

Für konstante Dicke $h = \frac{J}{a^2} = \text{konst.}$ folgt für die Belastung:

$$p = 2\mu\omega^2 ah = \text{konst.}$$

3. Beispiel. Bei rotierenden Scheiben gleicher Festigkeit ($\sigma_r = \sigma_t = \sigma = \text{konst.}$) wird für die Dicke h folgende Abhängigkeit von r gefunden¹⁾:

$$h = h_0 e^{-\frac{\mu\omega^2}{2\sigma} r^2}.$$

Wenn sich diese Gestalt der Scheibe auch nicht genau nachahmen läßt, da erst für $r = \infty$ die Dicke zu null würde, so liefert sie doch einen brauchbaren Anhaltspunkt für die Abnahme der Dicke mit r , und in der Tat stimmt die Form der bei der Laval-turbine verwendeten Laufräder gut damit überein.

Wir wollen die Dicke der Kreisplatte und ihre Belastungsintensität p angeben, die der obigen Scheibe entspricht. Die Dicke H bestimmt sich aus

$$J = \frac{H^3}{12} = a^2 h = a^2 h_0 e^{-\frac{\mu\omega^2}{2\sigma} r^2}$$

oder, indem wir mit $H_0 = \sqrt[3]{12a^2 h_0}$ die Dicke in der Mitte für $r = 0$ bezeichnen:

$$H = H_0 e^{-\frac{\mu\omega^2}{6\sigma} r^2}.$$

Die Belastung folgt aus

$$p = \mu\omega^2 \frac{a}{r} \frac{d(hr^2)}{dr} = \mu\omega^2 ha \left(2 + \frac{r}{h} \frac{dh}{dr}\right), \quad \text{zu} \quad p = 2\mu\omega^2 ha - \frac{\mu^2\omega^4}{\sigma} ar^2 h.$$

Die Belastungsintensität p hat demnach in der Mitte den Wert

$$p_0 = 2\mu\omega^2 ha.$$

Am Rand $r = a$ liegt die Platte frei auf, da hier $M_r = 0$ ist, entsprechend $\sigma_r = 0$ bei der Scheibe.

Im Anschluß an diese Aufgabe liegt es nahe, nach der Platte gleicher Festigkeit, etwa bei konstanter Belastung p , zu fragen. Diese Frage läßt sich nicht einfach beantworten, dagegen läßt sich die Bedingung

$$\frac{M_r}{J} = \frac{M_t}{J} = C = \text{konst.}$$

bei gleichmäßig verteilter Belastung einfach durchführen und liefert als Gesetz für die Abnahme der Dicke H der Platte: $C(H^3 - H_0^3) = 3pr^2$.

Die obige Bedingung bedeutet einen überall gleichmäßigen Anstieg der Spannungen von der Mittelfläche aus, so daß bei dem angegebenen Dikengesetz die Kantenspannungen an der Stelle der größten Dicke H_0 am größten ist. Durch einen noch etwas stärkeren Abfall der Dicke H mit wachsendem r kann man einer überall gleichen Kantenspannung nahe kommen. Auf weitere Einzelheiten in dieser Frage einzugehen läßt sich mit dem Zweck dieses Aufsatzes nicht vereinigen. 91

Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen.²⁾

(Mit einem Anhang über den Druckverlust turbulenter Strömung beim Eintritt in ein Rohr.)

Von L. SCHILLER in Leipzig.

Gelegentlich einer experimentellen Untersuchung über den kritischen Wert der Reynoldsschen Zahl (reduzierten Geschwindigkeit)³⁾ wurde der Widerstand der Laminarströmung bei höheren Reynoldsschen Zahlen beträchtlich größer gefunden, als dem Poiseuilleschen Gesetze entspricht; die Differenz wuchs mit zunehmender Geschwindigkeit. Als Grund dieser Erscheinung ergab sich, daß innerhalb der Meßstrecke nicht durchwegs die von Poiseuille vorausgesetzte parabolische Geschwindigkeitsver-

¹⁾ Th. v. Kármán, Enzykl. d. math. Wissensch., Bd. IV, Art. 27, Nr. 11b, S. 361.

²⁾ Aus der Leipziger Habilitationsschrift des Verfassers.

³⁾ L. Schiller, Experimentelle Untersuchungen zum Turbulenzproblem. Diese Zeitschr. 1, S. 436, 1921. Hinweise auf diese Arbeit werden im folgenden durch Sch. angegeben.

teilung herrschte, sondern erst ein Uebergang von der gleichförmigen Verteilung im Einlaufquerschnitt stattfand. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie die Widerstandserhöhung mit der Beschleunigung der »Kernströmung« zusammenhängt, die von annähernd konstanter Geschwindigkeitsverteilung (\bar{u}) allmählich zu der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung des Poiseuilleschen Gesetzes führt ($u_{\max} = 2\bar{u}$). Eine Näherungstheorie liefert für drei Rohre verschiedener lichter Weite gute Uebereinstimmung zwischen gerechnetem und gemessenem Widerstand.

Die Erhöhung des Widerstandes gegenüber dem Poiseuilleschen Wert ergibt sich als eine Funktion der dimensionslosen Größe $\frac{x}{aR}$ (x = Rohrlänge, a = Halbmesser, R = Reynoldssche Zahl¹⁾) und stimmt für größere Werte von $\frac{x}{aR}$ annähernd mit der Hagenbachschen Korrektur des Poiseuilleschen Gesetzes überein. Bei kleineren Werten $\frac{x}{aR}$ weicht sie jedoch erheblich hiervon ab, was bei der Bestimmung »absoluter« Zähigkeiten mit technischen Apparaten kurzer Rohrlänge (Engler) von Bedeutung ist. Auf Grund der vorliegenden Theorie, die eine Korrektur des Poiseuilleschen Gesetzes für beliebige Rohrlängen liefert, ist die Möglichkeit vorhanden, auch mit kurzen Rohrlängen absolute Zähigkeitsmessungen auszuführen.

Messungen des Eintrittsverlustes bei turbulenter Strömung ergaben gute Uebereinstimmung mit einer von Prandtl aus einer Impulsbetrachtung abgeleiteten Gleichung.

I. Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung.

1. Messungen des Widerstandes laminarer Strömung bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Die experimentelle Grundlage der vorliegenden Untersuchung bildeten Widerstandsmessungen von Wasserströmung in gezogenen Messingrohren von 2,399, 1,5924 und 0,7996 cm l. W. Betr. Meßmethode usw. sei auf die S. 96, Fußnote 3, zitierte Arbeit des Verfassers verwiesen. Die Länge der Meßstrecke betrug 92,62 cm, der Abstand der ersten Meßstelle vom Einlauf, die »Anlauf-länge«, 104,15 cm (vergl. Sch. Abb. 3). Zur Aufrechterhaltung des laminaren Strömungscharakters auch bei höheren Reynoldsschen Zahlen war neben genügender Ruhe des Wassers im Vorrats-trog geeignete Abrundung der Einlauf-öffnung erforderlich (Sch. Abb. 2 a, b, c). Das Ergebnis der Widerstandsmessungen zeigt Abb. 1 in den logarithmisch aufgetragenen dimensionslosen Koordinaten Widerstandskoeffizient λ und Reynoldssche Zahl R . Kurve III wurde erhalten für das weite, II für das mittlere und I für das enge Rohr²⁾.

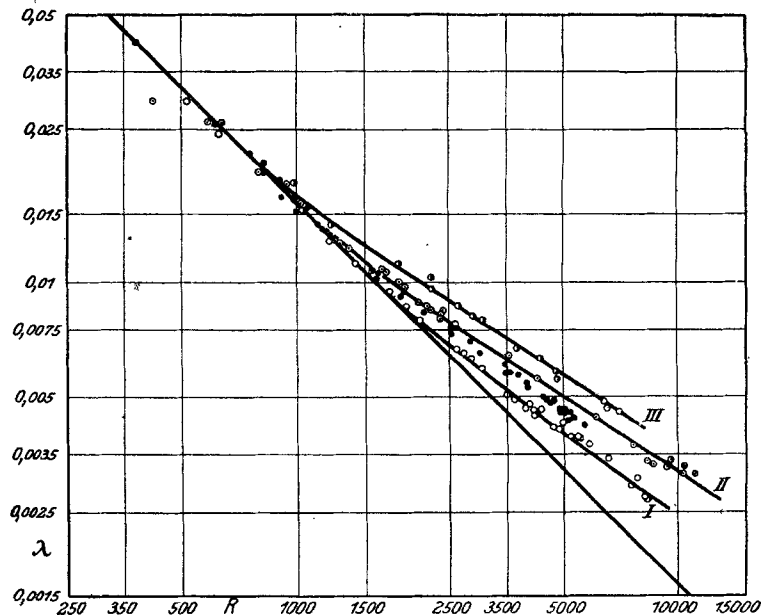


Abb. 1

Kurve III wurde erhalten für das weite, II für das mittlere und I für das enge Rohr²⁾.

¹⁾ $R = \frac{\bar{u} a \rho}{\mu} = \frac{\bar{u} a}{\nu}$ (\bar{u} = mittlere Geschwindigkeit, ρ = Dichte, μ = Zähigkeit, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ = kinematische Zähigkeit).

²⁾ Die ausgefüllten Kreise zwischen Kurve II und I stellen Messungsergebnisse mit dem engen Rohr vor, die zunächst mit nicht genügend gerade gerichtetem Rohr erhalten wurden.

Die Bedeutung von λ ergibt sich aus dem in der Hydraulik gebräuchlichen Ansatz des Widerstandsgesetzes

$$\Delta p = \lambda \gamma \frac{l}{a} \frac{\bar{v}^2}{2g} \dots \dots \dots (1),$$

wo Δp = Druckdifferenz, γ = spez. Gewicht, l = Länge der Meßstrecke, g = Schwerebeschleunigung.

Mit Einführung von λ nimmt das Poiseuillesche Gesetz die Form an:

$$\lambda_{lam} = \frac{16}{R} \dots \dots \dots (2).$$

Es wird in Abb. 1 durch die unter 45° fallende Gerade dargestellt.

Während bei den niedrigen Werten der Reynoldsschen Zahl die gemessenen Widerstände dem Poiseuilleschen Gesetz innerhalb der Versuchsgenauigkeit gehorchen, entfernen sich die experimentellen Kurven mit wachsender Reynoldsscher Zahl mehr und mehr nach oben hin von der Poiseuilleschen Geraden. Diese Abweichung tritt bei um so kleineren Reynoldsschen Zahlen ein, je weiter das Rohr ist, und ist bei bestimmter Reynoldsscher Zahl stärker für die weiteren Rohre.

2. Deutung der beobachteten Widerstandserhöhung. Die Erklärung dieser Erscheinung liefert die auch hier wieder sich als sehr fruchtbar erweisende Prandtl'sche Grenzschichtentheorie. Man kann in erster Annäherung annehmen, daß beim Eintritt in das Rohr — die Kontraktion ist durch die Abrundung weitgehend herabgesetzt — mit Ausnahme einer zunächst verschwindend geringen Schicht an der Wand gleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung über den ganzen Querschnitt herrscht. Unter dem Einfluß

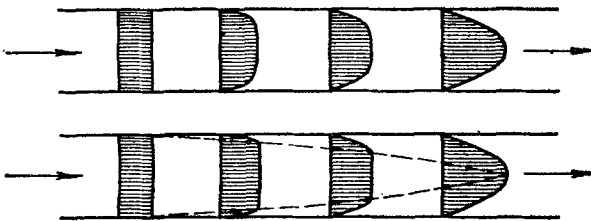


Abb. 2a und 2b

der Reibung wächst diese Schicht immer stärker an (Abb. 2a), andererseits tritt unter dem wirkenden Druck eine Beschleunigung ein. Das Resultat dieser wirkenden Kräfte ist unter stetigem Anwachsen der Grenzschicht die Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung in dem in Abb. 2a skizzierten Sinne, die schließlich asymptotisch zur parabolischen Poiseuilleschen Verteilung führt. Im Bilde der Prandtl'schen Grenzschichtentheorie kann man sagen: die endgültige Geschwindigkeitsverteilung ist dann erreicht, wenn die Grenzschicht die Mitte des Rohres erreicht hat.

3. Näherungslösung des Problems. Um das Problem quantitativ zu behandeln, machen wir gemäß einem Vorschlag von Herrn Prof. Prandtl folgende Annahme über die Geschwindigkeitsverteilung in der Anlaufstrecke. An jeder Stelle enthalte die Fläche der Geschwindigkeiten in der Mitte ein ebenes kreisförmiges Stück konstanter Geschwindigkeit, von dessen Begrenzung der Abfall nach der Geschwindigkeit Null am Rande (haften!) nach einer Parabel erfolge, deren Scheitel auf dem Umfang des ebenen Stückes liegt. Die Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung in der Anlaufstrecke gestaltet sich dann so, wie in der Abb. 2b skizziert. Zu Beginn wird der ganze Querschnitt von dem ebenen Stück entsprechend der (mittleren) Geschwindigkeit \bar{v} ausgefüllt. Unter gleichzeitigem Anwachsen der Paraboloidbegrenzung wird dieses ebene Stück immer kleiner und verschwindet schließlich mit der Vereinigung der Paraboloidstücke.

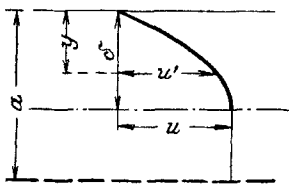


Abb. 3

Wir bezeichnen (Abb. 3) den Rohrdurchmesser mit a , die Dicke der Grenzschicht parabolischer Geschwindigkeitsverteilung mit δ , die Geschwindigkeiten in dem parabolischen Stück mit u' , die mittlere Geschwindigkeit = Eintrittsgeschwindigkeit mit \bar{u} und die Maximalgeschwindigkeit in jedem Querschnitt mit u . Wie bekannt, wächst diese schließlich bis $2\bar{u}$ in der Rohrmitte an. x sei der Abstand vom Einlauf, y senkrecht zur Rohrachse ($y = 0$ am Rande des Rohres). In den Variablen u' und y lautet die Gleichung der Schnittparabel, für die zu setzen ist: bei $y = 0$

$$u' = 0,$$

$$(\delta - y)^2 = \frac{\delta^2}{u} (u - u') \dots \dots \dots (3),$$

oder für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht

$$u' = u \left(\frac{2y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right) \dots \dots \dots (4).$$

Die Kontinuität erfordert den Ansatz, daß das Volumen des Zylinders, der die Geschwindigkeitsverteilung am Einlauf darstellt, gleich ist dem Volumen des beschriebenen jeweiligen Rotationskörpers:

$$a^2 \bar{u} = \frac{4}{3} a u \delta - \frac{5}{6} u \delta^2 + (a - \delta)^2 u \dots \dots \dots (5).$$

Dies liefert für die Dicke der Grenzschicht:

$$\delta = 2a - a \sqrt{6 \left(\frac{\bar{u} - u}{u} \right) + 4} \dots \dots \dots (6).$$

Schließlich gilt noch für die Druckkraft auf einen Zylinder, der durch zwei Ebenen senkrecht zur Achse aus der Röhre herausgeschnitten wird, wegen des nahezu reibungslosen Verhaltens der Kernströmung, die Bernoullische Gleichung:

$$P = a^2 \pi (p_0 - p) = a^2 \pi \rho \left(\frac{u^2 - \bar{u}^2}{2} \right) \dots \dots \dots (7).$$

Nach bekannten Regeln ergibt sich die Aenderung des Impulses gegenüber dem Eintrittsquerschnitt zu:

$$J = \rho \int_0^\delta u' (\bar{u} - u') (a - y) 2\pi dy + \rho \int_\delta^a u (\bar{u} - u) 2\pi (a - y) dy \dots (8)$$

oder mit Elimination von u' durch Gl. (4)

$$J = \pi \rho u \bar{u} \left(a^2 - \frac{2}{3} a \delta + \frac{1}{6} \delta^2 \right) - \pi \rho u^2 \left(a^2 - \frac{14}{15} a \delta + \frac{4}{15} \delta^2 \right) \dots (9).$$

Durch Vereinigung von (7) und (9) erhalten wir:

$$J + P = \pi \rho a^2 \left(u \bar{u} - \frac{u^2}{2} - \frac{\bar{u}^2}{2} \right) + \pi \rho a \delta \left(\frac{14}{15} u^2 - \frac{2}{3} u \bar{u} \right) + \pi \rho \delta^2 \left(\frac{1}{6} u \bar{u} - \frac{4}{15} u^2 \right) (10)$$

und unter Elimination von δ durch (6)

$$J + P = \pi \rho a^2 \left(\frac{5}{6} u^2 + \frac{1}{2} \bar{u}^2 - \frac{8}{5} u \bar{u} + \frac{2}{15} u \sqrt{6 u \bar{u} - 2 u^2} \right) \dots (11).$$

Das Gleichgewicht zwischen Impulsänderung, Druckabfall und Reibungskraft für die Begrenzung eines durch einen Schnitt senkrecht zur Achse gewonnenen Elementarzylinders liefert jetzt die Ausgangsgleichung für die Rechnung:

$$\frac{d}{dx} (J + P) = 2 a \pi \mu \left(\frac{du'}{dy} \right)_{y=0} = 4 a \pi \mu \frac{u}{\delta} = \frac{4 \pi \mu u}{2 - \sqrt{6 \frac{u}{u} - 2}} \dots (12)$$

oder mit Einsetzen von $J + P$ nach Gl. (11) und einfachen Umformungen

$$\frac{\rho a^2}{4 \mu} \left(\frac{58}{15} - \frac{22}{5} \frac{\bar{u}}{u} - \frac{7}{5} \sqrt{6 \frac{\bar{u}}{u} - 2} + \frac{8}{5} \frac{\bar{u}}{u} \sqrt{6 \frac{\bar{u}}{u} - 2} + \frac{4}{5} \frac{\bar{u}}{\sqrt{6 u \bar{u} - 2 u^2}} - \frac{8}{15} \frac{u}{\sqrt{6 u \bar{u} - 2 u^2}} \right) du = dx (13).$$

Dies vom Anfang der Röhre bis zu einer Stelle x (d. h. zwischen den Grenzen \bar{u} und u) integriert gibt:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{4} \frac{a}{\nu} \left[\frac{58}{15} (u - \bar{u}) - \frac{22}{5} \bar{u} \ln \frac{u}{\bar{u}} - \left(\frac{17}{15} + \frac{16}{5} \frac{\bar{u}}{u} \right) \sqrt{6 u \bar{u} - 2 u^2} + \frac{26}{3} \bar{u} - \frac{21}{5} \bar{u} \sqrt{2} \left(\arcsin \sqrt{\frac{u}{3 \bar{u}}} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} \right) - \frac{16}{5} \frac{\bar{u}}{\sqrt{2}} \left(\arcsin \left(\frac{4u - 6 \bar{u}}{6 \bar{u}} \right) - \arcsin \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \right] (14).$$

Setzen wir hierin die relative Geschwindigkeitszunahme (bezogen auf die Einlaufgeschwindigkeit)

$$\frac{u - \bar{u}}{\bar{u}} = \frac{u}{\bar{u}} - 1 = \eta \dots \dots \dots (15),$$

so erhalten wir

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{4} \frac{a \bar{u}}{\nu} \left[\frac{58}{15} \eta - \frac{66}{15} \ln(1 + \eta) - \frac{17}{15} \sqrt{2} \sqrt{2 + \eta - \eta^2} - \frac{48}{15} \sqrt{2} \sqrt{\frac{2 - \eta}{1 + \eta}} + \frac{130}{15} - \frac{63}{15} \sqrt{2} \arcsin \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{\eta}{3}} + \frac{63}{15} \sqrt{2} \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{48}{15} \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\frac{2}{3} \eta - \frac{1}{3} \right) - \frac{48}{15} \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{1}{3} \right] \quad (16).$$

Berücksichtigen wir, daß $\frac{a \bar{u}}{\nu}$ gleich der Reynoldsschen Zahl R ist und setzen die Klammer = $f(\eta)$, so haben wir in der Gleichung

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{4} R f(\eta) \quad (17)$$

eine übersichtliche Form der Beziehung zwischen den dimensionslosen Größen Reynoldssche Zahl, »relative Anlaufänge« (d. h. gemessen in Halbmessern) $\frac{x}{a}$ und »relative Geschwindigkeitsänderung gegenüber dem Einlauf« η , in der als einzige Unbekannte η steht.

4. Berechnung des Widerstandskoeffizienten λ . Um nun noch zu einer Beziehung für λ zu kommen, die uns einen Vergleich mit der Darstellung unserer Versuche ermöglicht, führen wir in die Bernoullische Gleichung (7) nach Gleichung (15) η ein und erhalten für die Druckdifferenz zwischen einer Stelle in der Anlaufstrecke und dem Einlauf:

$$p_0 - p = \frac{\rho}{2} \bar{u}^2 (2\eta + \eta^2) \quad (18).$$

Nehmen wir die Definitionsgleichung für λ (1):

$$\lambda = \frac{p_1 - p_2}{\rho \bar{u}^2} \frac{a}{x_2 - x_1} \quad (1a)$$

und bestimmen mit (18) die Druckdifferenz zwischen zwei beliebigen Stellen x_1 und x_2 :

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho \bar{u}^2} = (2\eta + \eta^2)_{x_2} - (2\eta + \eta^2)_{x_1} = \Delta(2\eta + \eta^2) \quad (19),$$

so erhalten wir schließlich:

$$\lambda = \Delta(2\eta + \eta^2) \frac{a}{\Delta x} \quad (20),$$

worin Δx unsere Meßstrecke bedeutet.

Zur Berechnung von η bzw. $2\eta + \eta^2$ aus den Beobachtungsdaten $\frac{x}{a}$ und R nach

Gleichung (17) wurde zunächst $\frac{x}{aR}$ nach Gleichung (16) für eine größere Zahl von η -Werten berechnet, tabuliert und in einer Kurve zur Darstellung gebracht, desgleichen wurde noch eine Kurve für $2\eta + \eta^2$ als Funktion von η gezeichnet. Durch Kombination dieser beiden Kurven wurde dann noch in Abb. (4) die Beziehung zwischen $2\eta + \eta^2$ und $\frac{x}{aR}$ zur Darstellung gebracht. Zur numerischen Berechnung von λ für gegebene Werte der Meßstellen, von Rohrhalmmesser und Reynoldsscher Zahl (Geschwindigkeit, Zähigkeit) sind jetzt nur die Werte $\frac{x_1}{aR}$ und $\frac{x_2}{aR}$ zu berechnen, aus Kurve Abb. 4 die zugehörigen Werte von $(2\eta + \eta^2)$ zu entnehmen, deren Differenz zu bestimmen und nach

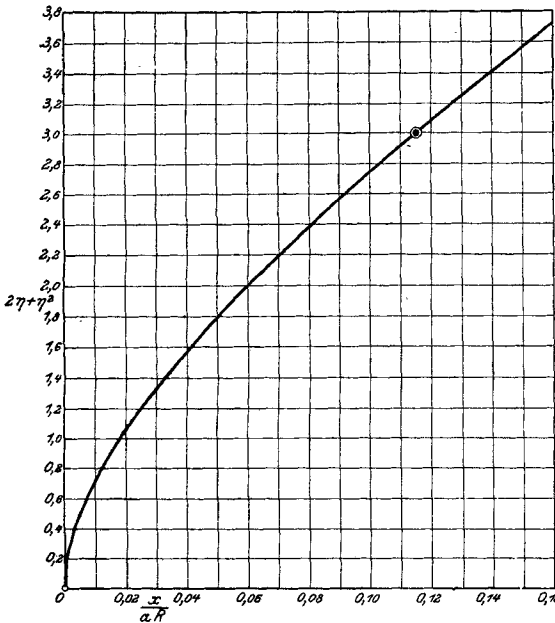


Abb. 4

Gleichung (20) mit $\frac{a}{\Delta x}$ zu multiplizieren. Für die Poiseuillesche Strömung des Kreisrohrs gilt bekanntlich $u_{max} = 2 \bar{u}$. u_{max} ist aber in unserer Darstellung der Geschwindigkeitsbetrag für das mittlere Stück konstanter Geschwindigkeit = u . Für $u = 2 \bar{u}$ ist aber $\eta = 1$ und $(2\eta + \eta^2) = 3$. Für diesen Wert von $(2\eta + \eta^2)$ ergibt sich $\frac{x}{aR} = 0,115$. In diesem Punkt (vergl. Abb. 4) müssen wir also den Beginn des Poiseuilleschen Gesetzes ansetzen. Schreiben wir dieses in der Form

$$\frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \bar{u}^2} = \frac{8 \mu \bar{u} \Delta x}{a^2} \frac{2}{\rho \bar{u}^2} = 16 \frac{\Delta x}{aR} \dots \dots \dots (21)$$

und berücksichtigen (19), so erhalten wir die Richtungsangabe für die Poiseuillesche Gerade, die man in Abb. 4 von dem markierten Punkt an eingetragen findet. Man sieht, daß die Gerade mit einem ganz leichten Knick an die Kurve ansetzt, eine natürliche Folge unserer Näherungstheorie. In Wirklichkeit wird der Uebergang asymptotisch sein.

In der angegebenen Weise würde für jedes der drei Rohre λ für eine Anzahl von R -Werten berechnet.

In den Abb. 5 bis 7 sind die berechneten Punkte für die drei Rohre durch kleine Kreise kenntlich gemacht. Wie man sieht, schmiegen sie sich der durch die beobachteten Punkte gelegten Kurve in für eine Näherungstheorie befriedigender Weise an.

Durch Reihenentwicklung von $f(\eta)$ nach Potenzen von η (bis einschließlich quadratische Glieder) ergibt sich

$$f(\eta) = \frac{3}{10} \eta^2 \dots (22)$$

und wegen (17) und (20) unter Vernachlässigung von η^2

$$\lambda = \frac{4}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \sqrt{\frac{10}{3} \frac{a}{R}} \dots (23)$$

Die hiermit für das mittlere Rohr ermittelte Asymptote unserer λ -Kurve findet sich in Abb. 6 eingezeichnet.

II. Der Anlaufverlust der Poiseuilleschen Strömung.

1. Der Anlaufverlust nach der Theorie. Ein besonderer Fall der im vorhergehenden behandelten Aufgabe ist dann gegeben, wenn die eine Meßstelle mit der Eintrittsstelle der Strömung, dem Rohranfang, zu-

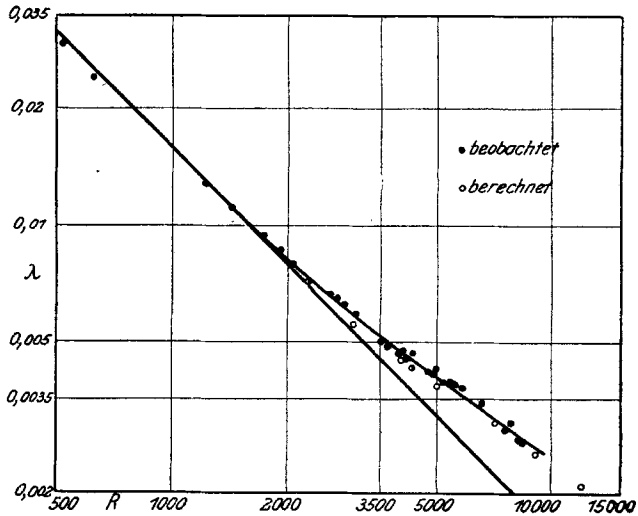


Abb. 5

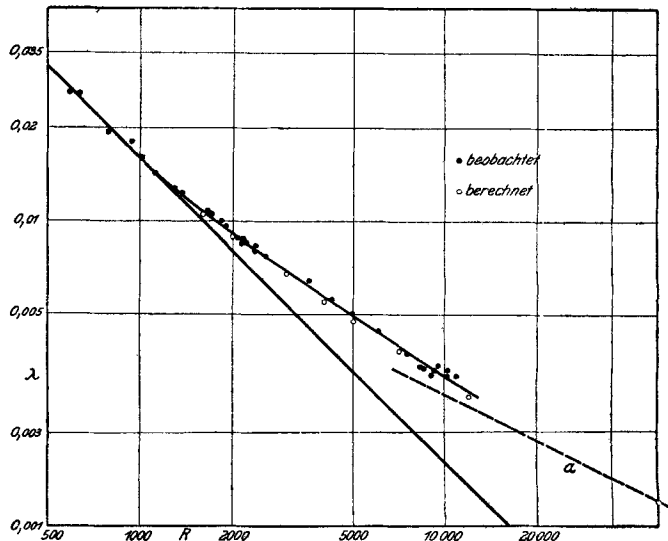


Abb. 6

sammenfällt und die andere an einem Punkt liegt, wo bereits die parabolische Verteilung hergestellt ist. In diesem Fall fragen wir also z. B. nach dem gesamten Strömungswiderstand innerhalb eines Rohres, an dessen Ende parabolische Verteilung herrscht.

Nach unserer Theorie wird diese bei einem Werte von $\frac{x}{aR} = 0,115$ und $\frac{p_0 - p_1}{\frac{\rho}{2} \bar{u}^2} = 3$ erreicht. Dementsprechend wurde die Kurve, Abb. 3, von hier ab als Gerade mit der Neigung 1 : 16 weitergeführt. Die Gleichung dieser Geraden lautet:

$$\frac{p_0 - p_1}{\frac{\rho}{2} \bar{u}^2} = 3 + 16 \left(\frac{x}{aR} - 0,115 \right) = 16 \frac{x}{aR} + 1,16 \dots \dots \dots (24).$$

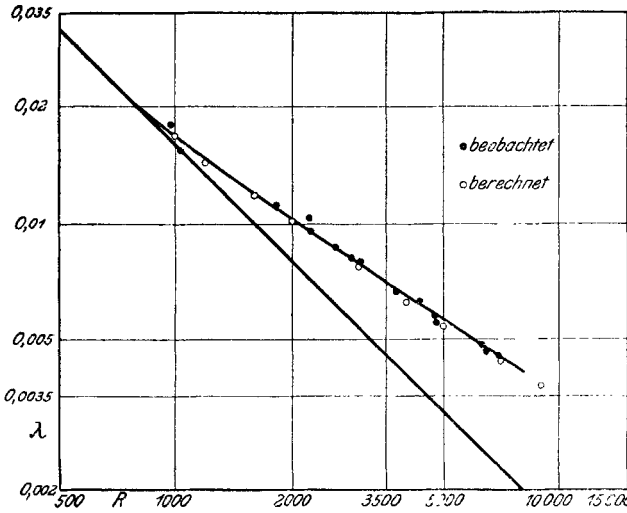


Abb. 7

Ohne das letzte Glied ist diese Gleichung identisch mit dem Poiseuilleschen Gesetz. Wir erhalten also als zusätzlichen Anlaufdruckverlust 1,16 Geschwindigkeitshöhen, zuzüglich des Eintrittsverlustes einen Gesamtzusatzverlust von 2,16 Geschwindigkeitshöhen.

2. Die Hagenbachsche „Korrektur der lebendigen Kraft“. In nächster Beziehung zu dem hier ermittelten »Anlaufverlust« steht die Hagenbachsche¹⁾ »Korrektur der lebendigen Kraft«. Hagenbach hat nämlich darauf hingewiesen, daß bei Zähigkeitsbestimmungen nach der Kapillarmethode außer der Reibungsarbeit, die dem Poiseuilleschen

Gesetz gehorcht, auch noch die Energie der ausströmenden Flüssigkeit in Rechnung zu setzen ist. Setzt man für diese parabolische Geschwindigkeitsverteilung an, so erhält man als Korrektur der Poiseuilleschen Gleichung $2\rho \frac{\bar{u}^2}{2}$ gegenüber $2,16 \rho \frac{\bar{u}^2}{2}$ nach unserer Theorie.

Grundlage der Hagenbachschen Theorie ist die Annahme, daß der gesamte Druckabfall sich zusammensetzt aus einem Glied für die Energie der Poiseuilleschen Strömung und einem für die Poiseuillesche Reibungskraft. Oder, mit anderen Worten, es wird angenommen, daß die Reibungskraft in der ganzen »Anlaufstrecke« bereits dieselbe ist wie bei der parabolischen Verteilung. Ein Anhalt dafür, daß dem so ist, ist keineswegs gegeben. Theoretisch ist von Helmholtz²⁾ vielmehr gezeigt worden, daß bei Abwesenheit von Trägheitskräften, also auch hier bei der Poiseuille-Strömung, sich die kleinstmögliche Reibungsarbeit einstellt. Eine abweichende Verteilung erfordert also mehr Reibungsarbeit, und man wird im Anlauf mit größerer Reibung zu rechnen haben. In Einklang hiermit steht, daß unsere Theorie tatsächlich einen höheren Wert für die Korrektur liefert. Da es jedoch nicht ganz ausgeschlossen ist, daß eine strenge Theorie wieder zum Hagenbachschen Wert führt, empfiehlt sich eine Prüfung durch den Versuch.

3. Messung des Druckverlustes durch Eintritt und Anlauf. Zur experimentellen Prüfung führen wir für diesen Zusatzverlust in Geschwindigkeitshöhen die Bezeichnung C ein und formen Gleichung (24) um in

$$\frac{p_0 - p_1}{\frac{\rho}{2} \bar{u}^2} = 8 + CR \frac{a}{2x} \dots \dots \dots (25).$$

1) Ed. Hagenbach, Pogg. Ann. 109, 385. 1860.

2) H. v. Helmholtz, Wiss. Abhdlg. 1, S. 224. 1882.

3) $p_0 - p_1$ enthalte zum Unterschied von $p_0 - p_1$ auch den Eintrittsverlust.

Dies ist die Gleichung einer Geraden für die dimensionslosen Koordinaten $\frac{P_0 - P_1}{x \mu \bar{u}}$

und $R \frac{a}{2x}$. Tragen wir die experimentellen Werte in dieser Weise auf, so erhalten wir die gesuchte Größe C als die Neigung der Geraden durch die Versuchspunkte. Wenn für die Zähigkeit μ der richtige Wert eingesetzt wird, so muß die Gerade für $R \frac{a}{2x} = 0$ durch den Punkt $\frac{P_0 - P_1}{x \mu \bar{u}} = 8$ gehen. Wird μ unrichtig eingesetzt, so bleibt die Kurve,

wie eine einfache Ueberlegung zeigt, doch noch eine Gerade mit derselben Neigung, ist also jedenfalls für unseren Zweck verwendbar. Zur Ermittlung des gesamten Druckverlustes (einschließlich Eintrittsverlust) in der Anlaufstrecke, d. h. von der Eintrittsstelle bis zu einem Punkt Poiseuillescher Verteilung wurde der eine Schenkel des Manometers an eine genügend weit vom Einlauf entfernte Meßstelle gelegt, der andere Schenkel an einen 25 cm über der Eintrittsstelle gelegenen Punkt des Troges (Sch., Abb. 2). Die Spiegel-differenz im Manometer gibt uns so die gesuchte Druckdifferenz unter der sicher zulässigen Voraussetzung, daß im Trog kein merklicher Druckverlust durch Reibung vorhanden ist.

Zunächst wurde mit abgerundetem Einlaufstück gearbeitet. Der Abstand der Meßstelle am Rohr vom Einlauf betrug bei drei Versuchsreihen 197,37 cm, bei einer 104,75 cm. Die Resultate wurden in Kurven in der oben besprochenen Weise niedergelegt; die der letzten Reihe sind in Abb. 8 wiedergegeben. Der

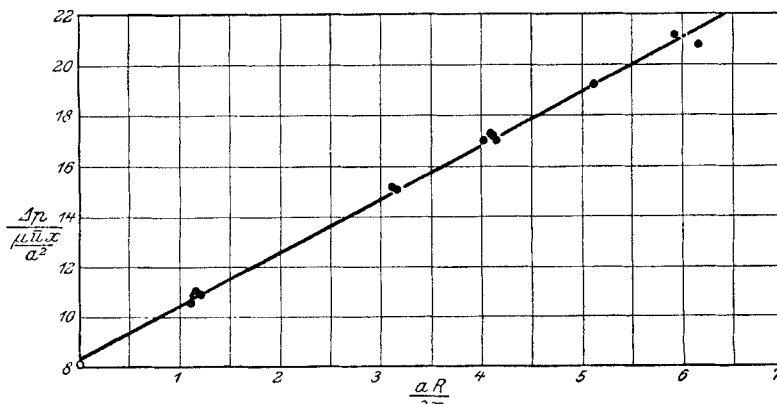


Abb. 8

Verlauf ist, wie erwartet, sehr gut geradlinig. Die Neigung, d. h. die gesuchte Konstante C , ergab sich für die einzelnen Reihen zu 2,35, 2,36, 2,45, 2,115; im Mittel $C = 2,32$. Dabei möchten wir der letzten Reihe, Abb. 8, die sich über den größten Bereich erstreckt, mit dem Wert 2,115 ein etwas größeres Gewicht beilegen, so daß die Uebereinstimmung mit dem theoretischen Wert 2,16 als gut bezeichnet werden darf. Da alle Reihen größere Werte als 2 liefern, so kann man jedenfalls annehmen, daß die Abweichung unseres näherungstheoretischen Resultats für C vom Wert 2 auch bei einer strengen Theorie erhalten bliebe.

Außerdem wurden am engen und mittleren Rohr noch gleiche Messungen mit scharf-randigem Einlaufstück ausgeführt. Es ergab sich hierbei das mit früheren Messungen über den Einfluß der Anlauflänge (Sch., Abschn. 4) übereinstimmende Resultat, daß die Verluste sich bei dem engen Rohr von den Verlusten bei Abrundung bis fast zum Eintritt der Turbulenz kaum unterschieden. Der laminare Teil der Kurve (Abb. 9) ist wieder eine Gerade mit der Neigung 2,38, in weitgehender Uebereinstimmung mit den Versuchen mit abgerundetem Einlaufstück. Man hat also anzunehmen, daß sich die Flüssigkeit selbst eine Art Abrundung am Einlauf durch einen stationären Wirbel schafft, und daß ein Abwandern von Wirbeln in merklichem Maße erst knapp vor dem Eintritt der allgemeinen Turbulenz einsetzt.

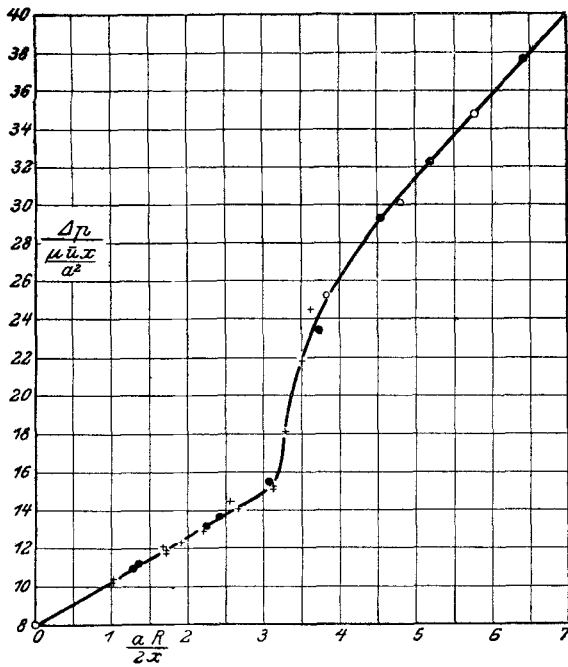


Abb. 9

Anders beim mittleren Rohr (Abb. 10): Hier zeigt zwar der laminare Kurventeil auch noch annähernd linearen Verlauf, soweit man dies bei der geringeren Genauigkeit der niedrigeren Versuchswerte beurteilen kann. Jedoch ist der Anstieg ein wesentlich stärkerer, wie man an der zum Vergleich durch die unteren Punkte gezogenen Geraden mit Neigung 2,2 sieht. Außerdem würde die verlängerte Gerade durch die Versuchspunkte die Ordinatenachse wesentlich tiefer unter dem Wert 8 schneiden, als man nach der Zuverlässigkeit des Zähigkeitswertes erwarten könnte. Man wird also wohl in Wirklichkeit eine schwach gekrümmt gegen den Wert 8 hin verlaufende Kurve anzunehmen haben. Augenscheinlich tritt also hier schon sehr früh ein Abmarsch von Wirbeln auf, der mit Druckverlust verbunden ist. Es wird sich daher bei Zähigkeitsbestimmungen empfehlen, dem Einlaufstück eine geeignete Abrundung zu erteilen.

III. Folgerungen für Zähigkeitsbestimmungen.

1. Bestimmung des Zähigkeitskoeffizienten mit beliebig kurzen Rohrstücken. Zähigkeitsmessungen werden in der Regel so ausgeführt, daß ein gemessenes Flüssigkeitsvolumen durch ein Rohr von einem höheren zu einem tieferen Niveau befördert wird. Die Berechnung erfolgt nach dem Poiseuilleschen Gesetz unter Berücksichtigung der Hagenbachschen Korrektur. Nach den Darlegungen in Abschnitt I und II gilt die letztere (bzw. 2,16 statt 2) jedoch nur für $\frac{x}{aR} > 0,115$. Dies setzt ein

verhältnismäßig enges und langes Rohr, d. h. große Ausflußzeiten voraus, was den Bedürfnissen der Technik zuwiderläuft. Dort werden vielfach auch weitere, kürzere Rohre verwendet. Sollen mit diesen einwandfreie Ergebnisse erzielt werden, so muß eine entsprechend veränderte Korrektur eingesetzt werden, wie sie die entwickelte Theorie für beliebige Rohrlängen liefert.

Als Versuchsanordnung denken wir uns etwa die einfachste Form, ein oberes und ein unteres Reservoir¹⁾, dazwischen das Rohrstück, als Druckhöhe die (mittlere) Niveaudifferenz der Flüssigkeitsoberflächen. Zu ermitteln sind Rohrlänge x und Halbmesser a , die Durchflußgeschwindigkeit \bar{u} , die Dichte ρ der Flüssigkeit und der

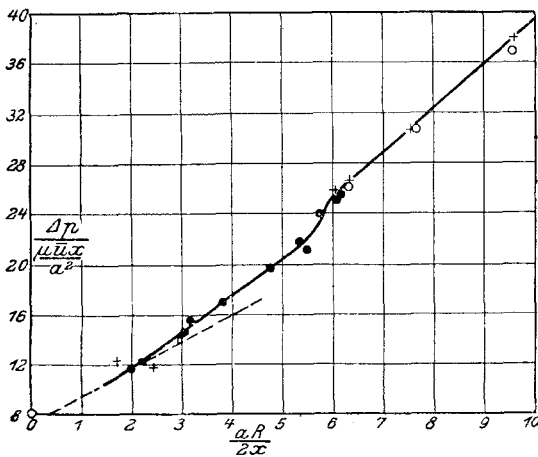


Abb. 10

¹⁾so weit, daß während der Dauer des Versuches keine wesentliche Änderung der Niveaudifferenz eintritt.

mittlere Höhenunterschied der Flüssigkeitsoberflächen. Der Druckverlust $P_0 - p_1$, den die Flüssigkeit beim Strömungsvorgang erleidet und der durch den Spiegelunterschied gegeben ist, setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: dem der Bernoullischen Gleichung gehorchenden Eintrittsverlust beim Eintritt in das Rohr und dem Verlust bei der Strömung durch das Rohr.

In unserer Gl. (19)

$$2\eta + \eta^2 = \frac{p_0 - p_1}{\frac{\rho}{2} \bar{u}^2} \dots \dots \dots (19)$$

war $p_0 - p_1$ definiert lediglich als der zweite Anteil. Hierfür erhalten wir hier nach Bernoulli

$$(p_0 - p_1) = (P_0 - p_1) - \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \dots \dots \dots (26)$$

und

$$2\eta + \eta^2 = \frac{P_0 - p_1}{\frac{\rho}{2} \bar{u}^2} - 1 \dots \dots \dots (27).$$

Zu dem so ermittelten Wert von $2\eta + \eta^2$ finden wir in Kurve Abb. 4 den zugehörigen Wert von $\frac{x}{aR} = \frac{x\mu}{a^2 \bar{u} \rho}$, woraus μ als einzige Unbekannte zu berechnen ist. Dies Verfahren ist leicht für alle möglichen Längen anzuwenden.

2. Der Englersche Zähigkeitsmesser. Weit verbreitet ist für technische Zähigkeitsmessungen der Apparat von Engler, bestehend aus einem kreiszylindrischen Gefäß von 10,6 cm Durchmesser, in dessen Bodenmitte ein 2 cm langes und 0,29 cm weites Ausflußrohr eingesetzt ist. Gemessen wird die Zeit, in der sich der Flüssigkeitsspiegel von 5,2 cm bis 2,93 cm über der Ausflußmündung senkt (entspr. einer Ausflußmenge von 200 cm³). Das Verhältnis dieser Zeitdauer für die zu bestimmende Substanz zu der für Wasser von 20° C liefert den »Englergrad«.

Zur Umwertung des »Englergrads« in »absolute Zähigkeit« besteht eine empirische Gleichung von Ubbelohde¹⁾ und eine theoretische Behandlung von v. Mises²⁾, die nicht völlig übereinstimmen³⁾. Die Berechnung von v. Mises benutzt die Hagenbachsche Korrektur, d. h. die Annahme, daß in jedem Fall die parabolische Verteilung noch innerhalb des Ausflußrohres erreicht werde. Wie eine Nachrechnung auf Grund unserer Theorie ergab⁴⁾, ist dies jedoch für Wasser von 20° C nicht der Fall. Man erhält für den Beginn der Ausströmung $\frac{x}{aR} = 0,01272$, während (s. o.!) die parabolische Verteilung erst bei $\frac{x}{aR} = 0,115$ erreicht wird. Man wird also die Anwendbarkeit der Misesschen Theorie auf den Fall beschränken müssen, daß als Vergleichsflüssigkeit statt des Wassers eine solche gewählt wird, deren höhere Zähigkeit die Erreichung der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung innerhalb des Ausflußrohres garantiert⁵⁾ und auf die Bestimmung der Zähigkeitszahl solcher Flüssigkeiten.

Will man den Englerschen Apparat ganz allgemein zur unmittelbaren Bestimmung der absoluten Zähigkeit benutzen, wozu unsere Theorie die Möglichkeit bietet, so ist zur Erfüllung der theoretischen Voraussetzungen nötig, das Einlaufstück so abzurunden, daß keine Kontraktion eintritt und im Eintrittsquerschnitt konstante Geschwindigkeit herrscht⁶⁾. Am einfachsten und genauesten wäre es, mit konstantem Spiegel zu arbeiten. Dann erfolgt die Bestimmung nach 1. Will man jedoch, wie üblich, den Spiegel von einer Marke bis zu einer zweiten senken lassen, so hat man dem Apparat eine Tafel mit Kurven gleicher Zähigkeit als Funktion von Dichte und Ausflußzeit beizugeben, die man unschwer aufstellen kann.

1) L. Ubbelohde, Tabellen zum Englerschen Viskosimeter, Leipzig 1918, S. 26.
 2) R. v. Mises, Ueber den Englerschen Flüssigkeitsmesser, Phys. Zeitschr., 12, 812, 1911.
 3) vergl. L. Gumbel, Zeitschr. f. techn. Phys. 2, 172, 1921.
 4) L. Schiller, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 248, Abachn. III, 3. 1922.
 5) Aus einem anderen Grunde empfiehlt auch v. Mises l. c. die Verwendung einer Vergleichssubstanz von höherem Zähigkeitsgrade.
 6) Auch die Anwendbarkeit der Misesschen Theorie dürfte der gleichen Forderung unterworfen sein.

Anhang.

Der Eintrittsverlust für die turbulente Strömung. Bei turbulenter Strömung braucht man wegen der geringen Grenzschichtdicke¹⁾ auf die Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt keine Rücksicht zu nehmen. Ein »Anlaufverlust« kommt also nicht in Betracht. Als Eintrittsverlust setzen wir wieder eine Geschwindigkeitshöhe. Ein weiterer Verlust ergibt sich dadurch, daß der im Eintritt kontrahierte Strahl sich ziemlich schnell auf den vollen Röhrenquerschnitt erweitert. Aus einer Impulsbetrachtung folgt hierfür ein Druckverlust von $\frac{\rho u^2}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2$, wo α der Kontraktionskoeffizient ist. Der gesamte Druckverlust im Einlauf ergibt sich also zu

$$\frac{\rho u^2}{2} \left(\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + 1 \right) = \frac{\rho u^2}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 2 \right).$$

Setzt man als Kontraktionskoeffizient 0,61, so erhält man für die Klammer den Wert 1,4 und für den Druckabfall vom Trog bis zum Ende der Meßstrecke

$$\Delta p = 1,4 \rho \frac{u^2}{2} + \rho \lambda x \frac{u^3}{2a} \dots \dots \dots (28).$$

Um mit unserer graphischen Darstellung in Uebereinstimmung zu kommen, dividieren wir diese Gleichung durch $\frac{\mu u x}{a^2}$ und erhalten so:

$$\frac{\Delta p}{\frac{\mu u x}{a^2}} = \frac{a k}{2x} \left(1,4 + \lambda \frac{x}{a} \right) \dots \dots \dots (29).$$

Auf Grund dieser Gleichung und mit Benutzung der λ -Werte nach Blasius (Sch., Gl. (4)) wurden mehrere Punkte berechnet, die in Abb. 9 und 10 als Kreise eingezeichnet sind. Ihre für hydraulische Verhältnisse sehr befriedigende Uebereinstimmung mit dem Experiment zeigt die Nützlichkeit der zugrunde liegenden Impulsbetrachtung.

111

Stationärer Bewegungszustand einer schraubenförmigen Wirbelfläche.³⁾

Von H. REISSNER in Berlin.

Die Theorie des Schraubenpropellers in einer inkompressiblen reibungslosen Flüssigkeit hat durch die Arbeiten von Joukowsky, Föttinger, Prandtl und Betz eine neue Wendung erhalten⁴⁾. Ausgehend von der von Kutta, Joukowsky, Lanchester und Prandtl begründeten Flügelflächentheorie der geradlinigen Bewegung haben die erstgenannten die Flügelflächentheorie der Schraubenbewegung auf dem durch ein schraubenförmiges Wirbelsystem bedingten Strömungszustand aufgebaut. Während aber noch Joukowsky, Prandtl und Föttinger ein System isolierter, schraubenförmiger Wirbellinien, die von den Flügelspitzen bzw. der Nabe ausgehen, gebrauchten, hat Betz die Vorstellung einer von der Hinterkante des Schraubenflügels zurückgelassenen Wirbelschicht in scharfsinniger Weise von der Tragflächentheorie auf die Propellertheorie übertragen.

Er macht bei seinen Ueberlegungen die Voraussetzung, daß die vom Propellerflügel erzeugten, sich über die Grundströmung überlagernden Zusatzgeschwindigkeiten so klein sind, daß die von der Hinterkante zurückgelassene schraubenförmige Wirbelfläche sich im Strömungsgleichgewicht erhält bzw. von der Grundströmung unverändert fortgetragen wird. Diese Voraussetzung schien mir bei dem Studium der Betzschen Arbeit

¹⁾ Vergl. hierüber z. B. Prandtl, Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung, Jena 1913, S. 20, oder v. Mises, Elemente der technischen Hydromechanik, I, Leipzig 1914, S. 67.

²⁾ Vergl. Prandtl, l. c. S. 13 und 27.

³⁾ Vortrag auf der Jenaer Versammlung, 20. September 1921.

⁴⁾ Joukowsky in einer etwa 1912 erschienenen, mtr. augenblicklich nicht zugänglichen russischen Arbeit. — H. Föttinger, Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellsch. 1918 S. 385 bis 472. — L. Prandtl, Handwörterbuch d. Naturwissensch., Jena 1913 S. 134. — A. Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust, Nachr. Gesellsch. d. Wiss., Göttingen 1919.