen weit voraus um Saturn handeln, sowohl wegen dessen directer Einwirkung auf die Asteroidenbahnen als wegen der wesentlichen Veränderlichkeit, welche er der Ebene der Jupitersbahn beibringt.

Wir betrachten darum weiter

§ 2.

Die säcularen Aenderungen der Asteroidenbahnebenen durch die Wirkung von Jupiter und Saturn.

Im Falle von 3 Planeten m , m_1 , m_2 (Asteroid, Jupiter, Saturn) heissen die Integralformeln:

Diese Werthe in die Gleichungen (1) eingesetzt, und dann die Constanten N , N' , N'' , k , k' , k'' bestimmt durch die Wahl der Jupitersbahnebene für 1850.0 als feste Grunde Ebene, und des damaligen Knotens Saturns in der Jupitersbahn als feste Anfangsrichtung, und gemäss den damaligen Elementen der einzelnen Planeten, giebt die Gleichungen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \tan i \sin \delta &= N' \sin(h' t + k') - N'' \sin h'' t \\ \tan i \cos \delta &= N + N' \cos(h' t + k') - N'' \cos h'' t \\ \tan i_1 \sin \delta_1 &= -0.32747 N'' \sin h'' t \\ \tan i_1 \cos \delta_1 &= N - 0.32747 N'' \cos h'' t \\ \tan i_2 \sin \delta_2 &= 0.80792 N'' \sin h'' t \\ \tan i_2 \cos \delta_2 &= N + 0.80792 N'' \cos h'' t \end{aligned} \right.$$

wo N' und k' von Planet zu Planet verschieden, z. B.

für (18) Melpomene: $N' = 0.17667268$ $k' = 27^\circ 39' 31''$
für (80) Sappho: $N' = 0.16273873$ $k' = 94^\circ 20' 25''$

während für alle gemeinsam:

$$N = 0.00631183$$

$$N'' = 0.01927452$$

$$h' = -0.0010941 \times 206264''8 = -225''.674$$

$$h'' = -0.00077896 \times 206264''8 = -160''.672$$

Die 3^{te} und 4^{te} der Gleichungen (3) bestimmen die Bewegung der Ebene der Jupitersbahn. Sie lassen sich, weil $0.32747 N'' = N$, auf die Form bringen:

$$\Omega_1 = 90^\circ + \frac{1}{2} h'' t$$

$$\tan i_1 = -2N \sin \frac{1}{2} h'' t$$

woraus ersichtlich, dass der Knoten Jupiters in der festen Ebene sich gleichmässig in 8066 Jahren rückläufig im Halbkreis herumdreht, während die Neigung in der ersten Hälfte dieser Periode von 0 auf $0^\circ 43' 24''$ steigt und in der zweiten Hälfte wieder auf 0 sinkt.

Die 5^{te} und 6^{te} der Gleichungen (3) ergeben für die Ebene der Saturnsbahn eine etwas ungleichmässige Knotenbewegung und eine an dieselbe Periode gebundene Schwankung der Neigung zwischen ihrem jetzigen Maximalwerth $1^\circ 15' 13''$ und dem Minimum $0^\circ 31' 50''$.

Diese auf strenge Integralformeln gegründete Dar-

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d\Omega}{dt} = -([a a_1] + [a a_2] + [a_1 a]) + ([a a_2] - [a_1 a_2]) \frac{\tan i_2}{\tan i} \cos(\Omega - \Omega_2) \\ \frac{di}{dt} = ([a a_2] - [a_1 a_2]) \tan i_2 \sin(\Omega - \Omega_2) \end{cases}$$

Analog gelten für die Saturnsbahn:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d\Omega_2}{dt} = -([a_2 a_1] + [a_2 a] + [a_1 a_2]) + ([a_2 a] - [a_1 a]) \frac{\tan i}{\tan i_2} \cos(\Omega_2 - \Omega) \\ \frac{di_2}{dt} = ([a_2 a] - [a_1 a]) \tan i \sin(\Omega_2 - \Omega) \end{cases}$$

Durch Nullsetzung von $[a_1 a]$ und $[a_2 a]$ ergibt sich hieraus zunächst:

$$(3) \quad \frac{di_2}{dt} = 0, \quad \text{also } i_2 = \text{const.}$$

ferner für die Knotenbewegung relativ zum Saturnsknoten:

$$(4) \quad \frac{d(\Omega - \Omega_2)}{dt} = -\alpha \left[1 + \beta \frac{\tan i_2}{\tan i} \cos(\Omega - \Omega_2) \right]$$

wo

$$\alpha = [a a_1] - [a_2 a_1] + [a a_2] - [a_1 a_2]$$

$$\beta = \frac{-[a a_2] + [a_1 a_2]}{\alpha}$$

Wenn $\beta \frac{\tan i_2}{\tan i} < 1$, so kann $\frac{d(\Omega - \Omega_2)}{dt}$ nie Null werden oder gar das Zeichen wechseln. Die Bewegung des Knotens geht also beständig im gleichen Sinne fort und liefert vollständige Umläufe. Sei V die mittlere Geschwindigkeit eines Umlaufs, immer relativ zum Saturnsknoten, so ist die Zeit eines Umlaufs $\frac{2\pi}{V}$. Die Zeit zur Zurücklegung

stellung der Bewegungen der Bahnebenen der Asteroiden und der sie störenden Hauptplaneten mit Beziehung auf eine feste Grundebene würde zwar gestatten, für jeden Asteroiden mit aller Schärfe die Zeiten zu berechnen, welche sein Bahnpol braucht zum Durchlaufen jedes beliebigen Abschnittes räumlicher Lage auch mit Bezug auf die beweglichen Ebenen der Jupiters- und Saturnsbahn, und es könnten hiernach die Wahrscheinlichkeiten bemessen werden, welche für seine Anwesenheit zu irgend welcher Zeit in einem dieser Abschnitte sprechen. Dieser rationelle Weg hätte aber den Nachtheil immenser Weitläufigkeit. Wir greifen darum zu einem weniger genauen, aber für unseren Zweck genügenden Verfahren, bestehend in:

§ 3.

Ermittlung der räumlichen Vertheilung der Asteroidenbahnebenen aus dem Gesetz ihrer säcularen Aenderungen durch Jupiter und Saturn nach den auf die bewegliche Jupitersbahnebene bezogenen Differentialgleichungen.

Die Differentialgleichungen der Knotenlänge und der Neigung einer Asteroidenbahn bezogen auf die bewegliche Jupitersbahn sind:

der Länge $d(\Omega - \Omega_2)$ ist dagegen $d(\Omega - \Omega_2) : \frac{d(\Omega - \Omega_2)}{dt}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass zu irgend einer Zeit ein Knoten auf der Strecke $d(\Omega - \Omega_2)$ liege, ist also

$$dW = \frac{V}{\frac{d(\Omega - \Omega_2)}{dt}} \cdot \frac{d(\Omega - \Omega_2)}{2\pi}$$

oder nach Einsetzung von (4):

$$(5) \quad dW = -\frac{V}{2\pi\alpha} \cdot \frac{d(\Omega - \Omega_2)}{1 + \beta \frac{\tan i_2}{\tan i} \cos(\Omega - \Omega_2)}$$

Zur genauen Integration dieser Gleichung wäre erforderlich, $\frac{\tan i_2}{\tan i}$ als Function von $(\Omega - \Omega_2)$ auszudrücken. Dies würde aber bedeutende Schwierigkeiten verursachen, und weil überhaupt die Veränderlichkeit der Neigungen eine viel geringere ist als diejenige der Knotenlängen, so mag es zum Zwecke einer Näherung genügen, $\frac{\tan i_2}{\tan i} = \text{const.}$

anzunehmen. Dass i_2 strenge constant, so lange nur die Massen von Jupiter und Saturn in Betracht kommen, ist schon oben durch Gleichung (3) ausgedrückt. Die Kleinheit der Veränderlichkeit von i folgt dagegen aus der zweiten der Gleichungen (1), wenn in derselben näherungsweise $\Omega - \Omega_2 = Vt$, d. h. der Zeit proportional angenommen wird, wodurch entsteht:

$$i = \text{const.} \pm \frac{\text{tang } i_2}{1 + \frac{[a_2 a_1] - [a a_1]}{[a_1 a_2] - [a a_2]}}$$

z. B. für $a = 2.3$ (Melpomene und Sappho) $i = \text{const.} \pm 0^\circ 44'$.

Wenn hiernach die Annahme $\frac{\text{tang } i_2}{\text{tang } i} = \text{const.}$ gestattet ist, so bietet die Integration von Gleichung (5) keine Schwierigkeit. Wird der Kürze wegen $\beta \frac{\text{tang } i_2}{\text{tang } i} = s$ gesetzt, welchen Werth wir vorläufig < 1 vorausgesetzt haben, und

$$(6) \quad W = \frac{1}{2\pi} \left[\text{arc tang } \frac{\sqrt{1-s^2} \sin(K + \frac{1}{2}\pi)}{\cos(K + \frac{1}{2}\pi) + s} - \text{arc tang } \frac{\sqrt{1-s^2} \sin K}{\cos K + s} \right]$$

Diese Grösse hat ihr Maximum für $K = \frac{3}{4}\pi$, ihr Minimum für $K = -\frac{1}{4}\pi$. Bezeichnen wir denjenigen Quadranten, dessen Mittelmeridian durch den Pol der Saturnsbahn geht, als den ersten, die Wahrscheinlichkeit,

$$(7) \quad \begin{cases} W_I = \text{Minimum} = \frac{1}{\pi} \text{arc tang } \frac{\sqrt{1-s^2}}{s\sqrt{2+1}} \\ W_{II} = \text{Maximum} = \frac{1}{\pi} \left[\pi - \text{arc tang } \frac{\sqrt{1-s^2}}{s\sqrt{2-1}} \right] \\ W_{III} = W_{IV} = \frac{1}{2\pi} \left[\text{arc tang } \frac{\sqrt{1-s^2}}{s\sqrt{2-1}} - \text{arc tang } \frac{\sqrt{1-s^2}}{s\sqrt{2+1}} \right] = \frac{1 - (W_I + W_{III})}{2} \end{cases}$$

Wenn $s = \beta \frac{\text{tang } i_2}{\text{tang } i} > 1$, so wird nach Gleichung (4) bei gewissen Grenzwerten der Knotenlänge

$$\begin{aligned} \Omega - \Omega_2 &= \pm E \\ \frac{d(\Omega - \Omega_2)}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Zwischen diesen Grenzen, die sich durch

$$\cos E = -\frac{\text{tang } i}{\beta \text{ tang } i_2} = -\frac{1}{s}$$

$$(5') \quad dW = \frac{V}{d(\Omega - \Omega_2)} \cdot \frac{d(\Omega - \Omega_2)}{2E} = -\frac{V}{2Ea} \cdot \frac{d(\Omega - \Omega_2)}{1 + s \cos(\Omega - \Omega_2)}$$

Die Integration zwischen den Grenzen E und $-E$ giebt die Wahrscheinlichkeit 1, nämlich

$$1 = -\frac{V}{2Ea\sqrt{s^2-1}} \log \frac{\cos E + s + \sqrt{s^2-1} \sin E}{\cos E + s - \sqrt{s^2-1} \sin E}$$

Der Bruch, dessen log hier auftritt, wird für

$$i = \frac{[a_1 a_2] - [a a_2]}{V} \text{ tang } i_2 \cos Vt + \text{const.}$$

Maximum und Minimum von i ergeben sich hieraus für $\cos Vt = \pm 1$, und da nach (4) im gleichen Näherungsgrad:

$$V = -a = -[a a_1] + [a_2 a_1] - [a a_2] + [a_1 a_2],$$

so wird

$$V = -a\sqrt{1-s^2}$$

Dann ergibt die Integration über einen bestimmten Quadranten zwischen K und $K + \frac{1}{2}\pi$

dass ein Asteroidenbahnpol in diesem Quadranten liege, mit W_I , und numeriren analog weiter im Sinne der wachsenden Längen, so wird

bestimmen, schwankt der Asteroiden-Bahnpol relativ zum Saturnsbahnpol hin und her. Sei wieder V die mittlere Geschwindigkeit der relativen Knotenbewegung, so ist die Dauer eines Hin- oder Hergangs $= \frac{2E}{V}$. Die Zeit zur Zurücklegung der Länge $d(\Omega - \Omega_2)$ ist dagegen

$$d(\Omega - \Omega_2) : \frac{d(\Omega - \Omega_2)}{dt}$$

somit die Wahrscheinlichkeit der Lage des Knotens auf der Strecke $d(\Omega - \Omega_2)$:

$$\cos E = -\frac{1}{s}, \quad \sin E = \frac{\sqrt{s^2-1}}{s}$$

je nach der Wahl der Wurzelzeichen ∞ , 0 oder $\frac{0}{0}$. Erstere zwei Werthe würden $V = 0$ ergeben, sind daher ohne reale Bedeutung, dagegen ermittelt sich der unbestimmte

dritte Werth durch Differentiation von Zähler und Nenner

$$= \frac{s^2 - 2\sqrt{s^2 - 1}}{s^2},$$
 wonach V bestimmt wird. Mit Benützung
 dieses Werthes ergibt die Integration der Gleichung (5')
 zwischen den Grenzen K und $K + \frac{1}{2}\pi$:

$$(6') \quad W = \frac{\log \frac{(-\sin K + s + \sqrt{s^2 - 1} \cos K)(1 + s \cos K)}{(\cos K + s + \sqrt{s^2 - 1} \sin K)(1 - s \cos K)}}{\log \frac{s^2 - 2\sqrt{s^2 - 1}}{s^2}}$$

was natürlich nur soweit gilt, als $K + \frac{1}{2}\pi < E$.

Hieraus folgt für $K = -\frac{1}{4}\pi$, sofern $E > \frac{1}{4}\pi$:

$$W_I = \frac{\log \frac{1 + s\sqrt{2} + \sqrt{s^2 - 1}}{1 + s\sqrt{2} - \sqrt{s^2 - 1}}}{\log \frac{s^2 - 2\sqrt{s^2 - 1}}{s^2}}$$

Wenn $E < \frac{1}{4}\pi$, so wäre $W_I = 1$.

Ferner folgt für $K = +\frac{1}{4}\pi$, sofern $E > \frac{3}{4}\pi$:

$$(7') \quad W_{II} = W_{IV} = \frac{\log \frac{(-1 + s\sqrt{2} + \sqrt{s^2 - 1})(\sqrt{2} + s)}{(1 + s\sqrt{2} + \sqrt{s^2 - 1})(\sqrt{2} - s)}}{\log \frac{s^2 - 2\sqrt{s^2 - 1}}{s^2}}$$

Wenn $\frac{1}{4}\pi < E < \frac{3}{4}\pi$, so wäre

$$W_{II} = W_{IV} = \frac{1}{2}(1 - W_I)$$

Wenn $E > \frac{3}{4}\pi$, so ist noch

$$W_{III} = 1 - (W_I + 2W_{II})$$

Die Grösse β wurde für die Werthe $a = 2.3; 2.7; 3.1; 3.5; 3.9$ berechnet und für die Zwischenwerthe interpolirt, die Neigungen i gegen die Jupitersbahn aus der Eingangs erwähnten stereographischen Karte der Asteroidenpole entnommen, und hiernach und mit dem Werth der Neigung der Saturnsbahn $i_2 = 1^\circ 15' 13''$ für jeden einzelnen Asteroiden die Grösse s gebildet. Nur für den Planeten (27) ergab sich dieselbe > 1 , so dass einzig für diesen Planeten die Formeln (7') anzuwenden waren. Für alle anderen galten die Formeln (7). Die Rechnung wurde

auch nur für diejenigen unter ihnen, welche $\frac{\beta}{\tan i} > 10$

haben, separat ausgeführt; die kleineren $\frac{\beta}{\tan i}$ wurden in 10 Hauptwerthen 1...10 behandelt, die entsprechenden W berechnet und für die Zwischenwerthe proportional interpolirt. Die so entstandenen Wahrscheinlichkeiten für die Lage jedes einzelnen Asteroidenbahnpols in jedem der 4 Quadranten addirt, ergaben folgende wahrscheinlichste Summen von Polen:

im Quadrant	I	II	III	IV
wahrscheinlichste Anzahl Pole	61	65	69	65

Um mit diesen theoretischen Zahlen den wirklichen Bestand zu vergleichen, wurden in unserer Karte die im Jupiterspol sich kreuzenden Grenzmeridiane der 4 Quadranten eingezeichnet und die zwischen diesen Grenzen liegenden Pole gezählt. Es fanden sich in denselben Quadranten wie oben:

wirkliche Anzahl Pole	54	72	71	63
-----------------------	----	----	----	----

Die Uebereinstimmung ist, wie man sieht, nicht übel. Die theoretisch entwickelte Störung der gleichmässigen Vertheilung um den Pol der Jupitersbahn durch die Wirkung Saturns tritt deutlich zu Tage und macht sich nahe in dem berechneten Maasse geltend. Daneben ist aber noch eine weitere Störung erkennbar, welche dem II^{ten} und III^{ten} Quadranten einen kleinen Ueberschuss von Asteroidenbahnpolen zuführt. Dass ungefähr in der Mitte dieser beiden Quadranten der Ekliptikpol steht, deutet auf eine Wirkung der Erde. Eine physische Wirkung wie diejenige Saturns kann dies jedoch nicht sein, denn nicht nur ist die Wirkung der Erde, wie eine kurze Berechnung der dieselbe ausdrückenden Werthe β für die der Erde nächsten Asteroiden lehrt, zu klein, um neben der Wirkung Saturns wahrgenommen zu werden, sondern sie würde auch in entgegengesetztem Sinne der vorliegenden Störung wirken, nämlich in demjenigen einer Vermehrung der Bahnpole in den Quadranten I und IV. Wohl aber liegt eine geometrische Erklärung dieser Thatsache sehr nahe: Die Nähe einer Asteroidenbahn an der Ekliptik begünstigt die Entdeckung des Asteroiden, denn man weiss, dass vorzugsweise die Ekliptikzone behufs Aufsuchung neuer Planeten durchforscht wird, wie auch diese Zone durch treffliche Sternkarten und Cataloge am Besten bekannt ist.

Die dann noch bleibenden Abweichungen, so namentlich der grössere Ueberschuss des II^{ten} Quadranten gegenüber dem III^{ten}, können wohl unbedenklich auf Rechnung der immerhin zu erwartenden Zufälligkeiten der fort und fort veränderlichen Vertheilung gesetzt werden. Wir resumiren unser Ergebniss wie folgt:

Zufolge der säcularen Aenderungen der Asteroidenbahnebenen durch Jupiter allein sollten diese Ebenen eine gleichmässige Vertheilung ihrer Pole rings um denjenigen der Jupitersbahn aufweisen; durch die Wirkung Saturns entsteht dagegen ein kleines Uebergewicht in der dem Saturnsbahnpol entgegengesetzten Richtung. Der Bestand der 260 ersten Asteroiden rechtfertigt dieses Ergebniss der Theorie, und lässt daneben in der Richtung des Ekliptikpols einen kleinen Ueberschuss wahrnehmen, der durch eine elective Begünstigung der Entdeckung zu erklären ist.

Fluntern bei Zürich.

Glauser, Ingenieur.