16.

Sur les intégrales Eulériennes.

(Par Mr. G. Lejeune Dirichlet.)

Les intégrales que *Legendre* a appelées Eulériennes de première et de seconde espèce, sont celles que renferment les équations

$$1. \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx = \int_0^\infty \frac{y^{a-1} dy}{(1+y)^{a+b}} = \left(\frac{b}{a}\right),$$

$$2. \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{a-1} dx = \int_0^\infty e^{-y} y^{a-1} dy = \Gamma(a),$$

dans lesquelles les constantes a et b , ou du moins leurs parties réelles doivent être supposées positives pour que les intégrales ne deviennent pas infinies. *Euler* a fait voir qu'il y a entre ces deux transcendentes cette relation très simple

$$3. \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Cette équation qui fait dépendre une intégrale de première espèce de trois intégrales de seconde espèce, renferme aussi une des principales propriétés de la fonction $\Gamma(a)$. En effet, si l'on y suppose $a+b=1$, on trouve, en ayant égard à l'équation évidente $\Gamma(1)=1$,

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1} dy}{1+y}.$$

Or cette dernière intégrale a la valeur très simple $\frac{\pi}{\sin a\pi}$, comme *Euler* l'a trouvé par l'intégration d'une fraction rationnelle et comme on l'a vérifié de différentes manières. On a donc définitivement

$$4. \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Pour établir l'équation (3.) et les autres propriétés des intégrales Eulériennes, les géomètres ont employé des procédés assez différens. Mr. *Gauss* part de l'équation

$$5. \Gamma(a) = \frac{1.2.3\dots k}{a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1)} k^{a-1}, \quad (k=\infty),$$

qui s'accorde avec la formule que *Laplace* a donnée pour exprimer la valeur approchée du produit $a(a+1)\dots(a+k-1)$, lorsqu'on y suppose k très grand. Après avoir démontré que l'expression (5.) converge vers une

limite déterminée lorsqu'on y fait croître indéfiniment l'entier positif k , Mr. *Gauss* pose cette limite comme définition de $\Gamma(a)$ et déduit de là au moyen des séries et des produits infinis tous les théorèmes relatifs aux transcendentes Eulériennes, y compris les équations (1.), (2.) et (3.). Cette marche très naturelle, lorsqu'on prend ce point de départ, ne l'est plus lorsqu'on définit ces transcendentes au moyen des équations (1.) et (2.), c'est-à-dire comme des intégrales. Il paraît alors plus simple et plus conforme à la définition de ces transcendentes de tout tirer du calcul intégral. L'équation (3.) qui comprend la formule (4.), ayant déjà été démontrée par Mrs. *Poisson* et *Jacobi* *), en transformant les intégrales qui y entrent, il reste pour rendre la théorie des intégrales Eulériennes plus uniforme, à prouver par l'intégration les autres formules qui s'y rapportent et particulièrement l'équation remarquable

$$6. \quad \Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(a + \frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-na} \Gamma(na),$$

qui a été donnée par Mr. *Gauss* et *Legendre*, mais qu'on n'a pas encore démontrée que je sache sans recourir aux développemens infinis **). C'est l'objet que je vais remplir en peu de mots.

L'équation (2.) donne par un simple changement de variable

$$7. \quad \int_0^\infty e^{-sy} y^{a-1} dy = \frac{\Gamma(a)}{s^a},$$

où s est une constante positive.

Si l'on y suppose $a = 1$, et que l'on intègre par rapport à s entre les limites 1 et s , on aura la formule connue

$$8. \quad \int_0^\infty (e^{-y} - e^{-sy}) \frac{dy}{y} = \log(s).$$

Si l'on différencie maintenant l'équation (2.) par rapport à a , après y avoir remplacé y par s , on aura

$$9. \quad \int_0^\infty e^{-s} s^{a-1} \log(s) ds = \Gamma'(a),$$

où l'on a fait pour abréger $\frac{d\Gamma(a)}{da} = \Gamma'(a)$.

*) Journal de l'Ecole polytech. 19^{ième} cahier pag. 477. Journal de Mr. *Crelle*, tome XI. pag. 307.

**) Voyez sur ce point: Comment. Gottg. rec. vol. II., le Traité des fonctions elliptiques vol. II., les Exercices de Mr. *Cauchy* 19^{ième} livraison et un mémoire de Mr. *Crelle* tom. VII. pag. 375 de son Journal.

Substituant pour $\log(s)$ l'intégrale (8.), et intervertissant l'ordre des intégrations, il vient

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(e^{-y} \int_0^\infty e^{-s} s^{a-1} ds - \int_0^\infty e^{-(1+y)s} s^{a-1} ds \right) = \Gamma'(a),$$

ou, si l'on met en vertu des équations (2.) et (7.), $\Gamma(a)$, $\frac{\Gamma(a)}{(1+y)^a}$ à la place des deux intégrales relatives à s ,

$$10. \quad \Gamma(a) \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a} \right) = \Gamma'(a),$$

équation qu'on peut mettre sous cette autre forme, en introduisant une nouvelle variable x telle que $x = \frac{1}{1+y}$:

$$11. \quad \int_0^1 \left(e^{\frac{1-x}{x}} - x^a \right) \frac{dx}{x(1-x)} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{d \log \Gamma(a)}{da}.$$

Mettant a , $a + \frac{1}{n}$, $a + \frac{2}{n}$, ..., $a + \frac{n-1}{n}$, où n désigne un entier positif indépendant de a , à la place de a et faisant la somme de toutes ces équations, on aura

$$\int_0^1 \left[n e^{\frac{1-x}{x}} - x^a \left(1 + x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{2}{n}} + \dots + x^{\frac{n-1}{n}} \right) \right] \frac{dx}{x(1-x)} = S,$$

si l'on fait pour abrégér,

$$S = \frac{d \log \Gamma(a)}{da} + \frac{d \log \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right)}{da} + \dots + \frac{d \log \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right)}{da},$$

ou ce qui revient au même

$$\int_0^1 \left(\frac{n e^{\frac{1-x}{x}}}{1-x} - \frac{x^a}{1-x^{\frac{1}{n}}} \right) \frac{dx}{x} = S.$$

Remplaçant x par x^n , cette équation deviendra

$$n \int_0^1 \left(\frac{n e^{\frac{1-\frac{1}{x^n}}{x^n}}}{1-x^n} - \frac{x^{na}}{1-x} \right) \frac{dx}{x} = S.$$

Si l'on retranche de cette équation l'équation (11.), après avoir multiplié celle-ci par n et y avoir remplacé a par na , on trouve, en remettant pour S sa valeur et en remarquant qu'on a $n \frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} = \frac{d \log \Gamma(na)}{da}$,

$$n \int_0^1 \left(\frac{n e^{\frac{1-\frac{1}{x^n}}{x^n}}}{1-x^n} - \frac{e^{\frac{1-x}{x}}}{1-x} \right) \frac{dx}{x} = \frac{d}{da} \log \left(\frac{\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \dots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} \right).$$

Désignant par $\log(p)$ le premier membre de cette équation, qui ne dépend pas de a , intégrant par rapport à a et passant des logarithmes aux nombres, on aura

$$12. \quad \Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \dots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) = qp^a \Gamma(na),$$

où q est la constante introduite par l'intégration. Pour déterminer les quantités p et q , l'une et l'autre indépendantes de a , on changera a en $a + \frac{1}{n}$. Divisant l'équation qui résulte de ce changement par l'équation (12.), on trouve

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = p^{\frac{1}{n}} \frac{\Gamma(na+1)}{\Gamma(na)},$$

d'où l'on conclut en vertu de l'équation connue $\Gamma(b+1) = b \Gamma(b)$,

$$p = n^{-n}.$$

L'équation (12.) devient ainsi

$$\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \dots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) = q n^{-na} \Gamma(na).$$

Pour déterminer q , on fera $a = \frac{1}{n}$, ce qui donne

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} q.$$

Si l'on écrit cette équation une seconde fois en renversant l'ordre des facteurs et si l'on forme ensuite le produit des deux équations, en évaluant le produit de deux facteurs de même rang au moyen de la formule (4.), on obtient

$$\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{n}} \dots \frac{\pi}{\sin \frac{n-1}{n} \pi} = \frac{1}{n^2} q^2,$$

substituant pour le premier membre sa valeur connue, on conclut

$$q = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n}.$$

On a donc définitivement

$$\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(a + \frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-na} \Gamma(na),$$

ce qui coïncide avec l'équation (6.).

L'équation (11.) diffère un peu par sa forme de l'équation connue

$$13. \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{x^{a-1}}{1-x} \right) dx = \frac{d \log \Gamma(a)}{da}.$$

Pour obtenir cette dernière, il faut transformer d'une manière différente les deux parties de l'intégrale (10.). En posant, comme plus haut, $x = \frac{1}{1+y}$ dans la seconde, il faut dans la première qui contient l'exponentielle e^{-y} , remplacer y par $\log\left(\frac{1}{x}\right)$. Mais ce procédé n'est pas exempt de difficulté, car on sait qu'il n'est pas permis en général d'employer des substitutions différentes dans deux parties d'une intégrale, lorsque ces parties sont séparément infinies. Pour se convaincre que dans le cas actuel le résultat auquel on arrive en opérant comme on vient de le dire, est néanmoins exact, on remarquera que, puisque la fonction sous le signe somme dans l'intégrale (10.) ne devient pas infinie pour $y = 0$, la différence entre cette intégrale et l'expression

$$14. \int_{\epsilon}^{\infty} \left(e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a} \right) \frac{dy}{y},$$

deviendra moindre que toute quantité assignable, lorsqu'on fait décroître indéfiniment le nombre positif ϵ . En effectuant dans l'intégrale (14.) les deux substitutions indiquées, elle prendra cette forme

$$\int_0^{\epsilon^{-\frac{1}{1+\epsilon}}} \frac{dx}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} - \int_0^{\frac{1}{1+\epsilon}} \frac{x^{a-1} dx}{1-x},$$

ou, ce qui est la même chose en ajoutant et en retranchant en même

temps l'intégrale $\int_{\epsilon^{-\epsilon}}^{\frac{1}{1+\epsilon}} \frac{dx}{\log\left(\frac{1}{x}\right)},$

$$15. \int_0^{\frac{1}{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{x^{a-1}}{1-x} \right) dx - \int_{\epsilon^{-\epsilon}}^{\frac{1}{1+\epsilon}} \frac{dx}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

La fonction sous le signe somme dans la dernière de ces deux intégrales qui est du genre de celles que Mr. Cauchy appelle singulières, croissant lorsque x passe de la limite inférieure à la limite supérieure, cette intégrale est évidemment moindre que la quantité

$$\left(\frac{1}{1+\epsilon} - e^{-\epsilon} \right) \frac{1}{\log(1+\epsilon)},$$

qui devient infiniment petite en même temps que ϵ . Il suit de là et de ce qui précède, que la première des intégrales (15.) finira par différer de l'intégrale (10.) d'une quantité moindre que toute grandeur assignable.

D'un autre côté, comme la fonction $\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{x^{a-1}}{1-x}$ a une valeur finie

pour $x=1$, cette même intégrale (15.) converge aussi pour des valeurs décroissantes de ε vers la limite

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{x^{a-1}}{1-x} \right) dx,$$

qui doit par conséquent coïncider avec l'intégrale (10.); ce qui montre l'accord des équations (10.) et (13.).

Je ferai remarquer encore que l'équation (3.), après y avoir remplacé $\left(\frac{b}{a}\right)$ par l'intégrale (1.), étant différenciée logarithmiquement par rapport à b , donne d'abord

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} \log(x) dx = \left(\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma'(a+b)}{\Gamma(a+b)} \right) \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx,$$

et par suite, en ayant égard à l'équation (11.),

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} \log\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 x^{b-1} \frac{(1-x^a)}{1-x} dx \cdot \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx,$$

théorème connu qu'*Euler* a déduit de la considération d'un produit composé d'un nombre infini de facteurs.

En terminant je démontrerai une équation qui comprend la formule (3.). L'équation (7.) donne, en y mettant $c+z$ à la place de s ,

$$\int_0^\infty e^{-(c+z)y} y^{a-1} dy = \frac{\Gamma(a)}{(c+z)^a}.$$

Multipliant celle-ci par $e^{-kz} z^{b-1} dz$, b et k désignant ainsi que a et c des constantes positives, et intégrant depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, il vient

$$\int_0^\infty e^{-cy} y^{a-1} dy \int_0^\infty e^{-(k+y)z} z^{b-1} dz = \Gamma(a) \int_0^\infty \frac{e^{-kz} z^{b-1}}{(c+z)^a} dz,$$

équation qui prend cette autre forme, si l'on y met pour l'intégrale relative à z dans le premier membre sa valeur donnée par la formule (7.),

$$\Gamma(b) \int_0^\infty \frac{e^{-cy} y^{a-1}}{(k+y)^b} dy = \Gamma(a) \int_0^\infty \frac{e^{-kz} z^{b-1}}{(c+z)^a} dz.$$

Cette relation entre deux transcendentes de même forme rentre dans l'équation (3.) lorsqu'on fait $c=0$, $k=1$. Il faut dans ce cas pour que les deux membres ne deviennent pas infinis, supposer $b>a$; mettant donc $a+b$ à la place de b , on aura précisément l'équation (3.).