Die Vergleichung derjenigen Erscheinungen, welche dünne Metallschichten im reflectirten und durchgegangenen Licht zeigen, mit der Theorie, bleibt einer späteren Mittheilung vorbehalten.

Göttingen, im April 1884.

V. *Einfache Ableitung der Schallgeschwindigkeit; von J. J. Weyrauch.*

Es handelt sich um die Schallgeschwindigkeit in flüssigen und isotropen festen Körpern mit Rücksicht auf Temperaturänderungen. Wir setzen voraus, dass die betrachteten Longitudinalschwingungen lediglich von Spannungen normal zu den Wellenflächen herrühren, wählen ein rechtwinkliges Coordinatensystem in fester Lage gegen die Gruppierung der Körperpunkte im anfänglichen ungestörten Zustande, fassen die Spannungen und Verrückungen als Functionen des anfänglichen Ortes ihrer Flächenelemente und Punkte auf und haben dann nach den allgemeinen Bewegungsgleichungen für Körperelemente bei $m(x, y, z)$ zur Zeit t für beliebige Bewegung:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - X \right).$$

Legt man die x -Axe in die Fortpflanzungsrichtung oder senkrecht der augenblicklichen Wellenfläche durch m , so folgt nach unserer Voraussetzung mit der Bezeichnung $X_x = -p$ für Schwingungen um die den äusseren Kräften (soweit sie nicht infolge der Schwingungen entstehen) entsprechenden Gleichgewichtslagen:

$$(1) \quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

worin μ die anfängliche specifische Masse und ξ die augenblickliche Elongation eines Theilchens bei m bedeutet.

Beim Punkte der anfänglichen Lage $x+dx, y, z$ herrscht zur Zeit $t+dt$ der specifische Druck normal der Wellenfläche und die Elongation:

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial t} dt, \quad \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial t} dt.$$

Wählen wir speciell $dx = c dt$, unter c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen verstanden, so herrscht zur Zeit $t + dt$ bei $x + dx$ derselbe Zustand wie zur Zeit t bei x , es entstehen:

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} c dt + \frac{\partial p}{\partial t} dt = p, \quad \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} c dt + \frac{\partial \xi}{\partial t} dt = \xi,$$

oder auch:

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -c \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

und damit aus (1):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mu c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x},$$

wofür wir mit Rücksicht auf den bekannten Ausdruck für die Dilatation:

$$\omega = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

wegen $\eta = \zeta = 0$ schreiben können:

$$(3) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu c^2 \frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

Bezeichnet man durch v das spezifische Volumen und setzt das Verhältniss gleichzeitiger Aenderungen von p und ω :

$$(4) \quad \frac{\partial p}{\partial t} : \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial \omega} = \frac{\partial p}{\partial v} v,$$

so liefert (3) die Schallgeschwindigkeit:

$$(5) \quad c = \sqrt{-g v^2 \frac{\partial p}{\partial v}}.$$

Bei der raschen Aufeinanderfolge der Schwingungen kann während einer derselben für das schwingende Theilchen weder Wärmezufuhr noch Wärmeentziehung von aussen in Betracht kommen, der Quotient in (5) entspricht also einer adiabatischen Zustandsänderung. Zu beachten ist, dass Gleichung (5) den Druck p nicht wie bei Flüssigkeiten nach allen Richtungen gleich gross voraussetzt.

Für Gase hat man bekanntlich allgemein:

$$pv = RT$$

und speciell bei adiabatischen Zustandsänderungen:

$$pv^k = \text{Const.} \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -k \frac{p}{v}.$$

Es folgt damit aus (5) die bekannte Formel:

$$(6) \quad c = \sqrt{k g p v} = \sqrt{k g R T}.$$

Ebenso lässt sich (5) für Dämpfe und tropfbare Flüssigkeiten specialisiren.¹⁾

Bei Ableitung der Gleichung (5) wurde angenommen, dass die Schwingungen lediglich durch Spannungen senkrecht den Wellenflächen bedingt seien, oder umgekehrt, dass jene Kräfte nur Bewegungen der Körperpunkte senkrecht den Wellenflächen erzeugen. Für feste Körper trifft dies nicht zu, hier ruft eine Kraft in bestimmter Richtung auch Bewegungen der Körperpunkte senkrecht zur letzteren hervor. Soll jedoch Formel (5) auf feste Körper angewandt werden, so müssen wir die ihr zu Grunde liegende Anschauung beibehalten und consequenterweise annehmen, dass die Dilation eines zwischen zwei unendlich benachbarten Wellenflächen liegenden prismatischen Körperelementes lediglich von einer Aenderung λ seiner anfänglichen Länge l herrührt, sodass:

$$\omega = \frac{dv}{v} = \frac{d\lambda}{l}, \quad \frac{\delta p}{\delta v} = \frac{\delta p}{\delta \lambda} \frac{l}{v}$$

und wegen $gv = 1 : \mu$ aus (5):

$$(7) \quad c = \sqrt{-\frac{l}{\mu} \frac{\delta p}{\delta \lambda}}.$$

Nun gibt die mechanische Wärmetheorie für adiabatische Zustandsänderungen eines nur in der Längsrichtung gezogenen oder gedrückten Stabes:

$$\frac{\delta p}{\delta \lambda} = -k \frac{E}{l},$$

wenn E den Elasticitätsmodul und $k = c_p : c_l$ das Verhältniss der specifischen Wärmen bei constantem p und constantem l bedeuten. Es folgt damit aus (7):

$$(8) \quad c = \sqrt{\frac{k}{\mu} E}$$

und für $k = 1$ die gewöhnliche Formel. Eine genauere Ableitung ergab:

$$c = \sqrt{\frac{6k}{5\mu} E},$$

worin jedoch $k = c_p : c_v$ das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem p und constantem v bezeichnet.²⁾

1) Weyrauch, Theorie elast. Körper. Leipzig, Teubner 1884. § 96.

2) Siehe Beibl. 8. p. 411. 1884.