Ora poichè la induzione non agisce punto a traverso le lamine metalliche, per quanto si vogliano sottili, così pare potersi concludere, che la induzione diminuisca un poco la temperatura dei corpi sui quali si esercita; e che il termoscopio di Rumford, per la sua grande sensibilità, sia il termo-actinometro più acconcio a mettere in evidenza questa curiosa proprietà della induzione stessa.

SULLA LEGGE DI CONNESSIONE DELLE FORME CRISTALLINE

DI UNA STESSA SOSTANZA, Q. SELLA.

(Estratto da una memoria SULLE FORME CRISTALLINE DELL'ARGENTO rosso letta alla Reale Accademia delle Scienze di Torino, li 10 febbrajo 1856).

1. La connessione delle varie forme cristalline, che può assumere una stessa sostanza, allorquando non si considerano i casi di polimorfismo, venne finqui espressa o *per mezzo degli assi*, a cui si suppone riferita ogni faccia, o *per mezzo delle zone* del sistema cristallino. È oggetto di questo estratto il dare un terzo enunciato di questa legge, ed il dedurre qualche conclusione importante per la cristallografia teorica e pratica, o da questo nuovo, ovvero dagli antichi enunciati per vie, che non si credono ancora calcate da altri.

2. La legge degli assi si può compendiare come segue: *Date tutte le forme cristalline di una sostanza supposte convenientemente orientate, se si assumono per assi le intersezioni di tre, o più faccie qualunque, due altre faccie qualsiasi del sistema cristallino taglieranno ciascuno dei suddetti assi a distanze tali dalla loro comune origine, che il loro quoziente starà in un rapporto razionale ai quozienti delle distanze analoghe misurate sovra ciascuno degli altri assi.*

Per dimostrare sperimentalmente questa legge in tutta la sua generalità, basta il ricercare, se assunti per assi le intersezioni di tre date faccie, e per parametri le distanze dall'origine a cui tali assi sono tagliati da una quarta faccia qualsiasi, ogni altra faccia del

sistema cristallino obbedisca rispetto ad essi alla sovra enunciata legge. Ciò ammesso, si può dimostrare geometricamente, che la legge sarà pur vera allorquando si assumano per assi le intersezioni di altre faccie qualsiasi, e per parametri le distanze dall'origine, a cui taglia tali assi un'altra faccia qualsivoglia.

3. Premettiamo qual fatto di osservazione, che una faccia cristallina si può ad arbitrio trasportare in un punto qualunque dello spazio, senza che ciò abbia ad influire sulla sua posizione cristallografica, purchè essa rimanga sempre parallela a se stessa.

Siano X, Y, Z , tre assi ortogonali od obliqui risultanti dall'intersezione di tre date faccie, l'equazione di una quarta faccia a loro riferita, potrà essere

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

ove a, b, c possono essere comunque irrazionali.

L'equazione di ogni altra faccia, che si suppone obbedire alla legge enunciata nell'art. 2. dovrà essere della forma

$$h\left(\frac{x}{a}\right) + k\left(\frac{y}{b}\right) + l\left(\frac{z}{c}\right) = e$$

dove h, k, l sono numeri razionali, ed e può essere comunque irrazionale.

Se nella equazione, che precede si fa

$$\frac{x}{a} = x'; \quad \frac{y}{b} = y'; \quad \frac{z}{c} = z'$$

ossia se si adotta a per unità di misura sopra l'asse delle X , b sopra l'asse delle Y , c sopra l'asse delle Z , essa diventa

$$hx' + ky' + lz' = e \quad (A)$$

Per una data faccia del sistema cristallino h, k, l sono numeri il cui rapporto è determinato e razionale; e è indeterminato, e può essere razionale, irrazionale e nullo.

Indichiamo secondo Whewell e Miller col simbolo hkl la faccia di cui è equazione la (A).

4. Siano ora hkl , $h'k'l'$ due faccie di cui è intersezione AB ; e sia tale spigolo limitato in A dalla faccia mnp , in B dalla faccia $m'n'p'$, e tagliato in M dalla faccia $m''n''p''$.

$$\text{Sarà } \frac{AM}{AB} = \frac{Om' - Oa'}{Ob' - Oa'}$$

ed i valori di Oa' , Om' , Ob' , si trarrebbero dai valori di x , che soddisfanno alle due prime equazioni, che qui si scrivono, supposte successivamente coesistenti colle tre ultime.

$$h x' + k y' + l z' = e$$

$$h' x' + k' y' + l' z' = e'$$

$$m x' + n y' + p z' = f$$

$$m' x' + n' y' + p' z' = f'$$

$$m'' x' + n'' y' + p'' z' = f''$$

Ma se senza risolvere queste equazioni si osserva, che noi possiamo trasportare parallelamente a loro stesse le faccie considerate, sicchè e , e' , f , f' , f'' , diventino razionali, ne conchiuderemo che

in tal caso $\frac{AM}{AB}$ sarà un quoziente razionale.

Sarebbe pur razionale il rapporto $\frac{AM'}{AB'}$ dei segmenti fatti dalle stesse faccie $m'n'p'$, $m''n''p''$ sovra un secondo spigolo AB' del sistema cristallino fatto passare per A. Ed *a fortiori* sarà razionale $\frac{AM}{AB} : \frac{AM'}{AB'}$; rapporto, che rimarrà razionale comunque si trasportino parallelamente a loro stesse le faccie $m'n'p'$, $m''n''p''$. Il che era appunto a dimostrarsi.

5. Si può dimostrare la stessa cosa colla sola geometria elementare, facendo uso di qualche proprietà del triangolo, che si aggruppa attorno al teorema di Ptolomeo.

Allorchè un triangolo ABC è tagliato da una secante, i segmenti, che questa fa sovra i suoi lati, sono in involuzione, ossia

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1$$

o però se i rapporti dei segmenti di due lati sono razionali, sarà anche razionale il rapporto dei segmenti del terzo lato.

Ed è egualmente agevole lo scorgere, che se per due vertici di un triangolo si conducono due rette Aa , Bb taglianti i lati opposti in segmenti, i cui rapporti

$\frac{aB}{aC}$ e $\frac{bA}{bC}$ sono razionali, saranno

pure razionali i rapporti $\frac{Oa}{OA}$, $\frac{Ob}{OB}$

delle parti, in cui le rette tirate reciprocamente si dividono.

Sia ora MNP una faccia tagliante i tre assi nei punti M , N , P , e sia $M'N'P'$ una seconda faccia passante per lo stesso punto P per cui passa la prima. Saranno

razionali i rapporti $\frac{OM'}{OM}$ e

$\frac{ON'}{ON}$ e perciò anche $\frac{MQ}{MN}$.

Se si fa passare per N una terza faccia $M''N'P''$, che taglia PQ intersezione delle due precedenti in R , sarà

anche $\frac{MQ'}{MP}$ razionale. Indi si trarrà che $\frac{PR}{PQ}$ è anche razionale.

Ora se per N si conducesse un'altra faccia tagliante PQ in R

sarebbe anche $\frac{PR'}{PQ}$ razionale, ed è quindi anche razionale $\frac{PR'}{PR}$

me era a dimostrarsi.

6. Nel disegno dei cristalli, e nella costruzione dei loro modelli, importa anche tener conto della distanza assoluta, a cui le faccie debbono tagliare gli assi. Ivi si tratta infatti non solo di costruire poliedri, i cui angoli diedri siano quelli del cristallo da rappresentarsi, ma anche di dar loro una forma, la quale si avvicini per quanto si può a quella del cristallo stesso.

Il Naumann nella sua completissima cristallografia (1) tratta tale problema con una serie di soluzioni speciali ad ogni tipo cristallino, e ad ogni forma semplice di questo. Egli ricerca le lunghezze assolute degli spigoli tagliati, e dei segmenti che sovra essi si fanno, ma la soluzione del problema va perciò ingombra da radicali spesso assai complicati, i quali sempre scompaiono a fine di calcolo. Seguendo le traccie dell' art. 4 si ha una soluzione semplicissima di un tal problema, che va scevra da ogni radicale, è comune a tutti i tipi cristallini, e si estende non solo alle forme semplici oloedriche, emiedriche, o tetartoedriche, ma ben anco a tutte le immaginabili combinazioni di faccie.

(1) NAUMANN. *Lehrbuch der Krystallographie*. Leipzig 1830.

7. Abbiansi come nell'art. 4 lo spigolo AB formato dalle due faccie hkl , $h'k'l'$, limitato in A dalla faccia mnp , in B dalla faccia $m'n'p'$ e tagliato in M da $m''n''p''$.

Ristabiliscansi le equazioni di tali piani.

$$h x' + k y' + l z' = e$$

$$h' x' + k' y' + l' z' = e'$$

$$m x' + n y' + p z' =$$

$$m' x' + n' y' + p' z' = f'$$

$$m'' x' + n'' y' + p'' z' = f''$$

Se ora si fa

$$P = kl' - k'l \quad \begin{array}{c} h \ k \ l \\ \times \\ h' \ k' \ l' \end{array}$$

$$P' = k'p - n'l \quad \begin{array}{c} h' \ k' \ l' \\ \times \\ m \ n \ p \end{array}$$

$$P'' = nl' - kp \quad \begin{array}{c} m \ n \ p \\ \times \\ h \ k \ l \end{array}$$

Se si chiamano P' , P'' , e P' , P'' , i numeri analoghi a P' e P'' che si ottengono sostituendo $m'n'p'$ e $m''n''p''$ a mnp avrannosi per ascisse dei punti A, B e M.

$$X = \frac{f \cdot P + eP' + e'P''}{m \cdot P + hP' + h'P''}$$

$$X' = \frac{f' \cdot P + eP', + e'P'',}{m' \cdot P + hP', + h'P'',}$$

$$X'' = \frac{f'' \cdot P + eP'', + e'P'',}{m'' \cdot P + hP'', + h'P'',}$$

e finalmente
$$\frac{AM}{AB} = \frac{X'' - X}{X' - X}$$

Occorre tal fiata che sia $X = X' = X''$. In tal caso si prenderà

$$\frac{AM}{AB} = \frac{Y'' - Y}{Y' - Y} = \frac{Z'' - Z}{Z' - Z}.$$

ove
$$Y = \frac{fQ + eQ' + e'Q''}{nQ + kQ' + k'Q''} \quad \text{ecc.}$$

$$Z = \frac{fR + eR' + e'R''}{pQ + lQ' + l'Q''} \quad \text{ecc.}$$

$$Q = lh' - l'h \quad \text{ecc.} \quad \begin{array}{c} h \ k \ l \ h \\ \times \\ h' \ k' \ l' \ h' \end{array}$$

$$R = hk' - h'k \quad \text{ecc.} \quad \begin{array}{c} h \ k \ l \\ \times \\ h' \ k' \ l' \end{array}$$

8. Le formole dell'articolo precedente danno una soluzione agevolissima dei seguenti problemi;

1° Fare sopra un dato disegno o modello di cristallo un taglio corrispondente ad una nuova faccia. In tal caso i numeri e, e', f, f'' sono dati dalla costruzione del modello o disegno già esistente: f'' riesce arbitrario, e si può fare per semplicità $f'' = 1$.

2° Combinare la lontananza reciproca delle varie faccie del modello, sicchè la forma ne abbia a riescire quella che si ritiene per più opportuna. In tal caso i numeri come $e, e', f, f'' \dots$ si determinano per mezzo di tante condizioni somministrate dalla figura, che il modello deve presentare. Occorre soventi che più faccie s'incontrino in un punto, che più spigoli siano equidistanti, e simili: applicando a tali casi le formole dell'art. 7 si eviteranno i ripetuti e fastidiosi tentativi, a cui si deve ricorrere nel fare modelli o disegni di cristalli assai complicati.

3° Dato il simbolo di una faccia rispetto a tre assi, trovarlo rispetto a tre o più nuovi assi nati dall'intersezione di tre o più

date faccie (1). La soluzione di questo problema può ritenersi per caso particolare di quella del primo.

9. L'enunciato della legge delle zone è il seguente. *Ogni faccia del cristallo è parallela a due o più spigoli già esistenti, o possibili nel cristallo.*

Date quattro faccie esse s'incontrano secondo sei zone, le quali in virtù della legge in discorso danno tre nuove faccie possibili. L'incontro di ciascuna di queste colle già esistenti dà luogo ad una nuova serie di faccie possibili; e così proseguendo indefinitivamente si derivano da quattro date faccie tutte le faccie possibili del sistema cristallino.

È del resto agevole lo scorgere l'identità di questa legge con quella del N. 2.

Siano hkl , $h'k'l'$ due faccie possibili del sistema cristallino, le equazioni della loro intersezione supposta passante per l'origine saranno

$$\frac{x'}{kl - k'l} = \frac{y'}{lh' - l'h} = \frac{z'}{hk' - h'k} \quad \begin{array}{ccccc} h & k & l & h & k & l \\ & \times & \times & \times & & \\ h' & k' & l' & h' & k' & l' \end{array}$$

e perciò a coefficienti tutti razionali. Se ne conchiude che le equazioni degli spigoli o zone possibili di un sistema cristallino sono a coefficienti razionali.

Siano ora

$$\frac{x'}{r} = \frac{y'}{s} = \frac{z'}{t}$$

$$\frac{x'}{r'} = \frac{y'}{t'} = \frac{z'}{t'}$$

(1) Il problema della trasformazione degli assi venne assai elegantemente trattato dal S. di Senarmont in una delle autografie delle sue lezioni alla scuola delle miniere di Parigi. *Démonstration de quelques formules d'une application fréquente dans les calculs cristallographiques* 1 Février. Ivi si considera non solo, come qui, la notazione delle faccie rispetto ai nuovi assi, ma ben anco gli angoli, che questi fanno tra loro, e le lunghezze dei parametri che sovra essi si adottano.

le equazioni di due spigoli o zone possibili qualunque, e che noi, assieme a Miller, indichiamo coi simboli $[r\ s\ t]$, $[r'\ s'\ t']$:

L'equazione del piano che loro è parallelo potrà essere

$$(st' - s't)x' + (tr' - t'r)y' + (rs' - r's)z' = 0 \quad \begin{matrix} r\ s\ t\ r\ s\ t \\ \times \times \times \\ r'\ s'\ t'\ r'\ s'\ t' \end{matrix}$$

e corrisponderà perciò ad una faccia possibile, poichè $r\ s\ t\ r'\ s'\ t'$ sono tutti numeri razionali.

10. L'importanza della legge delle zone, e la sua immensa utilità nella cristallografia pratica, è posta in chiaro da pressochè tutti i moderni cristallografi. Noteremo solo potersi dare colla più elementare geometria il nesso, che lega le faccie poste nella medesima zona.

Si facciamo passare per P tale che $OP=1$ tre faccie, a cui noi supponiamo comune la zona PQ: avrassi per esempio

$$OM = \frac{p}{m} ; ON = \frac{p}{n}$$

$$OM' = \frac{p'}{m'} ; ON' = \frac{p'}{n'}$$

$$OM'' = \frac{p''}{m''} ; ON'' = \frac{p''}{n''}$$

Le rette MN, M'N', M''N'' debbono ora tagliarsi in un punto solo.

Se ora si conducono le rette N'M e NM' sarà

$$N'MM' : N'NM' :: MQ : NQ$$

e se N''M'' taglia anche NM in Q, il rapporto degli analoghi triangoli riesce ancora lo stesso; onde

$$N'MM' : N'NM' :: N''MM'' : N''NM'',$$

ossia

$$ON'(OM' - OM) : OM'(ON - ON') :: ON''(OM'' - OM) : OM''(ON - ON'')$$

e finalmente

$$m''(n'p - n'p) + n''(pm' - p'm) + p''(mn' - m'n) = 0 \quad \begin{matrix} m & n & p & m & n & p \\ & \times & \times & \times & & \\ m' & n' & p' & m' & n' & p' \end{matrix}$$

11. Si può ancora enunciare la legge di connessione delle forme cristalline di una sostanza come segue:

Abbiassi un elissoide di cui sono diametri coniugati tre spigoli del cristallo limitati in lunghezza da una quarta faccia del medesimo, ogni faccia possibile sarà parallela al piano diametrale coniugato ad un diametro parallelo ad una zona possibile, ed inversamente ogni zona possibile sarà parallela al diametro coniugato ad un piano diametrale parallelo ad una faccia possibile.

Indi nasce, che determinato l'elissoide per mezzo delle prime quattro faccie assunte, siccome l'incontro della quarta faccia colle altre tre dà luogo a nuove zone, i piani diametrali coniugati a queste saranno faccie possibili. L'intersezione di tali nuove faccie con quelle che prima esistevano somministra nuove zone, e però nuove faccie possibili che a tali zone sono coniugate, e così di mano in mano si derivano tutte le faccie possibili del sistema cristallino.

12. Siano a, b, c le lunghezze degli assi coniugati dell'elissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ne sarà l'equazione; ed ove come nell'art. 5. si adottino a, b, c per unità di misura sovra gli assi delle X , delle Y , e delle Z , essa prenderà la forma dell'equazione della sfera

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

Le equazioni di un diametro che si termini al punto x', y', z' dell'elissoide saranno

$$\frac{Y'}{x'} = \frac{Y'}{y'} = \frac{Z'}{z'}$$

e l'equazione del piano diametrale coniugato a tale diametro, il quale sarà parallelo al piano tangente all'elissoide nel punto x', y', z' , sarà

$$x'X' + y'Y' + z'Z' = 0$$

ove X', Y', Z' sono le ordinate correnti del diametro, e del piano diametrale.

Abbiasi ora una faccia possibile hkl ; l'equazione del piano diametrale parallelo a tale faccia sarà

$$hX' + kY' + lZ' = 0,$$

e le equazioni del diametro coniugato a tale faccia saranno

$$\frac{X'}{h} = \frac{Y'}{k} = \frac{Z'}{l}.$$

Ciò vuol dire che la retta coniugata alla faccia hkl è una zona possibile, il cui simbolo è $[hkl]$.

Abbiasi invece uno spigolo o zona possibile $[mnp]$, il diametro che le è parallelo avrà per equazioni

$$\frac{X'}{m} = \frac{Y'}{n} = \frac{Z'}{p},$$

e l'equazione del primo diametrale coniugato a tale diametro sarà

$$mX' + nY' + pZ' = 0;$$

vale a dire che il piano coniugato ad una zona $[mnp]$ è una faccia possibile del cristallo, di cui è simbolo mnp .

13. Il vincolo, che avvinge una zona colla sua faccia coniugata, si mostra geometricamente colla identità del simbolo, che li esprime, e non si rende meno manifesto nella natura fisica dei cristalli. In generale si può ritenere, che allorquando una zona è importante, ed essa si manifesta allora soventi con strie parallele, la sua faccia coniugata va distinta per nitore e perfezione.

Mostrerà l'avvenire quali relazioni passino fra i vari ellissoidi, che

in un cristallo rappresentano l'andamento delle varie sue proprietà fisiche, e l'elissoide geometrico di cui ragionammo. Il Dana, il Brewster ed altri ammettono persino, che le molecole di cui i cristalli si compongono debbano tenersi per elissoidali. Noi ci limiteremo qui a dedurre alcune proprietà geometriche dei vari tipi cristallini importanti soprattutto nello studio dei geminati.

Nel tipo monometrico l'elissoide si riduce ad una sfera: dunque ogni piano perpendicolare ad una zona è faccia possibile; ed inversamente ogni retta perpendicolare ad una faccia possibile è anche zona o spigolo possibile.

Nel tipo dimetrico e romboedrico od esagonale, l'elissoide geometrico è di rivoluzione. Se si considerano le sole faccie parallele o perpendicolare all'asse di rivoluzione dell'elissoide, e le sole zone perpendicolari o parallela a tale asse, sarà ancor vero, che ogni piano perpendicolare ad una zona è faccia possibile, e che ogni retta perpendicolare ad una faccia è zona possibile. Ma le altre faccie non sono in generale perpendicolari a spigoli possibili.

Negli altri tipi cristallini l'elissoide geometrico, che ne rilega le varie forme è sempre a tre assi.

Nel tipo trimetrico uno degli assi cristallografici è semidiametro principale dell'elissoide: gli altri due assi cristallografici o si confondono coi rimanenti semidiametri principali, ovvero sono egualmente inclinati a questi, ed eguali fra loro.

Nel tipo monoclino od un solo degli assi cristallografici si confonde con uno dei semidiametri principali dell'elissoide; ovvero essendo tutti e tre gli assi cristallografici diversi dai semidiametri principali, due di essi sono eguali fra loro, ed egualmente inclinati ad uno dei semidiametri principali.

Nel tipo diclino tutti e tre gli assi cristallografici sono diversi dai semidiametri principali dell'elissoide, solo due di essi assi sono semidiametri principali dell'elisse, secondo cui taglia l'elissoide il piano, che li comprende.

Nel tipo triclinico finalmente gli assi cristallografici null'altro hanno di comune coll'elissoide geometrico, se non che ne sono semidiametri coniugati.