SULLA VELOCITÀ DI GRUPPO

IN UN MEZZO DISPERSIVO.

NOTA DEL PROF. MAX ABRAHAM ¹⁾.

Sia ω la velocità di un'onda periodica di lunghezza λ ; allora per la cosiddetta velocità di gruppo vale l'espressione analitica ²⁾:

$$(1) \quad v = \omega - \lambda \frac{d\omega}{d\lambda}.$$

Essa prende una forma più opportuna, introducendo, invece della lunghezza d'onda λ , la frequenza di vibrazione:

$$(1a) \quad v = \frac{2\pi\omega}{\lambda}$$

come variabile indipendente. Scrivendo la (1):

$$v = -\lambda^2 \frac{d\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)}{d\lambda} = -\frac{d\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}.$$

ossia

$$\frac{1}{v} = \frac{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)} = \frac{d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{2\pi\omega}{\lambda}\right)}.$$

¹⁾ *Rend. del R. Ist. Lomb. di scien. e lett.*, Ser. II, vol. XLIV, 1911.

²⁾ H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge 1906, art. 234, p. 361.

e tenendo conto della (1a), si ottiene :

$$(2) \quad \frac{1}{v} = \frac{d\left(\frac{v}{\omega}\right)}{d v} = \frac{1}{\omega} + v \frac{d\left(\frac{1}{\omega}\right)}{d v}.$$

Questa equazione collega i valori reciproci delle velocità di onda (ω) e di gruppo (v); essi sono differenti ogni volta, quando la prima dipende dalla frequenza.

Questo accade per le onde del mare. Ora per esse — e precisamente per il caso speciale di un mare di profondità infinita — il O. Reynolds ¹⁾ ha enunciato il teorema seguente: La velocità di gruppo è eguale al rapporto dei valori medi della corrente d'energia e dell'energia riferita all'unità di lunghezza. Questa teorema interessante attribuisce alla velocità di gruppo, oltre il significato cinematico, una importanza energetica. Fu osservato da Rayleigh, che il teorema di Reynolds non è limitato al caso di profondità infinita; anzi il Rayleigh ne ha dato una dimostrazione generale ²⁾; però questa dimostrazione ricorre ad uno smorzamento ausiliare, mentre che il detto teorema vale appunto per smorzamento nullo; perciò il Rayleigh stesso se ne mostrò poco soddisfatto.

Nel seguito proveremo il teorema di Reynolds per onde elettromagnetiche piane propagantisi in un mezzo dispersivo. Evidentemente questo problema è più semplice che quello idrodinamico; perchè tutti i punti di un piano d'onda si trovano in ogni istante nello stesso stato, e perchè l'energia si propaga sempre normalmente al piano d'onda. Il teorema, che dimostreremo, collega la velocità di gruppo colle densità medie dell'energia e della corrente d'energia, e permette di interpretarla come velocità media di propagazione della radiazione in un mezzo dispersivo.

Consideriamo un mezzo omogeneo, isotropo, nel quale le onde si propaghino nella direzione delle x . Le forze elettrica

¹⁾ O. Reynolds. *Scientific Papers*. I, p. 198.

²⁾ Lord Rayleigh. *Papers*. I, p. 322.

(E) e magnetica (H), giacenti nel piano d'onda, siano rispettivamente parallele agli assi delle y e delle z ; essendo indi-

pendenti dalle y e x esse dipendano da x e t nel modo indicato dal fattore trigonometrico

$$\cos \left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma \right).$$

I vettori « spostamento elettrico » D, e « induzione magnetica » B, pure paralleli agli assi delle y e delle z , sono collegati coi vettori H ed E mediante le equazioni fondamentali di Maxwell, che danno

$$(3) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{\partial E}{\partial x}$$

(adoperiamo unità razionali, indicando con c la velocità della luce nel vuoto). Queste equazioni differenziali vengono risolte, attribuendo ai vettori D e B il suddetto fattore trigonometrico, e ponendo :

$$(4) \quad \omega \cdot D = c \cdot H, \quad \omega \cdot B = c \cdot E.$$

Dalle (4) segue :

$$c \cdot E H = \omega \cdot E D = \omega \cdot H B$$

e quindi, ponendo :

$$(5) \quad \varphi = \frac{1}{2} E D + \frac{1}{2} H B,$$

$$(6) \quad S = c \cdot E H,$$

si ottiene :

$$(7) \quad S = \omega \cdot \varphi.$$

Per giungere a queste relazioni, non occorre conoscere i rapporti tra le ampiezze dei vettori E e D , H e B . Nel caso comune, nel quale questi rapporti non dipendono dalla frequenza — cioè nel caso di un mezzo non dispersivo — la φ indica l'energia, contenuta nell'unità di volume, e la S è nient'altro che la corrente di energia, che attraversa nell'unità di tempo l'unità di superficie. Allora la (7) ci dice, che l'energia si propaga colla velocità di onda (ω), la quale in questo caso è eguale alla velocità di gruppo (v).

Passiamo al caso generale, dove le ampiezze di D ed E , B ed H stanno in rapporti dipendenti dalla frequenza. In questo caso pure la corrente di energia S viene definita dalla (6), mentre che la φ dell'equazione (5) perde il significato di densità dell'energia. Infatti dalle (3) segue l'equazione

$$(8) \quad E \frac{\partial D}{\partial t} + H \frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (c \cdot E H)$$

che formula la legge della conservazione dell'energia; interpretandone il secondo membro come energia, introdotta nell'unità di volume dalla corrente di energia parallela all'asse delle x , questa corrente S deve essere definita appunto dalla (6). Questa energia introdotta — essendo escluso assorbimento — dà luogo ad un incremento della densità di energia (ψ):

$$(9) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial S}{\partial x}.$$

Affinchè la (8) prenda questa forma, la espressione della densità di energia (ψ) deve soddisfare alla condizione:

$$(10) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \frac{\partial D}{\partial t} + H \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Come vedremo, nel caso di un mezzo dispersivo la ψ differisce dalla φ , definita dalla (5); perciò la (7) non formula più la legge di propagazione dell'energia; è nostro scopo appunto di trovare la relazione, che in sua vece esprime la legge di propagazione dell'energia radiante.

Ammettiamo, per ottenere una dipendenza della propagazione della frequenza, che D , lo spostamento elettrico, dipenda non solamente dal valore istantaneo della forza elettrica E , ma inoltre delle derivate pari di E rispetto al tempo :

$$D = \alpha_0 E + \alpha_2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \dots + \alpha_{2s} \frac{\partial^{2s} E}{\partial t^{2s}} + \dots$$

ossia

$$(11) \quad D = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{2s} \frac{\partial^{2s} E}{\partial t^{2s}} .$$

Abbiamo escluso le derivate impari, le quali darebbero luogo ad un assorbimento. Analogamente poniamo :

$$(12) \quad B = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_{2s} \frac{\partial^{2s} H}{\partial t^{2s}} .$$

Le (11) e (12) rappresentano una posizione assai generale, la quale corrisponde ad una propagazione senza assorbimento, e indipendente dall'ampiezza.

Per vibrazioni della frequenza ν la (11) dà

$$(13) \quad D = \epsilon \cdot E ,$$

dove ϵ , costante dielettrica, è la funzione seguente della frequenza ν :

$$(13a) \quad \epsilon = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_{2s} (-1)^s \nu^{2s} .$$

Analogamente la (12) dà

$$(14) \quad B = \mu \cdot H ,$$

μ , permeabilità magnetica, essendo rappresentata da

$$(14a) \quad \mu = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_{2s} (-1)^s \nu^{2s} .$$

Ammettiamo che, per i valori di ν considerati, le serie (13a), (14a) convergano, e che siano derivabili almeno una volta. Dalla (4) segue

$$(15) \quad \frac{c}{\omega} = \sqrt{\frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}}{\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}}} = \sqrt{\varepsilon \cdot \mu},$$

equazione che, insieme colle (13a, 14a), indica la velocità d'onda ω , — e più precisamente l'indice di refrazione c/ω — come funzione della frequenza ν ; la (15) quindi è la formola di dispersione ⁴⁾.

Ora, fondandoci sulla (10), ci proponiamo di trovare l'espressione della densità dell'energia elettromagnetica.

Dividiamola in due parti, elettrica e magnetica:

$$(16) \quad \psi = \psi^e + \psi^m,$$

dove

$$(16a) \quad \frac{\partial \psi^e}{\partial t} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

e

$$(16b) \quad \frac{\partial \psi^m}{\partial t} = \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

determinano le densità di energia elettrica e magnetica, salvo costanti d'integrazione. Scriviamo inoltre la (5):

$$(17) \quad \varphi = \varphi^e + \varphi^m,$$

$$(17a) \quad \varphi^e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D},$$

$$(17b) \quad \varphi^m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B}.$$

Allora le (16a, b) prendono la forma:

$$(18) \quad \frac{\partial \psi^e}{\partial t} = \frac{\partial \varphi^e}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right),$$

⁴⁾ Le posizioni suddette valgono per il caso della dispersione normale. Per la dispersione non normale, esse non sono ammissibili per tutte le frequenze. Questo caso fu considerato dal M. Laue. *Ann. der Physik*, 18 (1905), p. 523; basandosi sulla teoria di dispersione di Planck, egli confermò il teorema di Reynolds; inoltre questo lavoro contiene uno studio dettagliato della propagazione dell'energia radiante in un mezzo dispersivo dal punto di vista termodinamico.

$$(19) \quad \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(H \frac{\partial B}{\partial t} - B \frac{\partial H}{\partial t} \right).$$

Dalla (11) si ottiene

$$(20) \quad \frac{1}{2} \left(E \frac{\partial D}{\partial t} - D \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{2s} P_{2s},$$

con

$$(20a) \quad P_{2s} = \frac{1}{2} \left(E \frac{\partial^{2s+1} E}{\partial t^{2s+1}} - \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial^{2s} E}{\partial t^{2s}} \right),$$

espressione, che può scriversi come derivata rispetto al tempo

$$(21) \quad P_{2s} = \frac{\partial p_{2s}}{\partial t}$$

di

$$(21a) \quad p_{2s} = \frac{1}{2} E \frac{\partial^{2s} E}{\partial t^{2s}} + \sum_{\sigma=1}^{s-1} (-1)^{\sigma} \frac{\partial^{\sigma} E}{\partial t^{\sigma}} \frac{\partial^{2s-\sigma} E}{\partial t^{2s-\sigma}} + \\ + \frac{1}{2} (-1)^s \left(\frac{\partial^s E}{\partial t^s} \right)^2.$$

Fondandoci sulle (18), (20) e (21) e determinando la costante di integrazione in modo che ψ_e scompaia collo scomparire di E e delle sue derivate, otteniamo:

$$(22) \quad \varphi_e = \varphi_e + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{2s} p_{2s},$$

come espressione della *densità dell'energia elettrica*.

Ad essa corrisponde l'espressione della *densità dell'energia magnetica*, da ricavarsi dalle (12) e (13)

$$(23) \quad \psi_m = \varphi_m + \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{2s} q_{2s},$$

con

$$(23a) \quad q_{2s} = \frac{1}{2} H \frac{\partial^{2s} H}{\partial t^{2s}} + \sum_{\sigma=1}^{s-1} (-1)^{\sigma} \frac{\partial^{\sigma} H}{\partial t^{\sigma}} \frac{\partial^{2s-\sigma} H}{\partial t^{2s-\sigma}} + \\ + \frac{1}{2} (-1)^s \left(\frac{\partial^s H}{\partial t^s} \right)^2.$$

Poi, dalle (16) e (17) otteniamo, sommando le (22) e (23),
la *densità totale dell'energia elettromagnetica* :

$$(24) \quad \psi = \varphi + \sum_{s=1}^{\infty} (\alpha_{2s} p_{2s} + \beta_{2s} q_{2s}) .$$

Ritorniamo al caso di vibrazioni armoniche, ponendo

$$(25) \quad E = a \cos \left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma \right) .$$

troviamo

$$(25a) \quad \frac{\partial^{2s} E}{\partial t^{2s}} = (-1)^s \nu^{2s} \cdot E ,$$

$$(25b) \quad \frac{\partial^{2s-\sigma} E}{\partial t^{2s-\sigma}} = \frac{\partial^{2(s-\sigma)} E}{\partial t^{2(s-\sigma)}} \left(\frac{\partial^{\sigma} E}{\partial t^{\sigma}} \right) = (-1)^{s-\sigma} \nu^{2(s-\sigma)} \frac{\partial^{\sigma} E}{\partial t^{\sigma}} .$$

Quindi la (21a) diventa

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} p^{2s} = & \frac{1}{2} (-1)^s \nu^{2s} E^2 + \sum_{\sigma=1}^{s-1} (-1)^s \nu^{2(s-\sigma)} \left(\frac{\partial^{\sigma} E}{\partial t^{\sigma}} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} (-1)^s \left(\frac{\partial^s E}{\partial t^s} \right)^2 . \end{aligned} \right.$$

Consideriamo ora i valori medi per il tempo di una vibrazione completa, che indicheremo con striscie sovrapposte. Abbiamo :

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2} a^2 , \left(\frac{\partial^{\sigma} E}{\partial t^{\sigma}} \right)^2 = \frac{1}{2} a^2 \nu^{2\sigma} .$$

Perciò la (26) dà, come valore medio di p_{2s}

$$\overline{p^{2s}} = \frac{1}{2} a^2 \left\{ \frac{1}{2} (-1)^s \nu^{2s} + \sum_{\sigma=1}^{s-1} (-1)^s \nu^{2s} + \frac{1}{2} (-1)^s \nu^{2s} \right\}$$

ossia

$$(26a) \quad \overline{p_{2s}} = \frac{1}{2} a^2 \cdot (-1)^s s \nu^{2s} .$$

Ora dalla (22) otteniamo il valore medio di ψ_e .

$$(27) \quad \overline{\psi_e} = \overline{\varphi_e} + \frac{1}{2} a^2 \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s} (-1)^s s v^{2s}.$$

dove, tenendo conto delle (17a), (13), (13a), vale

$$(27a) \quad \overline{\varphi_e} = \frac{1}{2} \epsilon \cdot \overline{E^2} = \frac{1}{4} \epsilon a^2,$$

con

$$\epsilon = \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s} (-1)^s v^{2s}.$$

Deriviamo questa ultima formola rispetto a v :

$$\frac{d\epsilon}{dv} = 2 \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s} (-1)^s s v^{2s-1},$$

quindi

$$(27b) \quad \frac{v}{2} \frac{d\epsilon}{dv} = \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s}^2 (-1)^s s v^{2s}.$$

Introducendo le (27a, b) nella (27), questa diventa

$$(28) \quad \overline{\psi_e} = \frac{1}{4} a^2 \left(\epsilon + v \frac{d\epsilon}{dv} \right) = \frac{1}{4} a^2 \frac{d(v\epsilon)}{dv}.$$

Questa relazione determina, per vibrazioni armoniche della frequenza v , la densità media $\overline{\psi_e}$ dell'energia elettrica in un mezzo, la cui costante dielettrica ϵ dipende dalla frequenza; per trovare $\overline{\psi_e}$ basta conoscere l'ampiezza a della forza elettrica, ed i valori di ϵ e della sua prima derivata, per la data frequenza.

Analogamente, ponendo

$$(29) \quad H = b \cos \left(v t - \frac{v x}{\omega} + \gamma \right)$$

e passando a valori medi, si ricava

$$(29a) \quad \overline{\psi_m} = \frac{1}{4} b^2 \left(\mu + \nu \frac{d\mu}{d\nu} \right) = \frac{1}{4} b^2 \frac{d(\nu \mu)}{d\nu}$$

come *densità media dell'energia magnetica*.

Poi, sommando, troviamo il valore medio della *densità totale dell'energia elettromagnetica*:

$$(30) \quad \overline{\psi} = \frac{1}{4} a^2 \left(\varepsilon + \nu \frac{d\varepsilon}{d\nu} \right) + \frac{1}{4} b^2 \left(\mu + \nu \frac{d\mu}{d\nu} \right),$$

che vale per un' *onda periodica di frequenza ν nel mezzo dispersivo*.

Ora, per tale onda, le ampiezze a e b delle forze elettrica e magnetica non sono indipendenti.

Abbiamo posto (25 e 29):

$$E = a \cos \left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma \right), \quad H = b \cos \left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma \right)$$

inoltre le (13) e (14) danno

$$D = \varepsilon a \cos \left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma \right), \quad B = \mu b \cos \left(\nu t - \frac{\nu x}{\omega} + \gamma \right).$$

Quindi dalla (4) risulta

$$(31) \quad \frac{c}{\omega} = \frac{\varepsilon a}{b} = \frac{\mu b}{a},$$

vale a dire

$$\varepsilon a^2 = \mu b^2$$

ossia

$$(31a) \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

e questa formola collega le ampiezze delle forze elettrica e magnetica.

Dalla (31) si ritrova inoltre la formola di dispersione (15):

$$(31b) \quad \frac{c}{\omega} = \sqrt{\varepsilon \cdot \mu}.$$

Per giungere al teorema di Reynolds, paragoniamo colla densità media (30) dell'energia, la corrente media dell'energia; il suo valore è:

$$(32) \quad \overline{S} = c \overline{E} \overline{H} = \frac{1}{2} c . a . b .$$

Dividendo la (30) per la (32), otteniamo:

$$(33) \quad \frac{\overline{\psi}}{\overline{S}} = \frac{1}{2c} \left\{ \frac{a}{b} \left(\varepsilon + v \frac{d\varepsilon}{dv} \right) + \frac{b}{a} \left(\mu + v \frac{d\mu}{dv} \right) \right\}$$

e tenendo conto della (31 a):

$$\frac{\overline{\psi}}{\overline{S}} = \frac{1}{c} \left\{ v \overline{\varepsilon \mu} + \frac{v}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{d\varepsilon}{dv} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{d\mu}{dv} \right\}$$

ossia:

$$(33a) \quad \frac{\overline{\psi}}{\overline{S}} = \frac{1}{c} \left\{ v \overline{\varepsilon \mu} + v \frac{d}{dv} (v \overline{\varepsilon \mu}) \right\} .$$

Finalmente, introducendo la (31 b):

$$(33b) \quad \frac{\overline{\psi}}{\overline{S}} = \frac{1}{\omega} + v \frac{d \left(\frac{1}{\omega} \right)}{dv} = \frac{d \left(\frac{v}{\omega} \right)}{dv} .$$

Il secondo membro rappresenta appunto il valore reciproco della velocità di gruppo (cf. 2). Quindi si ha

$$(34) \quad \overline{S} = v . \overline{\psi} .$$

Vale a dire: *Per onde piane, propagantisi in un mezzo isotrodo, omogeneo, dispersivo senza assorbimento, la corrente media della energia è eguale al prodotto della velocità di gruppo per la densità media dell'energia.* In questo senso, in un mezzo dispersivo, la velocità di gruppo rappresenta la velocità media di propagazione dell'energia radiante. Per la

teoria della radiazione nei mezzi dispersivi la velocità di gruppo, non quella di onda, ha importanza principale.

Forse, invece di prendere le mosse dalla formola (2), stabilita con considerazioni cinematiche, sarebbe più conveniente di definire la velocità di gruppo mediante la formola (34), che esprime il teorema di Reynolds, e di dedurre da essa, paragonandola colla (33*b*), l'espressione analitica della velocità di gruppo :

$$(35) \quad \frac{1}{v} = \frac{d \left(\frac{v}{\omega} \right)}{d v} .$$

Milano, 6 Gennaio 1911.