Die Erdelektrode möge im Koordinatenursprung liegen und zunächst punktförmig sein. Da die gesamte, auf der Erdoberfläche verteilte Ladung den Wert $-2 l C E_0 \sin \omega t$ hat, so ist der Gesamtstrom augenscheinlich gleich

$$\frac{d}{dt} (-2 l C E_0 \sin \omega t) = -2 l C \omega E_0 \cos \omega t \quad (31)$$

Im Koordinatenursprung haben wir demnach eine einfache Quelle von der Ergiebigkeit $-2 l C \omega E_0 \cos \omega t$ anzunehmen. (32)

Nimmt man den Erdkörper als homogen leitend an, so läuft die Bestimmung der Strömung auf die Lösung der folgenden Randwertaufgabe hinaus:

Es ist diejenige in dem Halbraume $\mathfrak{R}$ ($Z < 0$) reguläre Potentialfunktion (Strömungspotential) $\Psi(X, Y, Z) \cos \omega t$ zu bestimmen, die auf S der Bedingung

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = -\frac{C h E_0 \omega}{2 \pi \varrho^3} \left[\frac{l + \xi}{\sqrt{(l + \xi)^2 + \varrho^2}} + \frac{l - \xi}{\sqrt{(l - \xi)^2 + \varrho^2}} \right] \quad (33)$$

genügt, sich in der Umgebung des Koordinatenursprunges wie

$$-\frac{2 l C \omega E_0}{2 \pi R} + \text{stetige Funktion} \quad (R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2) \quad (34)$$

verhält und im Unendlichen verschwindet¹⁾. Das Verhalten in der Umgebung des Koordinatenursprunges entspringt der Forderung, daß der Gesamtstrom

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial R} df \quad (35)$$

(S_ϵ Halbkugel vom Radius ϵ um den Koordinatenursprung) den Wert (31) hat.

Aus bekannten Sätzen folgt, daß es nicht mehr als eine Lösung des Problems geben kann.

Faßt man den Koordinatenursprung als eine Stromquelle von der Ergiebigkeit (32), den Punkt $(\xi, \eta, 0)$ als eine Elementarquelle von der Ergiebigkeit (31) auf, so findet man die Lösung ohne weiteres in der Form

$$\begin{aligned} \Psi(X, Y, Z) = & -\frac{2 l C \omega E_0}{2 \pi (X^2 + Y^2 + Z^2)^{3/2}} \\ & + \frac{C h E_0 \omega}{2 \pi \cdot 2 \pi} \int \frac{1}{\varrho^2} \left[\frac{l + \xi}{\sqrt{(l + \xi)^2 + \varrho^2}} + \frac{l - \xi}{\sqrt{(l - \xi)^2 + \varrho^2}} \right] \frac{d \xi d \eta}{[(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 + Z^2]^{3/2}} \quad (36) \end{aligned}$$

Die Integration ist über die ganze Ebene $\zeta = 0$ erstreckt zu denken. Die weitere Behandlung und Diskussion der Beziehung (36), insbesondere der Nachweis, daß ψ tatsächlich die gesuchte Lösung darstellt, bleibt einer Fortsetzung dieses Aufsatzes vorbehalten. 24

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Probleme der Flugzeugstatik.

Von J. RATZERSDORFER in Wien.

Zwischen der Festigkeitsberechnung einer Flugzeugzelle und der des Tragwerks einer Brücke oder Dachkonstruktion besteht kein grundsätzlicher Unterschied; es sind immer die gleichen Verfahren der Statik starrer und elastischer Körper, mit denen man die Lösung aller Festigkeitsaufgaben erzielt. Das Bestreben, zur Gewichtsersparnis (und gelegentlich auch zur Verringerung des Luftwiderstandes) die Flugzeugteile in möglichst kleinen Dimensionen zu halten, hat jedoch dazu geführt, die Berechnung vielfach mit einer größeren Annäherung an die Wirklichkeit vorzunehmen, als es sonst im Bauwesen üblich

¹⁾ Da im Unendlichen keine Stromsenke liegt, so ist $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \frac{\partial \psi}{\partial R} df = 0$ (S_R Halbkugel um den

ist. Bei den verhältnismäßig bedeutenden Abmessungen der Konstruktionsteile von Ingenieurbauten wäre eine soweit getriebene Genauigkeit der Rechnung häufig ganz unzweckmäßig. Die Materialökonomie, mit der Flugzeuge konstruiert werden, bringt es also mit sich, daß die statische Berechnung gewisse neuartige Probleme bietet.

Zunächst soll die Bezeichnung der Hauptteile des Flugzeugtragwerks angegeben werden. Abb. 1 zeigt im Aufriß die Vorderansicht des Tragwerks, der sog. Zelle eines normalen Doppeldeckers, und im Grundriß die obere Tragfläche. Die Vorder- und Hinterwand besteht aus den Holmen H als Gurtungen (H_1 oberer Vorderholm, H_2 oberer Hinterholm) und aus den Stielen (Streben) S und den Kabeln K (K_1 Haupt- und K_2 Gegenkabel) als

Abb. 1

Füllungsgliedern. Jede Tragfläche (die obere und untere) enthält überdies als Verband zwischen den Holmen die Distanzrohre D und die Innenverspannung V . Q ist das Querruder (die Verwindungsklappe). Die obere Tragfläche ist gegen die untere um die sog. Staffelung nach vorn verschoben. Zwischen zwei Stielen und zwei Distanzrohren, in einer Stielebene, werden in der Querriechung Kabel eingezogen, die im Kreuzriß sichtbare Stielverspannung (die Tiefenkreuzkabel) T . St ist das mitunter vorhandene Stirnkabel, Sp der Spannturm, ein Konstruktionsteil, der den Anschluß der oberen Tragfläche an den Rumpf vermittelt; die untere Tragfläche ist im Falle der Abbildung gelenkig an den Rumpf angeschlossen. Auf die Holme sind Holzrippen (Spanten) R aufgezogen, durch die das Profil der Fläche festgelegt wird. Ueber die Rippen wird die Verkleidung aus zellonierter Leinwand oder Sperrholz gespannt.

Die das Tragwerk beim Flug beanspruchenden Lasten werden aus aerodynamischen Untersuchungen ermittelt. Man pflegt die statische Berechnung für gewisse angenommene Grenzwerte, den Steigflug (Abfangen), Gleitflug, Sturzflug und Oberdruck (Rückenflug) durchzuführen¹⁾. Abb. 2 gibt eine Vorstellung von den hierbei etwa gebräuchlichen Lastannahmen. Vorgeschrieben wird im allgemeinen für Steigflug eine 5fache, für Gleitflug und Oberdruck eine 3- bis 3,5fache und für Sturzflug eine 2- bis 2,5fache Bausicherheit. Für die Dimensionierung eines Organs ist die jeweils ungünstigste Belastungsart maßgebend. Im Steigflug wirkt — nach Annahme — die Auftriebskraft senkrecht zur Tragflächensehne, im Drittel der Flügeltiefe vom Vorder- rand des Flügels entfernt. Der Auftrieb ist gleich zu setzen dem Gewicht G des vollbelasteten Flugzeugs, vermindert um das Gewicht G_1 der Tragzelle. Die Belastung der Abb. 2 wird entsprechend der Flächengröße auf die einzelnen Tragflächen verteilt; oft wird auch das Verhältnis der Lastaufnahme von Ober- und Unterflügel — genaueren Untersuchungen entsprechend — von der Staffelung und der Schränkung (der Differenz der Anstellwinkel α der oberen und unteren Tragfläche, vergl.

Abb. 2

¹⁾ Derartige Vorschriften wurden während des Krieges von den einzelnen Heeresleitungen ausgegeben. Dem Referenten lagen insbesondere vor: Vorschriften über die Bausicherheit und die statische Berechnung der Flugzeuge, k. u. k. Fliegerarsenal, Wien 1917; Leitsätze für den Festigkeitsnachweis für Flugzeuge, k. pr. Inspektion der Fliegertruppen, Berlin 1918. Vergl. a. H. Reißner, Jahrb. d. wissensch. Ges. f. Luftfahrt, 1919, S. 85 bis 107.

Abb. 2) abhängig gemacht. Die spez. Flächenbelastung p kann für die Rechnung ausreichend genau als über die Tragfläche konstant angesehen werden¹⁾.

Das Tragwerk des Flugzeugs ist ein räumliches System, das (mit den Tragflächenholmen) aus biegesteifen Stäben, aus an diesen gelenkig angeschlossenen stabsteifen (d. h. nur Zug- oder Druckkräfte übernehmenden) Stäben und aus Zugorganen (Kabeln) besteht. Die Holme laufen über die Stiele, mitunter auch über den Spannturm durch, und sind durch die Luftkräfte in der Querrichtung und die Systemkräfte in der Längs- und Querrichtung beansprucht.

Die Luftkräfte werden durch die Bespannung auf die Rippen und von diesen auf die Holme übertragen. Nimmt man an, daß die Rippen gelenkig auf den Holmen gelagert sind, so ergeben sich die Holmlasten als die Auflagerkräfte der durch die Luftkräfte ergriffenen Rippen. Durch die Anschlußleisten ist eine teilweise Einspannung der Spanten gegeben, die eine Erhöhung der Holmfestigkeit bewirkt²⁾; auch die Bespannung versteift das Tragsystem. Man pflegt dies außer acht zu lassen und mit einer gleichförmigen Verteilung der Querlasten über die Holme zu rechnen, wobei man sich im Hinblick auf Bausicherheit auf der günstigen Seite bewegt.

Eine Ermittlung der Systemkräfte kann bei Berücksichtigung der Holmdeformation nur durch eine Näherungsfolge geschehen, da die Holmmomente transzendente Funktionen der zu bestimmenden Längskräfte sind (vergl. die Holmberechnung). Man schlägt beispielsweise den folgenden Weg ein. Man betrachtet den Holm zunächst als nur querbelasteten kontinuierlichen Träger auf ungesenkten Zwischenstützen und bestimmt die Stützkkräfte in üblicher Weise bei vorhergehender Ermittlung der Stützenmomente aus den Dreimomentengleichungen Clapeyrons³⁾. Hiernach faßt man Zelle und Spannturm als ein Fachwerk auf, d. h. als ein Stabsystem, dessen Stäbe miteinander gelenkig verbunden sind und das nur in den Knotenpunkten, d. i. den Gelenkstellen, durch Knotenlasten von der Größe der vorher berechneten Stützkkräfte belastet ist. Die Berechnung erfolgt nach den für räumliche Fachwerke üblichen Methoden⁴⁾, bei statischer Unbestimmtheit unter Zuhilfenahme der Elastizitätsgleichungen von Maxwell-Mohr⁵⁾. Mit den so errechneten Stabkraftwerten bestimmt man unter Berücksichtigung der Kontinuität und der elastischen Deformation neuerdings die Stützkkräfte des Holmes und mit diesen als Knotenlasten wieder die Systemkräfte. Dieser Vorgang ist so oft zu wiederholen, bis die Differenz zwischen den angenommenen Knotenlasten und den berechneten Reaktionen gering ist⁶⁾. In praxi begnügt man sich häufig bereits mit den unter der Annahme gelenkiger Knoten gefundenen Längskräften, also mit der ersten Näherung.

Bei normal abgespannten, statisch unbestimmten Zellensystemen, Abb. 1, wird die Berechnung oft auch für den Fall durchgeführt, daß in der Vorder- oder, wenn ungünstiger, in der Hinterwand die am stärksten beanspruchte Verspannung fehlt (z. B. ein Zugorgan reißt). Auch dann soll noch eine entsprechende Sicherheit vorhanden sein⁷⁾.

Wenn es die Ausbildung des Systems gestattet, wird eine Zerlegung in ebene Fachwerke vorgenommen: vordere und hintere Tragwand, obere und untere Tragfläche. Für

¹⁾ Knoller gibt die Beziehung $p = p_0 \sqrt[4]{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2}$ an, die die Lastabnahme gegen die Flügelenden berücksichtigt; es bezeichnen p_0 die spez. Belastung in der Mitte (beim Rumpf) und l die Länge der Tragfläche von Flugzeugmitte (vom Anschluß am Rumpf) bis zu den Flügelenden. Vergl. Pröhl, Flugtechnik, München 1919, S. 264 und die bezüglichen Annahmen in den Bauvorschriften, Fußnote 1.

²⁾ Ballenstedt, Der Einfluß der Spante auf die Festigkeit der Holme, Technische Berichte, herausgegeben von der Flugzeugmeisterei der Inspektion der Fliegertruppen, 1919.

³⁾ Vergl. z. B. Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, 23. Aufl. Berlin 1920, 3. Bd. S. 126.

⁴⁾ Siehe etwa: Schlink, Statik der Raumfachwerke, Leipzig 1907. Ferner die Abhandlung von v. Mises, Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme, Zeitschr. Mathem. u. Physik 64, 1916. (Das räumliche Problem wird hier durch ein Abbildungsverfahren auf ein ebenes zurückgeführt.)

⁵⁾ Siehe: Zschetzsche, Handbuch der Baustatik, Düsseldorf 1912, Art. 17 und 20.

⁶⁾ Bei Dreiecksfachwerken kann eine Verbesserung der Stabkräfte einfacher nach den Angaben Müller-Breslaus vorgenommen werden: Graphische Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1908, II. Bd., 2. Abt., § 19.

⁷⁾ In den österr. Vorschriften (Fußnote 1, S. 48) ist hierfür eine 2,5 fache Sicherheit für Gleitflugbelastung vorgeschrieben.

die zwei Fachwerken gemeinsamen Stäbe (die Holme) ergeben sich die Stabkräfte durch Summation der einzeln bestimmten Werte¹⁾.

Abb. 3 zeigt einen Eindecker, bei dem durch das Einfügen einer sog. Brücke die notwendige Konstruktionshöhe erreicht wird. Die Verspannungskabel sind zu Festpunkten des Spannturms oder des Rumpfes gezogen. In Abb. 4 ist das Tragsystem eines sog.

Abb. 3

Abb. 4

Anderthalbdeckers gezeichnet. Die untere Tragfläche besitzt geringere Tiefe und nur einen Holm; die von den oberen Holmen ausgehenden Stiele laufen gabelförmig beim unteren Holm zusammen (Nieuport). Die Stielverspannung fehlt. Die normale Zelle eines Doppeldeckers wurde an Abb. 1 beschrieben. Hiervon abweichende Konstruktionen von Doppeldeckern sind z. B. die kabellos konstruierte Zelle in Abb. 5 und das in der Vorderansicht gezeichnete Strebensystem der Abb. 6²⁾. Abb. 7 zeigt den Aufbau eines

Abb. 5

Abb. 6

Dreideckers. Der Spannturm ist als Pyramide ausgebildet (z. B. in Abb. 1) oder als Baldachin (in Abb. 4). Die Anordnung als Baldachin bezweckt eine Verkürzung der dem Rumpf zunächst liegenden Holmöffnung, sowie eine bessere Sicht nach vorn, wenn die Verspannung vermieden wird. Bei größeren Flugzeugen mit dreiteiligen oberen Tragflächen ist auch eine Kombination beider Ausführungen in Verwendung. Sind die Tragflächen über dem Baldachin durchlaufend, so werden die Baldachinstreben oft gelenkig am Holm angeschlossen. Es entspricht dies am besten der Rechnungsweise, bei der Zelle und Spannturm als ein Tragsystem angesehen wird. Wenn untere Tragflächen durchlaufend angeordnet sind, ist auch unterhalb des Rumpfes ein Spannturm angebracht. Häufig wird der Spannturm, besonders wenn die Zelle in ebene

Abb. 7

Fachwerke zerlegt, wird für sich allein berechnet. Man stellt dann die Forderung, daß der Spannturm für sich ein stabiles System bilden soll. Diese Forderung kann aber mit Rücksicht auf die Beanspruchung im Kurvenflug überhaupt zweckmäßig erscheinen und dieser Belastung derart Rechnung getragen werden, daß man z. B. alle Anschlußkräfte des Steigfluges auf einer Flughalft um einen gewissen Betrag vermehrt, auf der andern vermindert am Spannturm angreifen läßt³⁾. Je nach Ausbildung wird der Spannturm als Fachwerk oder räumlicher Steifrahmen behandelt.

¹⁾ Siehe; Saliger, Ueber eine Anwendung der Statik im Flugzeugbau, Oesterr. Flugzeitschr. 1916, Heft 5/6; Berechnung von viersseitigen Zellen unter Einwirkung von Kräften, die in den Zellen-ebenen wirken, Oesterr. Flugzeitschr. 1916, Heft 13/14. — Schwengler, Die Statik im Flugzeugbau, Berlin 1917.

²⁾ Vergl. auch: Struve, Berechnung von Verspannungssystemen mit Zwischenstielen, Technische Berichte der Flugzeugmeisterei 1918.

³⁾ In den österr. Vorschriften (Fpßnote 1, S. 48) ist eine Vermehrung bzw. Abminderung um $\frac{1}{5}$ der Anschlußkräfte des Steigfluges vorgesehen.

Heute sind hauptsächlich Doppeldecker in Verwendung. Ihre Vorzüge gegenüber den Eindeckern sind nicht flugtechnischer, sondern vor allem konstruktiver Natur, da die beim Eindecker nur künstlich erzielbare Konstruktionshöhe durch das Tragwerk des Doppeldeckers von selbst gegeben ist¹⁾. Das »System« des Doppeldeckers wird fallweise auf Grund der gegebenen Verhältnisse gewählt; keiner Ausführung kann von vornherein irgendwelche Ueberlegenheit zuerkannt werden.

Es soll nun die Berechnung der einzelnen Flugzeugorgane besprochen werden; hierbei wird es auch nötig sein, ihre konstruktive Ausbildung zu beachten.

1. Bespannung. Als Bespannung ist vorwiegend Stoff, vielfach auch Sperrholz, bei Metallflugzeugen Aluminium in Verwendung. Der Stoff wird über das Gerippe der Holme und Spanten aufgezogen und dann, also unter Verhinderung der Zusammenziehung, mit Zellonlack getränkt. Pröll²⁾ versucht in einigen Aufsätzen eine Festigkeitsberechnung des Bespannungsstoffes. Ausgegangen wird von der Formel, die für unzellonierte, d. h. nicht Schubspannungen übernehmende Stoffe gilt, $\frac{S_1}{e_1} + \frac{S_2}{e_2} = p$, und den sogen. Normalcharakteristiken³⁾, die eine auf experimentellem Wege gewonnene Beziehung zwischen den Spannungen S_1 und S_2 von Schuß und Kette und den bezüglichlichen Dehnungen graphisch vermitteln. e_1 und e_2 sind die entsprechenden Krümmungshalbmesser, p ist die spez. Flächenbelastung. Lewe⁴⁾ entwickelt, ausgehend von der Föppl'schen Lösung der Differentialgleichung für eine dünne, rechteckige Platte mit großer Ausbiegung⁵⁾, eine Näherungsformel, die gleichfalls erst nach Schätzung gewisser Größen eine Berechnung gestattet. Die Sperrholz- oder Aluminiumbespannung ist als rechteckige Platte zu untersuchen.

2. Rippen oder Spanten. Durch die Rippen ist wie erwähnt das Tragflächenprofil festgelegt, vergl. Abb. 2. Die Rippe ist in der Regel ein gebogener Holzstab mit Doppel-T-Querschnitt, aus einem 2 bis 3 mm starken Steg mit aufgeleimten Gurtungen bestehend. Da die Holme innerhalb des Profils verlaufen, sind dicke Profile hinsichtlich der möglichen Höhe der Tragflächenholme vorteilhaft. Zur Verringerung des Gewichts besitzt der Steg gewöhnlich dreieckige oder viereckige Ausschnitte. An Stelle der Distanzrohre werden mitunter stärkere kastenförmige Rippen verwendet, die dann zum Tragsystem zu zählen sind.

Bei fester Einspannung der Rippen in den Holmen läge ein aus Holmen und Rippen bestehendes Rahmentragwerk vor, das dann auf Biegung und Torsion beansprucht ist. Man führt die Berechnung der Spanten auf eine Biegeaufgabe zurück, indem man sie als Träger betrachtet, die auf den Holmen gelenkig gelagert und nur bei einholmiger Stützung im Holm eingespannt sind. Ist die Verteilung der Lasten über die Länge des Spantes bekannt⁶⁾, so kann der Verlauf der Biegemomente und Querkräfte in einfacher Weise graphisch bestimmt werden. Die Spannungsermittlung der normalen Rippen hat nach den für vollwandige Biegungsträger bzw. nach den für Rahmenträger üblichen Verfahren zu erfolgen; man begnügt sich aber meist mit einer Belastungsprobe als Nachweis für die erforderliche Festigkeit.

3. Tragflächenholme: Grundlagen. Für einen geraden in seiner Längsrichtung durch eine Druckkraft belasteten Stab gibt die klassische Theorie, bei der im Ansatz der Differentialgleichung der elastischen Linie das Quadrat des ersten Differentialquotienten gegen 1 vernachlässigt wird, als kritische Werte die Eulerschen Knicklasten, für die man unbestimmte Durchbiegungen erhält. Es ist seit Grashof⁷⁾ bekannt, daß diese

¹⁾ Siehe auch die Studie von v. Gries, Dreidecker gegen Zweidecker, Technische Berichte der Flugzeugmeisterei 1917.

²⁾ Pröll, Flugtechnik, München 1919, und Aufsätze in der Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1915, 1919, 1920 und in den Technischen Berichten der Inspektion 1919.

³⁾ Siehe hierüber: Haas und Dietz, Stoffdehnung und Formänderung der Hülle von Prall-Luftschiffen in Luftfahrt und Wissenschaft, Berlin 1913. — Weiter: Everling, Vereinfachte Kennlinien für Flügelbespannstoffe, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1920.

⁴⁾ Lewe, Bemerkungen zu den Untersuchungen von A. Pröll über Tragflächenbespannung, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1920.

⁵⁾ Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik, Leipzig 1907, 5. Bd., § 24.

⁶⁾ Siehe Heilmann und Madelung, Die Beanspruchung der Flügelrippen, Technische Berichte der Inspektion 1917.

⁷⁾ Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878, 2. Aufl. S. 168.

Unklarheit verschwindet, wenn man die exakte Differentialgleichung der Biegelinie der Rechnung zu Grunde legt. Solange die Last unterhalb des kritischen Eulerschen Wertes bleibt, gibt es kein anderes Gleichgewicht als das der gleichförmigen Zusammendrückung. Wird die Eulerlast überschritten, so gibt es außer dem gleichförmig gepreßten auch einen zweiten Gleichgewichtszustand mit Ausbiegung, der dann der stabilere ist. Das Eingehen auf die genaue Theorie ist zur Klärung des Problems unerlässlich; handelt es sich aber nur darum die Grenzwerte, das sind die Verzweigungspunkte der Lösung der genauen Differentialgleichung, zu bestimmen, so genügt es nach der Näherungstheorie vorzugehen und festzuhalten, daß das Unbestimmtwerden der Ausbiegung das Kriterium der Knicklast ist.

Beim Tragflächenholm treten zur axialen Belastung noch querwirkende Kräfte hinzu. Als ein konkreter Fall soll ein zweiseitig gelenkig gelagerter Stab betrachtet werden, der durch eine Längskraft und eine gleichförmig verteilte Querbeltung beansprucht ist. Die klassische Näherungstheorie liefert, wenn die Eulersche Knicklast erreicht ist, hier unendlich große Durchbiegungen. Es ist deshalb prinzipiell wichtig zu wissen, welche Beanspruchungen in diesem Grenzfall in Wirklichkeit auftreten und wann es zulässig ist, nach der Näherungstheorie zu rechnen. Während aber beim nur axial belasteten Stab die genaue Rechnung mittels elliptischer Integrale einfach zum Ziele führt, bietet sie beim längs- und querbelteten Stab bedeutende Schwierigkeiten. Trefftz¹⁾ integriert die exakte Differentialgleichung der elastischen Linie mit Hilfe des Picardschen Verfahrens der Näherungsfolge unter der Annahme, daß die Lasten senkrecht zur ursprünglichen Stabachse stehen. Unterhalb der Eulerlast ist nur eine Gleichgewichtslage möglich; oberhalb derselben sind drei Biegelinien vorhanden, die natürliche Durchbiegung, deren Kurve eine Fortsetzung der Kurve unterhalb des Grenzwertes ist und zwei Durchbiegungen entgegengerichtet der Querlast, von denen die mit den größeren Ausbiegungen stabil ist, aber nur durch künstliches Hinüberdrücken des Stabes in die neue Gleichgewichtslage erhalten werden kann. Bei der natürlichen Biegelinie, die vor allem von praktischer Bedeutung ist, bildet jetzt das Erreichen der Eulerlast keinen ausgezeichneten Fall. Der Verzweigungspunkt der Lösung gibt jetzt als den der Eulerlast analogen Wert jene Drucklast, von der an drei reelle Ausbiegungen bestehen. Reißner²⁾ entwickelt zur Lösung dieser Aufgabe unter der Annahme, daß die Last jeweils auf der Biegelinie senkrecht steht, ein graphisches Verfahren, bei dem die Biegelinie durch Aneinanderreiben von Krümmungskreisen aufgetragen wird. Seine Ergebnisse stimmen mit denen von Trefftz durchaus nicht überein.

Beim axial- und querbelteten Stab ist wie beim nur axial belasteten Stab das Gleichgewicht mit Ausbiegung bei einer die Eulersche Knicklast übersteigenden Last nicht verwendbar, da die Durchbiegungen rasch anwachsen und hierbei die Spannungsgrenze in der Regel überschritten wird. Es sind also ebenfalls die aus der klassischen Näherungstheorie gewonnenen Knicklasten als Grenzwerte maßgebend. Für die praktische Festigkeitsberechnung reicht die gewöhnliche Theorie vollkommen aus; man hat unterhalb der Knicklast auf kombinierte Beanspruchung »Druck, Biegung« zu rechnen.

Die Frage, ob es möglich ist sogen. höhere Knicklasten zur Ausbildung zu bringen und ob es gelingt, einzelne Knicklasten durch Anordnung von Querlasten auszuschalten, ist sowohl von theoretischem Interesse als auch von einiger praktischer Bedeutung, die über den Rahmen des Flugzeugbaues hinausreicht. Hauptsächlich wären jene Anordnungen von Wichtigkeit, bei denen die erste Knicklast ausgeschieden wird. Einwandfreie theoretische und experimentelle Ergebnisse sind hierüber bisher nicht festgestellt.

4. Praktische Holmberechnung. Reißner und Schwerin³⁾ berechnen den über mehrere Stützen gelagerten Tragflächenholm nach den von Müller-Breslau angegebenen Formeln. Zwischen den drei Stützenmomenten M_{r-1} , M_r und M_{r+1} der zwei aufeinanderfolgenden Öffnungen mit den Längen s_r und s_{r+1} , die durch die exzentrischen Druckkräfte S_r bzw. S_{r+1} und die gleichförmig verteilten Querlasten q_r bzw. q_{r+1} pro

¹⁾ Trefftz, Zur Frage der Holmfestigkeit, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1918.

²⁾ Reißner, Die Biegelinie des vollkommen elastischen Stabes infolge Längskraft und Querbeltung in der Nähe der Knicklast, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1918.

³⁾ Reißner und Schwerin, Die Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme. Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt 1916. - Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1908, 2. Bd. 2. Abt. S. 87.

Längeneinheit ergriffen sind, besteht die »Stetigkeitsbedingung«, eine Gleichung Clapeyronscher Bauart

$$M_{r-1} \psi_r'' + M_r (\psi_r' + \psi_{r+1}') + M_{r+1} \psi_{r+1}'' + y_{r-1} \delta_r - y_r (\delta_r + \delta_{r+1}) + y_{r+1} \delta_{r+1} + g_r s_r^2 \psi_r''' + g_{r+1} s_{r+1}^2 \psi_{r+1}''' + S_r (e_r' \psi_r'' + e_r'' \psi_r') + S_{r+1} (e_{r+1}' \psi_{r+1}'' + e_{r+1}'' \psi_{r+1}') = 0.$$

Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt¹⁾:

$$\alpha = s \sqrt{\frac{S}{EJ}}, \quad \delta = \frac{1}{s}$$

$$\psi_r'' = \frac{1}{s s} \left(1 - \frac{\alpha}{\tan \alpha}\right), \quad \psi_r' = \frac{1}{s s} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} - 1\right), \quad \psi_r''' = \frac{1}{s s} \left(\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\alpha} - \frac{1}{2}\right).$$

Die Stützenmomente sind im Sinne einer Vergrößerung der Deformation positiv gezählt. E ist der Youngsche Modul (Elastizitätsmodul) des Holmmaterials, J das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche (gewöhnlich eines Kastenquerschnitts, seltener Doppel-T-Profils) bezüglich der wagrechten Schwerachse, die als Hauptachse vorausgesetzt ist. Die vertikalen Verschiebungen y der Knotenpunkte können — bei der gebräuchlichen Zerlegung des Systems in ebene Fachwerke — mittels eines Williot'schen Planes oder bei Dreiecksnetzen aus der Änderung der Dreieckswinkel bestimmt werden. e' ist die Exzentrizität der Längskraft am linken, e'' am rechten Ende der Oeffnung. Die Exzentrizität ist positiv gezählt, wenn sie bei der Längsdruckkraft eine Vergrößerung des Biegemomentes hervorruft. In der früheren Zeit des Flugzeugbaues waren sogen. Glockenbeschläge der Knotenpunkte in Verwendung, womit eine exzentrische Anordnung der Längskräfte bedingt war. Es wurde auch beim Anschluß der Holme am Rumpf eine exzentrische Aufhängung versucht, um ein günstig wirkendes »Einspannmoment« herbeizuführen. Gewöhnlich wird aber heute die Exzentrizität vermieden und die Konstruktion der Holmanschlüsse so eingerichtet,

daß der Schnittpunkt der Stiele und Kabel in die Holmachse fällt. — Aus dem Gleichungssatz der Stetigkeitsbedingungen können,

da die Endmomente gegeben sind (P aus der Kragarmbelastung, vergl. Abb. 8, null bei gelenkigem Anschluß am Rumpf oder Spannturm) die Stützenmomente berechnet werden.

Der Auflagerdruck an der Stütze r ist

$$C_r = M_{r-1} \delta_r - M_r (\delta_r + \delta_{r+1}) + M_{r+1} \delta_{r+1} - y_{r-1} S_r \delta_r + y_r (S_r \delta_r + S_{r+1} \delta_{r+1}) - y_{r+1} S_{r+1} \delta_{r+1} + g_r \frac{S_r}{2} + g_{r+1} \frac{S_{r+1}}{2} + (e_r' - e_r'') S_r \delta_r + (e_{r+1}' + 1 - e_{r+1}'') S_{r+1} \delta_{r+1}.$$

Das Biegemoment in der Oeffnung s , deren Endmomente M_a und M_b sind, ist für einen Querschnitt im Abstand x von der Stütze a durch die Gleichung

$$M_x = S \left(A \cos \frac{x}{k} + B \sin \frac{x}{k} \right) - g k^2$$

bestimmt, aus der sich das Maximalmoment $M_{\max} = SA \sec \frac{x_0}{k} - g k^2$ ergibt. Es bedeuten:

$$k^2 = \frac{EJ}{S}, \quad A = \frac{M_a + S e' + g k^2}{S}, \quad B = \frac{M_b + S e'' + g k^2}{S \sin \alpha} - A \cotg \alpha, \quad \tan g \frac{x_0}{k} = \frac{B}{A}.$$

Die Gleichung für $M_{\max}$ ist nur benutzbar, wenn x_0 zwischen O und s liegt. Sonst fällt das Maximalmoment mit dem größeren der beiden Stützenmomente zusammen.

Die Durchbiegung im Abstand x von der Stütze a ist durch die Beziehung

$$S y = M_x - \mathfrak{M}_x - \frac{(M_b + S e'') x + (M_a + S e') (s - x)}{S} + S \frac{y_b x + y_a (s - x)}{s}$$

gegeben, wobei $\mathfrak{M}_x$ das Biegemoment im Querschnitt x für den einfachen Balken von der Stützlänge s ist.

¹⁾ Durch eine von der Inspektion der Fliegertruppen ausgegebene Tabelle der Werte $\psi \cdot S s$ wird die zahlenmäßige Berechnung sehr erleichtert.

Abb. 8

Ratzersdorfer¹⁾ gibt zur Bestimmung des Verlaufes der Biegemomente und Durchbiegungen einer Oeffnung eine graphische Darstellung in Polarkoordinaten. Nimmt man an, daß durch in gleichen Abständen λ angebrachte Flügelrippen, von denen die äußersten an den Enden der Oeffnung liegen, auf den Holm Einzellasten $g\lambda$ übertragen werden, so ist nach Müller-Breslau²⁾ im früheren Ausdruck für M_x der Wert gk^2 durch

gv^2 zu ersetzen, wobei $gv^2 = gk^2 \frac{\frac{\lambda}{2k}}{\frac{\lambda}{2k}}$. Gumbel³⁾ teilt zur Ermittlung der Biegemomente und Durchbiegungen der Oeffnung ein zeichnerisches Näherungsverfahren mit. Sind die Endmomente der Oeffnung gleich null, so gilt, wenn n die Knicksicherheit bei Zugrundelegung der Eulerformel bedeutet, in guter Annäherung: $M_{\max} = \frac{g s^2}{8} \frac{n}{n-1}$ die sog.

«Formel von Vianello», die sich im Flugzeugbau sehr eingebürgert hat. Eine ähnliche Formel — in gewisser Hinsicht eine Erweiterung — stellen Pröll⁴⁾ und Müller-Breslau⁵⁾ für das Biegemoment in Oeffnungsmitte für den Fall auf, daß die Endmomente nicht null sind.

Infolge der in der Tragfläche angeordneten Innerverspannung, vergl. Abb. 1, entstehen innerhalb einer Oeffnung, das ist des Teiles zwischen zwei Stützen, verschiedene Längskräfte. Man hilft sich oft derart, daß man für jede Oeffnung einen Mittelwert der Längskräfte bildet und nach den angegebenen Verfahren rechnet. Das Abschätzen eines richtigen Mittelwertes ist im allgemeinen unsicher, bei einer Zusammensetzung von Zug- und Druckkräften sogar unmöglich. Es ergibt sich dadurch die Notwendigkeit den Einfluß der Innerverspannung theoretisch zu verfolgen. Die Oeffnung sei in «Felder» mit konstantem k derart unterteilt, daß in jedem Feld die Querlast gleichförmig verteilt ist, Abb. 8. Wesentlich für die Rechnung ist die Richtung der Längskraft an den Trennungstellen zweier Felder. Welche Annahme hier zutreffend ist, müßte durch sorgfältig überdachte Versuche und Beobachtungen an Tragflächen oder anderen Fachwerken entschieden werden.

Müller-Breslau⁶⁾ berechnet den über mehrere Stützen durchlaufenden Holm, dessen Oeffnungen in zwei gleiche Felder unterteilt sind. An den nicht unterstützten Trennungstellen (in der Mitte der Oeffnungen) sind vertikale Einzellasten V angenommen, womit eine Neigung der Längskraft berücksichtigt werden kann. Die gleichförmig verteilte Querlast ist für die Oeffnung konstant. In allgemeiner Form kann man bei beliebigen vielen Feldern in einer Oeffnung ansetzen⁷⁾: zwischen den drei Momenten und den drei Durchbiegungen an den (unterstützten oder nicht unterstützten) Trennungstellen von zwei benachbarten Feldern s_r und s_{r+1} , die durch die zentrischen Druckkräfte S_r und S_{r+1} , die gleichförmig verteilten Querlasten g_r und g_{r+1} pro Längeneinheit und, wenn die Trennungsstelle r nicht unterstützt ist, durch die vertikale Last V_r beansprucht sind, (wie früher) die »Stetigkeitsbedingung«

$$M_{r-1} \psi_r'' + M_r (\psi_r' + \psi_r' + 1) + M_{r+1} \psi_{r+1}'' + 1 + y_{r-1} \delta_r - y_r (\delta_r + \delta_{r+1}) + y_{r+1} \delta_{r+1} + g_r s_r^2 \psi_r''' + g_{r+1} s_{r+1}^2 \psi_{r+1}''' + 1 = 0$$

und für jede nicht unterstützte Trennungsstelle die »Gleichgewichtsbedingung«

$$M_{r-1} \delta_r - M_r (\delta_r + \delta_{r+1}) + M_{r+1} \delta_{r+1} - y_{r-1} S_r \delta_r + y_r (S_r \delta_r + S_{r+1} \delta_{r+1}) - y_{r+1} S_{r+1} \delta_{r+1} + g_r \frac{s_r^2}{2} + g_{r+1} \frac{s_{r+1}^2}{2} + V_r = 0.$$

¹⁾ Ratzersdorfer, Die Berechnung der Tragflächenholme, Oesterr. Flugzeitschr. 1919. Zur Berechnung der Tragflächenholme, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1920, Heft 7/8.

²⁾ Müller-Breslau, Zur Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme, Technische Berichte der Inspektion 1918. — Siehe auch: Arnstein, Beanspruchung axial gedrückter, durch Einzellasten gebogener Stäbe, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1919.

³⁾ Gumbel, Beitrag zur Berechnung von Tragflächenholmen, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1918.

⁴⁾ Pröll, Berechnung der Tragflächenholme, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1917.

⁵⁾ Müller-Breslau, Zur Berechnung von Tragflächenholmen, Zeitschr. für Flugt. u. Motorl. 1918.

⁶⁾ Müller-Breslau, Zur Berechnung der Tragflächenholme, als Entgegnung zu Ratzersdorfer, Zur Berechnung der Tragflächenholme, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1920, Heft 19.

⁷⁾ Siehe Ratzersdorfer, Zur Festigkeitsberechnung der Tragflächenholme, Der Flug 1920; und vergl. Müller-Breslau, Zur Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme, Technische Berichte der Inspektion 1918.

Von der Exzentrizität der Längskräfte wurde abgesehen. Durch die beiden Gleichungssätze ist die Lösung des Problems geleistet, d. h. es besteht Gleichzahl zwischen den unbekannten Momenten und Durchbiegungen und den verfügbaren Gleichungen. Nach Berechnung der Unbekannten sind Biegemomente, Durchbiegungen, sowie Stützenreaktionen nach den früheren Angaben bestimmbar. Eliminiert man im Sonderfall der zweifeldrigen Oeffnungen aus dem System der vorstehenden Gleichungen die Momente und Durchbiegungen der nicht unterstützten Trennungsstellen, so entstehen Müller-Breslau's Dreimomentengleichungen zwischen den Stützenmomenten. Beim Anschluß am Rumpf wird V mit der Annahme bestimmt, daß die Längskraft die Richtung der Sehne der elastischen Linie hat; im allgemeinen soll die genauere Berücksichtigung der Längskraftrichtung bei einem zweiten Rechnungsgang erfolgen. Müller-Breslau untersucht weiters den Holm über eine Oeffnung mit drei und vier Feldern¹⁾, letzteren Fall für gleiche Feldweiten und null gesetzte Einzellasten V , was der Voraussetzung von zur ursprünglichen Stabachse parallelen Längskräften entspricht.

Ratzersdorfer²⁾ erzielt eine Rechnungsvereinfachung mit der Annahme, daß die Längskraft an den Trennungsstellen die Richtung der Tangente an die elastische Linie hat und die horizontale Komponente der Längskraft die Größe S besitzt. Die Querlast wirkt normal zur Achse des nicht deformierten Holms. Für die Stütze k eines n -feldrigen Stabes, dessen benachbarte Stützen links und rechts die Bezeichnung c bzw. w haben, Abb. 8, lautet die »Stützengleichung«:

$$\begin{aligned} M_c \psi''_{c+1} D_{c+1,k} + M_{c+1} [(\psi'_c + 1 + \psi'_c + 2) D_{c+1,k} + \psi''_c + 2 D_{c+2,k}] \\ + M_{c+2} [\psi''_c + 2 D_{c+1,k} + (\psi'_c + 2 + \psi'_c + 3) D_{c+2,k} + \psi''_c + 3 D_{c+3,k}] \\ + M_r [\psi''_{r-1} D_{r-1,k} + (\psi'_r + 1 + \psi'_r + 1) D_{r,k} + \psi''_r + 1 D_{r+1,k}] \\ + M_w - 1 [\psi''_{w-1} D_{w-2,k} + (\psi'_w - 1 + \psi'_w) D_{w-1,k}] + M_w \psi''_w D_{w-1,k} + y_c \sum_{k+1}^w s - y_k \sum_{c+1}^w s + y_w \sum_{c+1}^k s \\ + g_{c+1} s^2 c + 1 \psi'''_{c+1} D_{c+1,k} + g_{c+2} s^2 c + 2 \psi''_{c+2} (D_{c+1,k} + D_{c+2,k}) + \dots + g_r s^2 \psi''_r \\ (D_{r-1,k} + D_{r,k}) + \dots + g_{w-1} s_{w-1}^2 - 1 \psi'''_{w-1} (D_{w-2,k} + D_{w-1,k}) + g_w s_{w-1}^2 \psi'''_{w-1} D_{w-1,k} = 0. \end{aligned}$$

Für zwei aufeinanderfolgende Felder einer Oeffnung besteht die Gleichgewichtsbedingung

$$M_{r-1} \varphi''_r + M_r (\varphi'_r + \varphi'_r + 1) + M_{r+1} \varphi''_{r+1} + g_r s_{r-1}^2 \varphi'''_{r-1} + g_{r+1} s_{r+1}^2 \varphi'''_{r+1} = 0,$$

deren Gleichungssatz durch Uebergang auf Polarkoordinaten graphisch aufgelöst werden kann. Es bedeuten:

$$\varphi' = -\frac{1}{s} \frac{a}{\tan \alpha}, \quad \varphi'' = \frac{1}{s} \frac{\alpha}{\sin \alpha}, \quad \varphi''' = \frac{1}{s} \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\alpha}; \quad D_{i,k} = \sum_{c+1}^i s \cdot \sum_{k+1}^w s \text{ für } i \leq k;$$

ist $i > k$; so sind die Indizes zu vertauschen. Aus den Stützengleichungen und den Gleichgewichtsbedingungen sind die unbekannten Momente berechenbar.

Die Stützkraft an der Stütze k wird

$$C_k = M_{k-1} \varphi''_k + M_k (\varphi'_k + \varphi'_k + 1) + M_{k+1} \varphi''_{k+1} + g_k s_k^2 \varphi'''_k + g_{k+1} s_{k+1}^2 \varphi'''_{k+1}.$$

Bevor man auf kombinierte Beanspruchung »Druck, Biegung« rechnet, ist es grundsätzlich erforderlich festzustellen, ob man nicht bereits die Knicklast überschritten hat. Die Knickbedingung für den Holm erhält man durch das Nullsetzen der Nennerdeterminante des Momentengleichungssystems. (Man sieht, daß in der klassischen Näherungstheorie die Knickbedingung unbeeinflusst von den betrachteten Querlasten ist.) Die Nennerdeterminante ist Funktion des Vervielfachungsfaktors n der Belastung und man kann n am einfachsten durch Probieren so bestimmen, daß die Determinante gleich null wird. Allgemein gilt der Satz: Wenn die Knickbedingung für eine Oeffnung erfüllt ist, so knickt der Holm nur dann, wenn sich auch die Gesamtheit aller andern Oeffnungen an der Knickgrenze befindet³⁾. Eine Diskussion der Knickbedingung für zwei häufig auf-

¹⁾ Müller-Breslau, Die Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme, Technische Berichte der Inspektion 1918. VII. Einfluß der in der Tragdecke angeordneten wagrechten Verspannung auf die Holmmomente.

²⁾ Ratzersdorfer, Die Berechnung der Tragflächenholme, Oesterr. Flugzeitschrift 1910.

³⁾ Ratzersdorfer, Knickfestigkeit gerader Stäbe mit beliebig vielen Feldern, Der Flug 1920.

tretende Sonderfälle, gibt Ratzersdorfer¹⁾. Der auf Druck, Biegung zu untersuchende Spezialfall einfeldriger Öffnungen, von denen einzelne die Knickgrenze ($\alpha = \pi$) erreichen, kann einfach erledigt werden, wenn man die bezüglichen Öffnungen in zwei gleiche Felder teilt und nach den hierfür bezeichneten Verfahren rechnet²⁾.

Sind einzelne Felder in der Längsrichtung durch Zugkräfte beansprucht, so ist für die betreffenden Felder statt $S \dots - S$ in die früheren Gleichungen einzuführen. Ist in einem Feld keine Längskraft wirksam, so entsprechen die Ausdrücke für das Feld dem gewöhnlichen Clapeyronschen Dreimomententheorem. Zur Rechnungsvereinfachung kann man auch kleine Zugkräfte gleich null setzen.

Bei Ausführung der Rechnung muß man zunächst über die Art der Bausicherheit schlüssig werden. Da die Spannungen nicht proportional mit der Belastung wachsen, ist die Sicherheit nicht dieselbe, wenn man mit der einfachen Last rechnet und den n ten Teil der Materialfestigkeit als zulässige Spannung erklärt, oder mit n fachen Lasten und der Bruchfestigkeit rechnet. Im Flugzeugbau ist das letztere üblich. Es ist dies für Druckstäbe ungünstiger, für Zugstäbe günstiger. Es ergibt sich so eine Uebereinstimmung mit der Knickberechnung, da bei der Knickung die Sicherheit nur in der Weise ausdrückbar ist, daß für eine n -fache Last der labile Zustand eintreten darf. Dem ist gegenüber zu halten, daß alle Entwicklungen nur gültig sind, solange die Spannung unterhalb der Elastizitätsgrenze bleibt. Durch Wahl eines der Spannung entsprechenden Elastizitätsmoduls könnte dies (durch ein Approximationsverfahren) berichtigt werden, was aber in der praktischen Holmberechnung nicht gebräuchlich ist.

Von den normalen zweiholmigen Tragflächen abweichend sind die sogen. Fourniertragflächen, ein Gerippe von Spanten und einer größeren Anzahl von schwächeren Holmen und darüber befestigtem Fournier. Eine Rechnungsmethode die dem Angriff durch längs- und querwirkende Kräfte gerecht wird, ist bisher nicht aufgestellt. Fillunger³⁾ empfiehlt ohne Rücksicht auf die Längskräfte auf Biegung zu rechnen und im Hinblick auf diese Näherung den zu fordernden Sicherheitsgrad höher festzusetzen.

Enthält die Tragfläche nur einen Holm, so ist die zufolge der Drehbeanspruchung des Flügels im Holm auftretende Schubspannung zu bestimmen und mit der aus der Beanspruchung Druck bzw. Zug, Biegung hervorgehenden Spannung zu kombinieren.

5. Stiele oder Streben und Kabel. Stiele erhalten eines günstigen Luftwiderstandes halber in der Regel einen Querschnitt von Tropfenform vom Verhältnis Länge:Breite = 2:1. In Oesterreich waren derartig einseitig zugespitzte Ovalrohre aus Flußstahl normalisiert; Querschnittsflächen und Flächen-Trägheitsmomente (für die Schwerpunkthauptachsen) sind dann durch Ausdrücke von der Form $ab\delta$ bzw. $\beta b^3\delta$ gegeben, wobei δ die Wandstärke des Rohres, b eine Längenabmessung, z. B. die Profilbreite, a und β aus einer einmaligen graphischen Ermittlung bestimmte Koeffizienten sind⁴⁾. Kreisrohre werden gewöhnlich in Ovalform verschalt.

Die Streben werden auf Knickung für den Fall beiderseits gelenkiger Lagerung gerechnet, im elastischen Bereich nach Euler, im plastischen nach empirischen Formeln. gewöhnlich nach v. Tetmajer. Häufig führt man außerdem noch eine Spannungsberechnung durch und nimmt hierzu an, daß die Last exzentrisch (mit einem Hebelarm von etwa $\frac{1}{200}$ der Stablänge) angreift⁵⁾. Sind Stahlrohre (um die Knickgefahr zu verkleinern) mit Holz gefüllt, so ist die Holzfüllung rechnungsmäßig nicht zu berücksichtigen⁶⁾.

¹⁾ Ratzersdorfer, Zur Knickfestigkeit der Tragflächenholme, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1918. Vergl. ferner: Schleusner, Untersuchung über Knicksicherheit von Holmen, Technische Berichte der Inspektion 1917.

²⁾ Ratzersdorfer, Zur Berechnung der Tragflächenholme, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1920. Heft 19. — Siehe ferner Müller-Breslau, Die Berechnung von Tragflächenholmen, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1918, Heft 17/18. Ueber Knickfestigkeit. Zentralblatt der Bauverwaltung 1919.

³⁾ Fillunger, Zur Festigkeitsberechnung von Fourniertragflächen, Oesterr. Flugzeitschrift 1918.

⁴⁾ Trägheits- und Widerstandsmomente der normalisierten Oval- und Rundrohre, k. u. k. Luftfahrarsenal, Wien 1916. Einer graphischen Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten (mit logarithmischen Maßstäben) können die für die Rechnung benötigten Größen unmittelbar entnommen werden. — Vergl. ferner Schröder, Rohrstile für Flugzeuge, Technische Berichte der Inspektion 1918.

⁵⁾ Vergl. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1913, 4. Aufl. S. 874.

⁶⁾ Vergl. die Versuche: Schlink, Ueber Knickfestigkeit von Stahlrohren mit Holzfüllung, Zeitschrift für Flugt. und Motorl. 1916.

In neuerer Zeit werden vielfach Holzstiele mit Ovalprofil verwendet. Hierbei wird oft der Querschnitt in der Mitte stärker gehalten und so neben einer Erhöhung der Knickfestigkeit eine bequeme Anbringung des Beschlages erzielt. Die Bestimmung des günstigsten Längsschnittes, bei dem bei einem gegebenen Gewicht die Knickfestigkeit ein Maximum wird, führt auf ein von Blasius¹⁾ behandeltes Variationsproblem. Mit Annahme ähnlicher Querschnitte ergibt sich, wenn a die Querschnittsdicke im Abstand x vom Stabende, a_0 die größte Dicke in der Mitte und l die Stablänge bedeuten, als Gleichung des

günstigsten Längsschnittes: $x \frac{\pi}{l} = \arcsin \frac{a}{a_0} - \frac{a}{a_0} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{a_0}\right)^2}$. Die Knicklast ist um ein

Drittel größer als bei einem gleichmäßigen Stab von gleichem Materialverbrauch oder anders formuliert: ein unverjüngter Stab von ähnlichem Querschnitt und gleicher Knickfestigkeit hat ein um rd. 15 vH höheres Gewicht als der verjüngte. Die Ersparnis ist, allerdings nur im Hinblick auf das verhältnismäßig geringe Gesamtgewicht der Stiele eines Flugzeuges, nicht übermäßig groß. Infolge der Wirkung des Beschlages verringert sich noch der Vorteil der Verschiebung des Materials von den Enden gegen die Mitte zu. Angenähert kann man bei verjüngten Stielen die Knicklast für einen Querschnitt zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ der Länge von den Enden entfernt, nach den Formeln des gleichmäßigen Stabes berechnen.

Stahladrähte werden zur Abspannung von kleinen Tragflächen, Steuerflächen und Rumpfen verwendet. Da sie leicht überspannt werden und reißen können, sind bei größeren Kräften Drahtseile oder Kabel, d. h. zusammengesetzte Querschnitte, in Gebrauch. Die Festigkeit der Kabel und der stets stärker bemessenen Spannschlösser wird durch Zugversuche bestimmt.

Infolge von Montagespannungen könnten Haupt- und Gegendiagonalen (z. B. die der Innenverspannung, wenn Felder der Tragfläche mit dem Kabel eingestellt werden) gespannt sein. Die Berechnung der Stabkräfte für das dann statisch unbestimmte System hätte mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen von Maxwell-Mohr zu erfolgen. In praxi wird hiervon abgesehen, da bei der zusätzlichen Belastung in der Regel nur eine Diagonale gespannt und die andere schlaff ist.

6. Fahrgestell und Sporn. Die wichtige Aufgabe des Fahrgestells ist es, neben der Ermöglichung von Start und Landung, den Landungsstoß elastisch aufzunehmen. Die Räder erhalten zu diesem Zweck eine Gummibereifung mit Luftpolster, die Radachsen eine Abfederung durch Gummiringe oder Drahtspiralen. Nach v. Mises²⁾ ist, mit Annahme des Formänderungsgesetzes, daß jeder Last eine ihr proportionale Deformation entspricht, das Verhältnis der Beanspruchungen durch Stoßwirkung bzw. durch ruhende Last gegeben durch $\frac{v \sin b}{\sqrt{gq}}$, wenn v die Landungsgeschwindigkeit, b die der Landung zugehörige Bahnneigung, g die Schwerebeschleunigung $9,81 \text{ m/sk}^2$ und q die Einsenkung der Radreifen und der Achsaufhängung unter der ruhenden Last des Flugzeuges bedeuten. Für eine »schulmäßige« Landung mit wagrechter Achse von z. B. $v = 25 \text{ m/sk}$, $b = 6^\circ 30'$ wird nun bei einer gebräuchlichen Abfederung von $q = 5 \text{ cm}$ die Beanspruchung beim Landungsstoß das 3,8 fache derjenigen durch das ruhende Flugzeuggewicht. Diese Beanspruchung wird durch das Fahrgestell auf den Rumpf übertragen. Ohne besondere Federung hätten die Fahrgestellstreben bei dieser Landung infolge der Stoßwirkung eine Last aufzunehmen, die vielleicht das 50 fache Flugzeuggewicht wäre; solchen Anforderungen könnte naturgemäß keine Konstruktion genügen.

In praxi wird das Fahrgestell so ausgeführt, daß die Bruchlast etwa beim 10 fachen Flugzeuggewicht erreicht ist. Man pflegt auch die statische Berechnung für die Belastungsfälle: einseitiger Stoß von unten, Stoß von vorn und Stoß von der Seite vorzunehmen³⁾. Abb. 9 zeigt ein gebräuchliches Bügelfahrgestell. Bei Annahme gelenkiger Knoten ist es ein einfach statisch unbestimmtes Raumbachwerk, dessen Stabkräfte nach Wahl einer

¹⁾ Blasius, Träger kleinster Durchbiegung und Stäbe größter Knickfestigkeit bei gegebenem Materialverbrauch, Zeitschr. für Mathem. und Physik 1914. — Ueber den besten Längsschnitt verjüngter Stiele, Technische Berichte der Inspektion 1918.

²⁾ v. Mises, Fluglehre, Berlin 1918, Abschn. 37. Vergl. a. H. Reissner, Jahrb. d. wissensch. Ges. f. Luftfahrt 1913, S. 95.

³⁾ Vergl. die oben genannten amtlichen Vorschriften sowie: Fahrgestell-Berechnung der Prüfanstalt und Werft der Fliegertruppen, 1916.

Ueberschüssigen (z. B. der Stabkraft in der Achse) mit Anwendung des Minimumsatzes von Menabrea (oder der Elastizitätsgleichung von Maxwell-Mohr) bestimmt werden.

Abb. 9

Im Hinblick auf die willkürlichen Belastungsannahmen erscheint auch das übliche Näherungsverfahren gerechtfertigt, bei dem die Achse als besetzt angesehen wird und die Stabkräfte für das dann statisch bestimmte System berechnet werden. Die Dimensionen der Achse, für die ein Rohr aus Qualitätsstahl verwendet wird, ergeben sich aus der Biegebbeanspruchung.

v. Mises macht auf die interessante Erscheinung aufmerksam, daß oft, wenn beim Aufprallen auf den Boden das Fahrgestell oder sogar das ganze Flugzeug zu Grunde geht, Radreifen und Achsabfederung, also die den ersten Stoß auffangenden Teile unversehrt bleiben. Dies erklärt sich daraus, daß einerseits die Federung nicht vollkommen elastisch ist, andererseits die Formänderung infolge der Massenträgheit der einzelnen Teile eine gewisse Zeit braucht. Die Zerstörung des Materials tritt erst ein, wenn sowohl Spannung als Formänderung eine gewisse Grenze erreichen. Es können daher die federnden Teile große Kräfte weiterleiten, die sie selbst nicht zum Bruch führen, da die entsprechenden großen Formänderungen sich in ihnen in der kurzen Zeit bis zum Bruch nicht ausgebildet haben.

Abb. 10

Auch der Sporndruck wird zufolge der Stoßwirkung ein Vielfaches seines Wertes bei ruhender Last. Der Sporn erhält deshalb, ähnlich wie das Fahrgestell, eine Abfederung¹⁾. A_0 (φ_0) bezeichne die Lage des Flugzeuges, bei der der Sporn gerade den Boden berührt, Abb. 10. Fällt das Flugzeug bei festgehaltenen Rädern aus der Lage A_1 , bei der der Schwerpunkt S des Flugzeuges um h gegen die Lage A_0 gehoben ist, frei auf den Sporn herab, so beginnt in A_0 die Wirkung der Federung; es treten Schwingungen um die Gleichgewichtslage am Stand A_1 ein. Wenn von einer Dämpfung der Schwingung

abgesehen wird, erhält man mit der Annahme, daß der Sporndruck dem Drehungsweg proportional ist, als größten Sporndruck: $P_{\max} = P_1 + \sqrt{P_1^2 + P_1 \frac{2klh}{r \cos \varphi_0}}$. P_1 ist der

Sporndruck in der Gleichgewichtslage am Stand, k die Federkonstante, die Bedeutung von φ_0 , r und l geht aus der Abbildung hervor. Erfolgt der freie Fall aus der Lage A_0 , so ist $h = 0$ und $P_{\max} = 2P_1$. Füllinger berücksichtigt auch den Einfluß einer Vorspannung der Federung und diskutiert die gewonnenen Resultate. $P_{\max}$ ist unvermindert nur von den Teilen des Rumpfes in Spornnähe abzuhalten, bei denen ohnehin ein Ueberschuß an Tragvermögen für Sporndrücke vorhanden ist. Die vom Sporn weiter entfernten Teile werden erst nach einiger Zeit beansprucht und man darf annehmen, daß die Materialfestigkeit mit der Belastungsgeschwindigkeit zugenommen hat. Zahlenmäßige Angaben sind hierüber nicht vorhanden.

Abb. 11

7. Flossen und Ruder, Innensteuerung. Abb. 11 zeigt Flossen und Ruder, die zusammenfassend auch Leitwerk genannt werden. Als Flossen (oder Flächen) werden die festen Teile, als Ruder (oder Steuer) die beweglichen, durch den Führer während des Fluges einstellbaren bezeichnet. D ist die Höhenflosse (Dämpfungsfläche), K die Seitenflosse (Kielfläche), H das Höhenruder, S das Seiten-

¹⁾ Füllinger, Theorie der Spornabfederung von Flugzeugen. Oesterr. Flugzeitschrift 1918.

runder¹⁾. Häufig sind die Leitwerkteile als Stahlrohrrahmen ausgebildet, die mit Stoff bespannt werden; Höhen- und Seitenflosse sind gegen den Rumpf durch Streben abgestützt. Es wird aber die Höhenflosse auch freitragend aus Holz hergestellt; sie besteht dann wie eine Fourniertragfläche aus Holmen und Rippen mit einer Sperrholzverkleidung.

Für die Festigkeitsrechnung wird als angreifende Kraft pro Flächeneinheit die spez. Tragflächenbelastung für Steigflug angenommen; mitunter auch überschlagsweise eine Bruchlast von 300 kg/m². Gewöhnlich begnügt man sich damit, die Rohre einzeln als Biegungsträger zu rechnen und die Ruderachsen auf Drehfestigkeit zu untersuchen. Die freitragende Höhenflosse ist ein auf Biegung beanspruchter Konsolträger. Auch die Querruder, s. Abb. 1, werden ähnlich berechnet.

Die Organe der Innensteuerung, d. h. Fußsteuer, Steuersäule, Handrad bzw. Knüppel, sowie die Steuerleitung, d. h. die zu den Rudern führenden Stangen und Seile, müssen der Belastung der bezüglichen Ruder angepaßt sein. Man geht bei der Bemessung aber auch von den an Hand- und Fußsteuern bei der Betätigung wirkenden Kräften aus. Vielfach überzeugt man sich versuchsweise von der vorhandenen Festigkeit des Leitwerks und der Innensteuerung.

8. Rumpf. Der Rumpf (oder das Boot) hat die Motoranlage, die Behälter, die Bemannung und sonstige Belastung aufzunehmen. An den Rumpf sind das Tragwerk, das Fahrgestell, der Sporn und die Flossen (event. Ruder) angeschlossen. Innerhalb des Rumpfes befindet sich die Innensteuerung und die Steuerleitung.

Der Rumpf besteht in der Regel aus vier hölzernen Längsträgern (Holmen), die in Abständen von etwa 50 cm durch vertikale und horizontale Querstäbe (Spante) verbunden sind. Bei »Sperrholzrümpfen« ist über dem Gerippe der Holme und Spanten eine Sperrholzbeplankung angebracht. Abgespannte oder »Gitterrümpfe« erhalten zwischen den einzelnen Spanten in jeder Ebene eine diagonale Drahtverspannung. Die Verkleidung ist Stoff oder ebenfalls Sperrholz. Auch Stahlrümpfe sind in Verwendung.

Die statische Berechnung wird für die Beanspruchung am Stand und im Steigflug mit einer 8- bis 10fachen Bausicherheit durchgeführt. Am Stand ruht der Rumpf auf Fahrgestell und Sporn, die angreifenden Kräfte ergeben sich aus der Gewichtsverteilung. Für den Flug wird angenommen, daß der Rumpf an der Tragfläche hängt. Als wirkende Kräfte kommen in Betracht: Eigengewicht, Druck auf Höhenflosse und Höhenruder und seitlicher Druck auf Seitenflosse und Seitenruder mit der spez. Tragflächenbelastung pro Flächeneinheit (oder mit der Bruchlast von 300 kg/m²) und die Belastung auf Rumpfoberseite.

Bei Gitterrümpfen berechnet man die Stabkräfte der Holme und Diagonalen²⁾. Den Sperrholzrumpf betrachtet man angenähert als homogenen, auf Biegung beanspruchten Stab. Ist z. B. h der vertikale Abstand der Holme, so ist im betreffenden Schnitt das Trägheitsmoment von vier gleichen Holmen mit der Querschnittsfläche f für die wagrechte Schwerachse $\frac{f h^2}{4}$. Von einer nachträglichen Berücksichtigung der Torsion sieht man oft

ab, da die größten Biegungsspannungen nicht an derselben Stelle wie die größten Torsionsspannungen auftreten. Das Fournier wird keinesfalls in Rechnung gestellt.

Die im Rumpf untergebrachten Behälter und der Motor werden fest verankert und die Befestigung gewöhnlich mit 20facher Sicherheit konstruiert. Besonders widerstandsfähig wird der im Bereich der Inzassen und des Motors liegende Teil ausgebildet.

9. Luftschrauben oder Propeller. Ueber die Berechnung der Luftschrauben auf Festigkeit sollen hier nur wenige Andeutungen genügen; weitere Ausführungen müssen einem besonderen Bericht vorbehalten bleiben. Fast ausschließlich werden zweiflügelige (selten vierflügelige) Luftschrauben aus Holz verwendet. Abb. 12 zeigt die Ansicht und den einem Tragflächenprofil entsprechenden Querschnitt eines gewöhnlichen Propellers.

Die Flügel der Luftschrauben können als elastische, stabförmige Körper aufgefaßt werden, die durch die Luftkraft und Fliehkraft auf

Abb. 12

¹⁾ Vergl. v. Mises, Fluglehre, Berlin 1918, Abschn. 26 und 29.

²⁾ Vergl. Zschetzke, Beitrag zur Berechnung von Tragwerken mit veränderlicher Höhe Zeitschr. des österr. Ing.- und Arch.-Vereins 1895.

Biegung und gleichzeitig durch die Fliehkraft auf Zug beansprucht sind. Der Kraftangriff ist ähnlich dem eines gezogenen Holmes und Reißner¹⁾ berücksichtigt die durch Querlast und Zugkraft entstehende Ausbiegung. In der Nähe der Nabe, von der Schraubenachse bis in eine Entfernung von ca. 0,3 des Radius muß aus konstruktiven Gründen eine größere Stärke eingehalten werden, als es der Festigkeit entspricht, ebenso an der Flügelspitze, wo schwächere Ausführungen leicht ein sogen. Flattern zur Folge haben. Der zweckmäßigen Dimensionierung ist somit nur ein begrenzter Teil zugänglich und es kann daher der Einfachheit halber die Ausbiegung außer acht gelassen werden.

Die Rechnung wird erleichtert, wenn sämtliche Luftschraubenquerschnitte einander ähnlich angenommen sind. Für ein bestimmtes Profil können dann (nach einer einmaligen graphischen Ermittlung) Flächeninhalt, Trägheits- und Widerstandsmomente sämtlicher Querschnitte aus Profilbreite und -höhe berechnet werden²⁾. Als gegeben werde angesehen: Radius R , Steigungswinkel α und Blattbreite der Luftschraube, die Tourenzahl am Stand n pro Minute bei der Motorleistung L in PS und die Flugzeuggeschwindigkeit v m/sk, die mit der Luftschraube erzielt werden soll. Die Querschnittshöhen sind gesucht.

Zur Gewinnung einfacher Ausdrücke nehmen wir näherungsweise eine mittlere Blattbreite an. Betrachtet man die Verhältnisse am Stand für die Festigkeitsrechnung als maßgebend und setzt man die Zugkraft am Stand doppelt so groß an wie im Flug, so erhält man für den Querschnitt im Abstand ϱ von der Luftschraubenachse zufolge der Luftkraft die Biegemomente bezüglich der Schwerpunktsachsen parallel und senkrecht zur Profilschne:

$$M_1 = \psi \left(\frac{Z R}{4} \cos \alpha + \frac{M}{6} \sin \alpha \right) \text{ und } M_2 = \psi \left(\frac{Z R}{4} \sin \alpha - \frac{M}{6} \cos \alpha \right). \text{ Hierbei sind:}$$

$\psi = 3 - 4 \frac{\varrho}{R} + \left(\frac{\varrho}{R} \right)^4$, Z die Zugkraft eines Flügels $75 \eta \frac{L}{v}$, M das vom Motor erzeugte Drehmoment $716 \frac{L}{n}$ kg m, η der Wirkungsgrad des Propellers gleich 75 bis 80 vH. In

dem Teil des Propellers, der untersucht werden soll, ist das resultierende Biegemoment nahezu zusammenfallend mit dem Biegemoment M_1 und es kann deshalb die Rechnung auf den Fall der normalen Biegung durch M_1 zurückgeführt werden.

Für den Querschnitt ϱ von Propellermitte entfernt ist die Fliehkraft $C_p = \pi \int_{r=\varrho}^R f_r r dr$ und das Moment der Fliehkraft $M_p = \pi \int_{r=\varrho}^R f_r r c dr$. Es sind: $\pi = \frac{\gamma}{g} \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2$, γ das spez. Ge-

wicht der Luftschraube, f_r der Luftschraubenquerschnitt im Abstand r von der Drehachse und c der Abstand des Schwerpunkts eines Querschnitts vom Schwerpunkt des Schnittes ϱ , senkrecht zur Profilschne des Schnittes ϱ gemessen. Ist der Propeller in seinen Dimensionen festgelegt, so können die beiden Integrale graphisch ausgewertet werden.

Der Querschnitt f_ϱ ist durch das Biegemoment $M_1 - M_p$ und die Zugkraft C_p ergriffen, die Spannungen sind für die kombinierte Beanspruchung »Zug, Biegung« zu bestimmen. Man geht so vor, daß man vorläufig die Fliehkraftwirkung unberücksichtigt läßt und angenäherte Werte der Querschnittshöhen berechnet, diese dann im Durchschnitt um ca. 10 vH abmindert und für den hierdurch gegebenen Propeller die genauere Spannungswerte aufsucht.

10. Beschläge und andere Teile. Die den Zusammenschluß der einzelnen Organe vermittelnden Konstruktionen, die Beschläge, müssen sorgfältig konstruiert werden und es wird zweckmäßig ihre Festigkeit durch Zerreißproben kontrolliert. Viele Brüche sind auf mangelhafte Knotenpunktkonstruktionen zurückzuführen. Teile des Flugzeuges, die bei der Beförderung, bei der Montage oder durch Unvorsichtigkeit leicht verletzt werden können, werden entsprechend reichlich dimensioniert.

11. Bruchproben. Wiederholt wurde im Laufe dieser Darlegungen bemerkt, daß man sich von den Festigkeitseigenschaften der verwendeten Materialien, sowie von der Festigkeit einzelner Flugzeugteile durch Versuche überzeugt. Es ist dies der gewöhn-

¹⁾ Reißner, Ueber die Biegebungsbeanspruchung von Schraubenpropellern und die entlastende Wirkung der Zentrifugalkraft, Technische Berichte der Inspektion 1918. — Vergl. ferner Dietzins, Untersuchung von Luftschrauben auf Festigkeit und richtige Formgebung, Technische Berichte der Inspektion 1919.

²⁾ Festigkeitsberechnung von Luftschrauben, k. u. k. Fliegerarsenal, Wien 1917.

liche Vorgang der Materialprüfung und es wird bei der Untersuchung eine der Wirklichkeit möglichst angenäherte Belastung hergestellt. Im Flugzeugbau wird aber, hauptsächlich wegen der großen Unsicherheit in den Annahmen über die Materialkonstanten, die zulässigen Belastungen usw., auch eine Bruchprobe des ganzen Tragwerks, d. h. der Zelle und der Pyramide, vorgenommen, ein Versuch, der zugleich eine Kontrolle für die Richtigkeit der Festigkeitsrechnung bildet. Gewöhnlich wird die Belastungsprobe für den Steigflug ausgeführt¹⁾.

Wenn man vom gesamten Flugzeuggewicht G das Gewicht G_1 der Tragzelle abzieht, so erhält man, wie eingangs beschrieben, die beim normalen Flug die Zelle angreifende Last. Man wendet nun das Flugzeug um, unterstützt den Rumpf an den Stellen, wo im Betrieb die größten Lasten, wie Motor, Besatzung und Benzinvorrat liegen, so daß bei Belastung im Rumpf eine ähnliche Beanspruchung wie im Flug (d. h. ein ähnlicher Verlauf der Biegemomente und Querkräfte) hervorgerufen wird. Erreicht wird dies einfach durch Anwendung eines Satzes von Wagebalken (Balance)trägern; zweiarmige Hebel bzw. einfache Balken übertragen die Unterstützungskräfte in statisch bestimmter Weise. Bei der Bruchprobe werden die jetzt nach oben gekehrten Flügelunterseiten mit Gewichten, gewöhnlich mit Sand belastet. Um den Zustand für normalen Steigflug zu erreichen, ist insgesamt ein Gewicht von $G - 2 G_1$ aufzubringen, da das Gewicht G_1 der Zelle im Sinne der Belastung wirkt. Bei der in der Regel für Steigflug geforderten fünffachen Bausicherheit darf also die Konstruktion erst bei einer Sandlast von $5 G - 6 G_1$ ihre Tragfähigkeit verlieren.

Die Herstellung eines Flugzeuges ist heute fast ausschließlich eine Konstruktionsangelegenheit geworden. Ebenso wie bei Tragwerken des Hoch- oder Brückenbaues wird auf Grund der statischen Berechnung eine Dimensionierung der einzelnen Organe vorgenommen. Beim Bau größerer Flugzeuge tritt die Notwendigkeit der sachgemäßen Berechnung auch augenfällig zutage. Wir wollen jedoch hiermit keineswegs die Rolle der Statik überschätzen. Nur die richtige Umsetzung aeromechanischer Erkenntnisse in die Praxis, der Bau leichter Motore und insbesondere Ausdauer und Entschlossenheit mutiger Flieger haben es bewirkt, daß »zu des Geistes Flügeln auch körperliche Flügel sich gesellen«. 3

Über neuere Lehrbücher der praktischen Analysis.

Von L. BIBERBACH in Frankfurt a. M.

Läßt man das Auge über die Titel der im vergangenen Jahrzehnt erschienenen Lehrbücher aus dem Gebiete der praktischen Mathematik gleiten²⁾, so fällt auf den ersten Blick das Vorwiegen des Graphischen auf. Graphische Methoden nennt denn auch Runge, dem das ganz neue Gebiet ein gut Teil seines Lebensbewußtseins verdankt, sein jetzt in zweiter deutscher Auflage vorliegendes Buch, das aus in Amerika gehaltenen Vorträgen hervorgegangen ist. Leitfaden zum graphischen Rechnen nennt Mehmke sein in der gleichen Teubnerschen Sammlung mathematischer und physikalischer Schriften für Studierende und Ingenieure erschienenenes Werk. Ueber graphische Integration schreibt Willers, einer der leider wenigen auf unserm Gebiete bewanderten Oberlehrer, ein Bändchen für die Sammlung Goeschel. »Praktische Analysis« freilich nennt der Vertreter der Mathematik an der Bergakademie in Clausthal, v. Sanden, sein Büchlein, das gleichfalls im Teubnerschen Verlag erschienen ist; doch schon ein Blick aufs Inhaltsverzeichnis läßt erkennen, daß der Verfasser trotz seines Strebens aufs Ganze das Graphische nicht weniger betont als die übrigen Autoren. Neben diesem Vorwiegen des Graphischen fällt die bewußte Einstellung auf die Probleme der Analysis sofort in die Augen, sowie man nur einen Vergleich mit den nur wenig älteren Lehrbüchern von Biermann, Bruns, Lüroth über numerisches Rechnen versucht. Die Methoden der mechanischen Quadratur sind das einzige, was dort zur Bewältigung der Probleme vor-

¹⁾ Saliger, Vorträge über Statik des Flugzeugbaues. k. u. k. Fliegerarsenal, Wien 1916. — Hoff, Verfahren bei Flügelfestigkeitsprüfungen, Zeitschr. f. Flugt. und Motorl., 1916.

²⁾ C. Runge, Graphische Methoden, 2. Aufl., Leipzig 1919; R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen, Leipzig 1917; A. Willers, Graphische Integration, Leipzig 1920; H. v. Sanden, Praktische Analysis, Leipzig 1914.