Notiz über die Bessel'schen Functionen erster Art.

Von Leopold Gegenbauer in Wien.

In seiner im 25. Bande der „Proceedings of the London Mathematical Society“ (p. 49–75) enthaltenen Abhandlung „On Bessels Functions and Relations connecting them with Hyper-Spherical and Spherical Harmonics“ hat Herr E. W. Hobson u. a. folgende interessante Relationen abgeleitet:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^m(r \sin \vartheta) \sin^{m+1} \vartheta d\vartheta = \frac{J^{m+\frac{1}{2}}(r)}{\sqrt{r}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{m-\frac{1}{2}}(r \sin \vartheta) \sin^{m+\frac{1}{2}} \vartheta d\vartheta = \frac{J^m(r)}{\sqrt{r}}$$

$$e^{r \cos \varphi} J^{\frac{2\nu-1}{2}}(r \sin \varphi) = \frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{\frac{2\nu-1}{2}} \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{r^{\lambda} C_{\lambda}^{\nu}(\cos \varphi)}{\Pi(\lambda+2\nu-1)}$$

$$J^{\frac{2\nu-1}{2}}(r \sin \varphi) = \sqrt{2} \frac{\Pi(2\nu-1) (r \sin \varphi)^{\frac{2\nu-1}{2}}}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right) r^{\frac{2\nu+1}{2}}}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Pi(2\lambda) \Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi(\lambda) \Pi(2\nu+2\lambda-1)} J^{\nu+2\lambda}(r) C_{2\lambda}^{\nu}(\cos \varphi)$$

und speciell für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$J^{\frac{2\nu-1}{2}}(r) = \sqrt{2} \frac{\Pi(2\nu-1)}{r \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right) \Pi(\nu-1)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\Pi(2\lambda)}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)} \left[\frac{\Pi(\lambda+\nu-1)}{\Pi(\lambda)} \right]^2 J^{\nu+2\lambda}(r)$$

in denen m eine ganze Zahl, ν ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist.

Diese Formeln gelten für jedes reelle ν , welches größer als $-\frac{1}{2}$ ist, und sind in allgemeinen Relationen enthalten, wie aus der von mir in den Jahren 1877¹⁾ und 1881²⁾ mitgetheilten, für alle (reellen und complexen) ψ giltigen Gleichung

$$(I) \quad \int_0^\pi e^{ai \cos \varphi \cos \psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}} (\alpha \sin \varphi \sin \psi) C_n^\nu (\cos \varphi) \sin^{\frac{2\nu+1}{2}} \varphi d\varphi = i^n \sqrt{\frac{2}{\alpha \pi}} \cdot \left[\frac{2^{2\nu} \Pi \left(\frac{2\nu-1}{2} \right) \Pi(\nu)}{\Pi(2\nu-1)} \right] \sin^{\frac{2\nu-1}{2}} \psi C_n^\nu (\cos \psi) J^{n+\nu}(\alpha),^3$$

auf welche ich einen Beweis des Additionstheorems der Besselschen Functionen erster Art basiert habe, folgt.

Da ich einen Beweis dieser Gleichung bisher nicht veröffentlicht habe, so will ich zunächst einen solchen angeben.

Weil die Besselschen Functionen erster Art, wie ich wiederholt hervorgehoben habe, abgesehen von einem von x unabhängigen Factor die Coefficienten der Entwicklung von $e^{\alpha x i}$ nach den Functionen $C_n^\nu(x)$ sind, so besteht die Gleichung

$$J^{\frac{2\nu-1}{2}} (\alpha \sin \varphi \sin \psi) = \frac{(\alpha \sin \varphi \sin \psi)^{\frac{2\nu-1}{2}}}{2^{\frac{2\nu-1}{2}} \sqrt{\pi} \Pi(\nu-1)} \int_{-1}^{+1} e^{\alpha z i \sin \varphi \sin \psi} (1-z^2)^{\nu-1} dz \quad \left(\nu > -\frac{1}{2} \right),$$

aus der die Beziehung

$$\int_0^\pi e^{ai \cos \varphi \cos \psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}} (\alpha \sin \varphi \sin \psi) C_n^\nu (\cos \varphi) \sin^{\frac{2\nu+1}{2}} \varphi d\varphi = \frac{(\alpha \sin \psi)^{\frac{2\nu-1}{2}}}{2^{\frac{2\nu-1}{2}} \sqrt{\pi} \Pi(\nu-1)} \cdot \int_0^\pi C_n^\nu (\cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi \int_{-1}^{+1} e^{ai (\cos \varphi \cos \psi + z \sin \varphi \sin \psi)} (1-z^2)^{\nu-1} dz$$

folgt.

¹⁾ „Zur Theorie der Besselschen Functionen“. Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe. 75. Band. II. Abth. In dieser Mittheilung habe ich diese Relation durch Trennung ihres reellen und imaginären Theiles in vier Formeln gespalten und darauf hingewiesen, dass der specielle Fall $\nu=0$ derselben schon im Jahre 1824 von Bessel in seiner in den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften enthaltenen Abhandlung „Untersuchung des Theiles der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht“, abgeleitet wurde.

²⁾ „Das Additionstheorem derjenigen Functionen, welche bei der Entwicklung von $e^{\alpha x i}$ nach den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche auftreten.“ Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe. 85. Band. II. Abth.

³⁾ Den speciellen Fall $n=0$ dieser Relation hat auf anderem Wege Herr Sonine in seiner im 16. Bande der „Mathematischen Annalen“ (1880) enthaltenen Abhandlung „Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries“ hergeleitet

Nun ist aber

$$\alpha^\nu e^{\alpha i (\cos \varphi \cos \psi + z \sin \varphi \sin \psi)} = 2^\nu \Pi(\nu - 1) \sum_{\lambda=0}^{\infty} i^\lambda (\nu + \lambda) J_{(\alpha)}^{\nu+\lambda} C_\lambda^\nu (\cos \varphi \cos \psi + z \sin \varphi \sin \psi)$$

und daher wird:

$$\int_0^\pi e^{\alpha i \cos \varphi \cos \psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}} (\alpha \sin \varphi \sin \psi) C_n^\nu (\cos \varphi) \sin^{\frac{2\nu+1}{2}} \varphi d\varphi = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \sin^{\frac{2\nu-1}{2}} \psi \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} i^\lambda (\lambda + \nu) J_{(\alpha)}^{\lambda+\nu} \int_0^\pi C_n^\nu (\cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi \int_{-1}^{+1} (1 - z^2)^{\nu-1} \cdot C_\lambda^\nu (\cos \varphi \cos \psi + z \sin \varphi \sin \psi) dz.$$

Da aus dem durch die Gleichung

$$C_\lambda^\nu (\cos \varphi \cos \psi + z \sin \varphi \sin \psi) = \Pi(2\nu - 2) \left[\frac{2^\lambda \Pi(\lambda + \nu - 1)}{\Pi(\nu - 1)} \right]^2 \cdot$$

$$\sum_{\varrho=0}^{\lambda} (-1)^\varrho \frac{2\nu + 2\rho - 1}{\Pi(\lambda - \rho) \Pi(2\nu + \lambda + \rho - 1)} C_{\lambda}^{\nu, \varrho} (\cos \varphi) C_{\lambda}^{\nu, \varrho} (\cos \psi) C_{\varrho}^{\frac{2\nu-1}{2}} (z)$$

gegebenen Additionstheoreme der Functionen $C_n^\nu(x)$, in welchem

$$C_{\lambda}^{\nu, \varrho}(x) = \frac{\Pi(\lambda - \rho) \Pi(\nu + \rho - 1)}{2^{\lambda-\varrho} \Pi(\lambda + \nu - 1)} (x^2 - 1)^{\frac{\varrho}{2}} C_{\lambda-\varrho}^{\nu+\varrho}(x)$$

ist, auf Grund der bekannten Beziehung

$$(II) \quad \int_{-1}^{+1} C_n^\nu(x) C_m^\nu(x) (1 - x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dx = \frac{2^{2\nu-1} \Pi(n + 2\nu - 1)}{(n + \nu) \Pi(n)} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)} \right]^2 \delta_{m,n} (\delta_{\lambda,\mu} = 0 \text{ } \lambda \geq \mu; \delta_{\lambda,\lambda} = 1)$$

die Gleichung

$$\int_{-1}^{+1} C_\lambda^\nu (\cos \varphi \cos \psi + z \sin \varphi \sin \psi) C_\varrho^{\frac{2\nu-1}{2}} (\cos \varphi) \sin^{2\nu-1} \varphi d\varphi = (-1)^\varrho \frac{2^{2\lambda+2\nu-1} \Pi(2\nu + \rho - 2) [\Pi(\lambda + \nu - 1)]^2}{\Pi(\rho) \Pi(\lambda - \rho) \Pi(2\nu - 2) \Pi(2\nu + \lambda + \rho - 1)} C_\lambda^{\nu, \varrho} (\cos \varphi) C_\lambda^{\nu, \varrho} (\cos \psi),$$

folgt, so verwandelt sich die letzte Gleichung in die folgende

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi e^{ai \cos \varphi \cos \psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}} (\alpha \sin \varphi \sin \psi) C_n^\nu (\cos \varphi) \sin^{\frac{2\nu+1}{2}} \varphi d\varphi = \\ & = \frac{2^{\frac{4\nu-1}{2}} \sin^{\frac{2\nu-1}{2}} \psi [\Pi(\nu-1)]^2}{V\alpha\pi} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} i^\lambda (\lambda + \nu) J^{\lambda+\nu} (\alpha) C_\lambda^\nu (\cos \psi) \cdot \\ & \quad \cdot \int_0^\pi C_\lambda^\nu (\cos \varphi) C_n^\nu (\cos \varphi) \sin^{2\nu} \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

welche nach (II) unmittelbar die Relation (I) liefert.

Dieselbe zeigt, dass sich $e^{ai \cos \varphi \cos \psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}} (\alpha \sin \varphi \sin \psi)$ in folgende nach den Functionen $C_n^\nu (\cos \varphi)$ fortschreitende Reihe entwickeln lässt:

$$\begin{aligned} & e^{ai \cos \varphi \cos \psi} J^{\frac{2\nu-1}{2}} (\alpha \sin \varphi \sin \psi) = 2^{2\nu-1} [\Pi(\nu-1)]^2 (\sin \varphi \sin \psi)^{\frac{2\nu-1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \cdot \\ \text{III} \quad & \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} i^\lambda \frac{(\lambda + \nu) \Pi(\lambda)}{\Pi(\lambda + 2\nu - 1)} J^{\nu+\lambda} (\alpha) C_\lambda^\nu (\cos \varphi) C_\lambda^\nu (\cos \psi). \end{aligned}$$

Setzt man in (I) $n=0$, $\nu = m + \frac{1}{2}$, m , so erhält man sofort die zwei Hobson'schen Integrale.

Wird in (III) $\rho = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = r$ gesetzt, so ergibt sich wegen

$$C_{2\nu+1}^\nu = 0, \quad C_{2r}^\nu = \frac{\Pi(\nu + r - 1)}{\Pi(r) \Pi(\nu - 1)}$$

die Erweiterung der zweiten Hobson'schen Reihe für jedes $\nu > -\frac{1}{2}$ und aus ihr die analoge Erweiterung der dritten Hobson'schen Formel.

Macht man endlich in (III) $\psi = i\omega$ und bestimmt die Grenze der beiden Seiten dieser Gleichung für $\lim \omega = \infty$, so entsteht die Ausdehnung der ersten Reihe des Herrn Hobson auf jedes $\nu > -\frac{1}{2}$.