Sulla costruzione della superficie del 3.^o ordine individuata da 19 punti.

(Di M. PANNELLI, a Pavia.)

La presente Memoria ha per oggetto la costruzione della superficie del 3.^o ordine individuata da 19 punti. Essa è divisa in due paragrafi. Nel primo vengono studiate le proprietà elementari di una particolare corrispondenza fra gli elementi di tre forme fondamentali di seconda specie, detta *correlazione di seconda specie*, e si trovano esposte le costruzioni di siffatta corrispondenza in alcuni casi particolari. Nel secondo vien dimostrata la possibilità di generare la superficie del 3.^o ordine mediante tre stelle di raggi legate fra loro da una correlazione di seconda specie, e vien data la costruzione della superficie medesima, quando di questa si conoscano 19 punti.

§ 1.

1. Siano $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ le coordinate omogenee di tre punti X, Y, Z appartenenti a tre piani α, β, γ , e fra esse abbia luogo la relazione espressa dalla seguente equazione simbolica:

$$a_x b_y c_z = 0, \tag{1}$$

nella quale i simboli a_i, b_j, c_k ($i=j=k=1, 2, 3$) hanno significato di quantità solo nelle combinazioni $a_i b_j c_k = a_i b_k c_j = \dots$. In virtù di questa relazione, fra i punti dei tre piani dati resta stabilita una corrispondenza particolare, che è precisamente quella che qui vien chiamata *correlazione di seconda specie*.

Tre punti X, Y, Z appartenenti rispettivamente ai tre piani α, β, γ e aventi coordinate che soddisfano l'equazione (1), si diranno *corrispondenti*.

Preso ad arbitrio un punto X , o Y , o Z , sul piano α , o β , o γ , cioè attribuiti valori particolari alle coordinate x_1, x_2, x_3 , o y_1, y_2, y_3 , o z_1, z_2, z_3 , l'equazione (1) rappresenta una correlazione fra i punti dei due piani rimanenti, la quale, a scanso di equivoci, si dirà di *prima specie*, e si chiamerà *corrispondente* al punto considerato nella data correlazione di seconda specie. Dunque:

I. « A ciascun punto di uno qualunque dei tre piani α, β, γ corrisponde una correlazione di prima specie fra i punti dei due piani rimanenti. »

In particolare, ai tre punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ di α corrispondono le correlazioni di prima specie definite dalle equazioni seguenti:

$$a_1 b_y c_z = 0, \quad a_2 b_y c_z = 0, \quad a_3 b_y c_z = 0. \quad (2)$$

Considerate le y_1, y_2, y_3 come variabili, queste tre equazioni coesistono, se indicando con $a'_i b'_j c'_k$ e $a''_i b''_j c''_k$ simboli equivalenti ad $a_i b_j c_k$, si ha:

$$\begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & a_1 a'_2 a''_3 c_2 c'_3 c''_3 = 0, \\ b''_1 & b''_2 & b''_3 \end{array}$$

ossia, permutando fra loro i simboli equivalenti e poi sommando le equazioni risultanti:

$$(a a' a'')(b b b') c_2 c'_2 c''_2 = 0,$$

dove con la notazione $(b b b')$ s'indichi il determinante che figura nell'equazione precedente e con $(a a' a'')$ il determinante analogo formato con le a . L'equazione ottenuta rappresenta una curva del 3° ordine C_γ del piano γ , la quale è dunque il luogo di un punto Z^0 di γ cui corrisponde in β un punto Y^0 determinato da due qualsivogliano delle equazioni (2), col quale quello forma una coppia di punti coniugati (*) comune alle tre correlazioni date dalle medesime equazioni (2).

In modo analogo si trova che il punto Y^0 descrive in β una curva del 3° ordine C_β , di cui l'equazione è:

$$(a a' a'')(c c' c'') b_y b'_y b''_y = 0.$$

(*) Adottando le denominazioni usate dal sig. HIRST nella sua *Note in the Correlation of two Planes* (Annali di Matematica pura ed applicata, serie 2.^a, tom. 6 e 8) si diranno *coniugati* due punti corrispondenti in una correlazione di prima specie. Così in seguito un punto ed una retta corrispondenti nella correlazione medesima, si chiameranno *polo* e *polare* rispettivamente.

Ora le correlazioni di prima specie fra i punti dei due piani β e γ , corrispondenti ai punti X di α , formano una rete, che ha per equazione:

$$x_1 \cdot a_1 b_y c_z + x_2 \cdot a_2 b_y c_z + x_3 \cdot a_3 b_y c_z = 0,$$

e questa mostra che le coppie di punti coniugati comuni alle correlazioni (2) appartengono anche a ciascuna correlazione della rete.

Se invece di partire dal piano α , si parte dal piano β , si trova che la curva C_α di α , analoga alle anzidette curve C_β e C_γ , ha per equazione:

$$(b b' b'')(c c' c'') a_x a'_x a''_x = 0,$$

e che quella del piano γ coincide con la stessa curva C_γ . Infine se si parte dal piano γ , si ritrovano ancora le curve C_α e C_β .

Dunque:

II. « Le correlazioni di prima specie fra i punti di due dei tre piani α, β, γ , corrispondenti ai punti del terzo piano, formano una rete. V'è un numero semplicemente infinito di coppie di punti coniugati comuni alle correlazioni di una medesima rete, e i punti di siffatte coppie generano sui tre piani le tre curve $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma$. »

Nella correlazione di prima specie:

$$a_x b_y c_z = 0,$$

fra i punti dei due piani β e γ , corrispondente ad un punto X dato in α , la polare di un punto Y di β , o Z di γ , ha per equazione:

$$a_x b_y c_1 \cdot z_1 + a_x b_y c_2 \cdot z_2 + a_x b_y c_3 \cdot z_3 = 0,$$

oppure:

$$a_x c_z b_1 \cdot y_1 + a_x c_z b_2 \cdot y_2 + a_x c_z b_3 \cdot y_3 = 0;$$

quindi è indeterminata, se si ha simultaneamente:

$$a_x b_y c_1 = 0, \quad a_x b_y c_2 = 0, \quad a_x b_y c_3 = 0, \quad (3)$$

oppure:

$$a_x c_z b_1 = 0, \quad a_x c_z b_2 = 0, \quad a_x c_z b_3 = 0. \quad (4)$$

Ora esprimendo la condizione che le equazioni dell'una o dell'altra di queste due terne coesistano, considerate come variabili le y_1, y_2, y_3 , o le z_1, z_2, z_3 , si ottiene in ogni caso l'equazione della curva C_α . Ma nelle ipotesi fatte la correlazione considerata è una correlazione speciale con punti singolari, ossia

secondo le denominazioni del sig. HIRST (*), una *correlazione speciale centrale*; dunque:

III. « La curva C_α , o C_β , o C_γ , è ancora il luogo di un punto del piano α , o β , o γ , cui corrisponde una correlazione speciale centrale fra i punti dei due piani rimanenti. »

In modo analogo si trova:

IV. « Le curve C_β e C_γ , C_γ e C_α , C_α e C_β sono i luoghi dei punti singolari delle correlazioni speciali centrali fra i punti dei piani β e γ , γ e α , α e β , corrispondenti ai punti delle curve C_α , C_β , C_γ rispettivamente. »

Risolvendo due qualsivogliano delle equazioni (3), o (4), rispetto alle y_1 , y_2 , y_3 , o alle z_1 , z_2 , z_3 , si ottengono le coordinate del punto singolare $Y^{(1)}$ del piano β , o quelle del punto singolare $Z^{(1)}$ del piano γ , appartenente alla correlazione speciale centrale corrispondente ad un punto dato X sulla curva C_α . Così ad esempio, se si prendono le ultime due delle equazioni (3), nella seconda delle quali si immaginino sostituiti i simboli $a'_i b'_j c'_k$ ai loro equivalenti $a_i b_j c_k$, si ha:

$$y_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ b'_2 & b'_3 \end{vmatrix} c_2 c'_3 a_x a'_x$$

$$y_2 = \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ b'_3 & b'_1 \end{vmatrix} c_2 c'_3 a_x a'_x$$

$$y_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b'_1 & b'_2 \end{vmatrix} c_2 c'_3 a_x a'_x,$$

dove scambiando fra loro i simboli $a_i b_j c_k$ e $a'_i b'_j c'_k$, e poi sommando le due espressioni che così si ottengono per la medesima coordinata, si ricava (a meno del fattore 2):

$$y_1 = (bb')_1 (cc')_1 a_x a'_x$$

$$y_2 = (bb')_2 (cc')_1 a_x a'_x$$

$$y_3 = (bb')_3 (cc')_1 a_x a'_x,$$

indicando con le notazioni $(bb')_1, \dots$ i determinanti $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ b'_2 & b'_3 \end{vmatrix}, \dots$. Ora se in luogo delle ultime due delle equazioni (3), si considerano la terza e la prima,

(*) HIRST, loc. cit.

oppure le prime due, si ottengono per y_1, y_2, y_3 espressioni che differiscono dalle precedenti solo per lo scambio del determinante $(cc')_1$ col determinante $(cc')_2$, oppure $(cc')_3$. Quindi il punto singolare $Y^{(1)}$ di β e quello $Z^{(1)}$ di γ , corrispondenti ad un punto dato X di C_α hanno per coordinate:

$$\begin{aligned} y_1 &= (bb')_1 (cc')_i a_x a'_x, & z_1 &= (cc')_1 (bb')_i a_x a'_x \\ y_2 &= (bb')_2 (cc')_i a_x a'_x, & z_2 &= (cc')_2 (bb')_i a_x a'_x \\ y_3 &= (bb')_3 (cc')_i a_x a'_x, & z_3 &= (cc')_3 (bb')_i a_x a'_x \end{aligned}$$

rispettivamente, dove i può avere uno qualunque dei valori 1, 2, 3.

Parimenti il punto singolare $Z^{(1)}$ di γ e quello $X^{(1)}$ di α , corrispondenti ad un punto dato Y di C_β hanno per coordinate:

$$\begin{aligned} z_1 &= (cc')_1 (aa')_i b_y b'_y, & x_1 &= (aa')_1 (cc')_i b_y b'_y \\ z_2 &= (cc')_2 (aa')_i b_y b'_y, & x_2 &= (aa')_2 (cc')_i b_y b'_y \\ z_3 &= (cc')_3 (aa')_i b_y b'_y, & x_3 &= (aa')_3 (cc')_i b_y b'_y \end{aligned}$$

rispettivamente.

Infine il punto singolare $X^{(1)}$ di α e quello $Y^{(1)}$ di β , corrispondenti ad un punto dato Z di C_γ , hanno per coordinate:

$$\begin{aligned} x_1 &= (aa')_1 (bb')_i c_z c'_z, & y_1 &= (bb')_1 (aa')_i c_z c'_z \\ x_2 &= (aa')_2 (bb')_i c_z c'_z, & y_2 &= (bb')_2 (aa')_i c_z c'_z \\ x_3 &= (aa')_3 (bb')_i c_z c'_z, & y_3 &= (bb')_3 (aa')_i c_z c'_z \end{aligned}$$

rispettivamente.

2. Preso ad arbitrio un punto Y sul piano β e un punto Z sul piano γ , resta in generale determinata sul piano α una retta U di coordinate:

$$u_1 = b_y c_z a_1, \quad u_2 = b_y c_z a_2, \quad u_3 = b_y c_z a_3, \quad (5)$$

la quale si dirà *corrispondente* alla coppia di punti (YZ) nella data correlazione di seconda specie.

Parimenti alla coppia di punti (ZX) dei piani γ e α corrisponde sul piano β la retta V di coordinate:

$$v_1 = c_z a_x b_1, \quad v_2 = c_z a_x b_2, \quad v_3 = c_z a_x b_3.$$

Infine alla coppia di punti (XY) dei piani α e β corrisponde sul piano γ la retta W di coordinate:

$$w_1 = a_x b_y c_1, \quad w_2 = a_x b_y c_2, \quad w_3 = a_x b_y c_3.$$

Dunque:

I. « Ad una coppia di punti presi rispettivamente sopra due qualsivogliano dei tre piani α , β , γ , corrisponde nel terzo una retta. »

Al punto Y di β , o Z di γ , corrisponde fra i punti dei due piani α e γ , o α e β , la correlazione di prima specie definita dall'equazione:

$$a_x b_y c_x = 0,$$

nella quale le y_1, y_2, y_3 , o le z_1, z_2, z_3 , siano le coordinate del punto Y , o Z . In questa correlazione il punto Z , o Y , ha per polare sul piano α una retta U che coincide con la (5). Quindi:

II. « La retta che in uno dei tre piani α , β , γ corrisponde ad una coppia di punti presi rispettivamente sopra gli altri due piani, è la polare di uno qualunque di questi punti rispetto alla correlazione di prima specie corrispondente all'altro. »

La retta u corrispondente alla coppia di punti (YZ) è indeterminata, se si ha simultaneamente:

$$b_y c_x a_1 = 0, \quad b_y c_x a_2 = 0, \quad b_y c_x a_3 = 0,$$

ossia se quei due punti Y, Z costituiscono una coppia di punti coniugati Y^0, Z^0 comune alle correlazioni di prima specie corrispondenti ai punti del piano α . Seguendo le denominazioni già in uso per le omografie binarie di seconda specie, si dirà che due punti siffatti formano una *coppia neutra*: epperò (I, II) si ha ancora:

III. « Le curve C_β e C_γ , C_γ e C_α , C_α e C_β sono i luoghi dei punti « delle coppie neutre dei piani β e γ , γ e α , α e β . »

3. A due punti $X'(x'_1, x'_2, x'_3)$ e $X''(x''_1, x''_2, x''_3)$ del piano α corrispondono fra i piani β e γ le correlazioni di prima specie:

$$a_x b_y c_x = 0, \quad a_{x''} b_y c_x = 0,$$

e ad un punto qualunque X della retta $X'X''$ del quale le coordinate sono:

$$x_1 = \lambda x'_1 + \mu x''_1, \quad x_2 = \lambda x'_2 + \mu x''_2, \quad x_3 = \lambda x'_3 + \mu x''_3,$$

corrisponde la correlazione:

$$[a_1(\lambda x'_1 + \mu x''_1) + a_2(\lambda x'_2 + \mu x''_2) + a_3(\lambda x'_3 + \mu x''_3)] b_y c_x = 0.$$

ossia:

$$(\lambda a_{x'} + \mu a_{x''}) b_y c_x = 0,$$

o infine:

$$\lambda a_x b_y c_z + \mu a_x' b_y c_z = 0, \quad (6)$$

epperò:

I. « Ad una punteggiata di uno qualunque dei tre piani α, β, γ corrisponde fra gli altri due piani un fascio di correlazioni di prima specie, proiettivo a quella punteggiata. »

Un punto Y di β , o Z di γ , ha per polare, sul piano γ , o β , rispetto ad una qualunque delle correlazioni del fascio la retta di cui l'equazione è la (6), nella quale le y_1, y_2, y_3 , o le z_1, z_2, z_3 , siano le coordinate del punto dato. Quindi al variare della correlazione nel fascio, la polare anzidetta descrive un fascio a quello proiettivo. Il centro di questo nuovo fascio si dirà *corrispondente* alla coppia formata dalla retta e dal punto considerati nella data correlazione di seconda specie; epperò:

II. « Ad una coppia formata da una retta e da un punto presi rispettivamente sopra due qualsivogliano dei tre piani α, β, γ , corrisponde nel terzo un punto, che è il centro del fascio generato dalle polari del punto della coppia rispetto alle correlazioni di prima specie corrispondenti ai punti della retta della coppia medesima. »

In virtù del teorema II del n.^o 2, la proposizione precedente può enunciarsi anche così:

III. « Il punto che in uno dei tre piani α, β, γ corrisponde ad una coppia formata da una retta e da un punto presi rispettivamente sopra gli altri due piani, è il polo di quella retta rispetto alla correlazione di prima specie corrispondente a questo punto. »

Supposto che la retta della coppia sia $X'X''$ e il punto sia un punto Y di β , le coordinate del punto di γ corrispondente alla coppia considerata sono date dalle equazioni:

$$a_x b_y (c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3) = 0$$

$$a_x' b_y (c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3) = 0.$$

Da queste si ricava, ad esempio:

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_x b_y c_2 & a_x b_y c_3 \\ a_x' b_y' c_2 & a_x' b_y' c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x b_y c_2 & a_x b_y c_3 \\ a_x' b_y' c_2 & a_x' b_y' c_3 \end{vmatrix}} = a_x a_x' b_y b_y' (c c')_1,$$

donde scambiando $a_i b_j c_k$ con $a_i' b_j' c_k'$ e poi sommando l'eguaglianza risultante con la precedente, si deduce (a meno del fattore 2):

$$z_1 = (a_x a_x' - a_x' a_x) b_y b_y' (c c')_1.$$

Ora si ha:

$$\begin{aligned}
 a_x a'_x - a'_x a_x &= \begin{vmatrix} a_x & a_{x'} \\ a'_{x'} & a'_{x''} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 & a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x''_3 \\ a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + a'_3 x'_3 & a'_1 x''_1 + a'_2 x''_2 + a'_3 x''_3 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = (aa)_1 (x'x'')_1 + (aa')_2 (x'x')_2 + (aa)_3 (x'x'')_3 = \\
 &= (aa')_1 u_1 + (aa')_2 u_2 + (aa')_3 u_3 = (aa'u),
 \end{aligned}$$

dicendo u_1, u_2, u_3 le coordinate della retta $U = X'X''$; dunque è:

$$z_1 = (cc')_1 (aa'u) b_y b'_y.$$

In modo analogo si calcolano z_2 e z_3 . Quindi il punto Z di γ , e quello Y di β corrispondenti alle coppie (UY) e (UZ) , hanno per coordinate:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= (cc')_1 (aa'u) b_y b'_y, & y_1 &= (bb')_1 (aa'u) c_x c'_x \\
 z_2 &= (cc')_2 (aa'u) b_y b'_y, & y_2 &= (bb')_2 (aa'u) c_x c'_x \\
 z_3 &= (cc')_3 (aa'u) b_y b'_y, & y_3 &= (bb')_3 (aa'u) c_x c'_x
 \end{aligned} \quad (7)$$

rispettivamente.

Parimenti il punto X di α e quello Z di β corrispondenti alle coppie (VZ) e (VX) , hanno per coordinate:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (aa')_1 (bb'v) c_x c'_x, & z_1 &= (cc')_1 (bb'v) a_x a'_x \\
 x_2 &= (aa')_2 (bb'v) c_x c'_x, & z_2 &= (cc')_2 (bb'v) a_x a'_x \\
 x_3 &= (aa')_3 (bb'v) c_x c'_x, & z_3 &= (cc')_3 (bb'v) a_x a'_x
 \end{aligned} \quad (8)$$

rispettivamente.

Infine il punto Y di β e quello X di α corrispondenti alle coppie (WX) e (WY) , hanno per coordinate:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= (bb')_1 (cc'w) a_x a'_x, & x_1 &= (aa')_1 (cc'w) b_y b'_y \\
 y_2 &= (bb')_2 (cc'w) a_x a'_x, & x_2 &= (aa')_2 (cc'w) b_y b'_y \\
 y_3 &= (bb')_3 (cc'w) a_x a'_x, & x_3 &= (aa')_3 (cc'w) b_y b'_y
 \end{aligned} \quad (9)$$

rispettivamente.

Dal teorema precedente e da una nota proprietà delle correlazioni di prima specie segue:

IV. « I punti che in uno dei tre piani α, β, γ corrispondono alle coppie α formate da un punto fisso di un altro dei tre piani medesimi e da una retta

« variabile in un fascio del terzo piano, generano una punteggiata proiettiva
« a questo fascio. »

4. Se X, Y, Z sono tre punti corrispondenti fra loro, alla coppia formata da due qualunque di essi corrisponde una retta che passa per il terzo. Inoltre se il punto X resta fisso e il punto Y percorre una retta V di β , la retta di γ corrispondente alla coppia (XY) ruota intorno ad un punto Z . Quindi alla coppia formata da Z e da un punto qualunque Y di V , corrisponde una retta che passa per X . Perciò come alla coppia (XV) corrisponde il punto Z , così alla coppia (ZV) corrisponde il punto X . Quindi uno qualunque dei due sistemi di formole (7), (8) e (9), è una conseguenza dell'altro.

Alla coppia (YW) corrisponde il punto X dato dalle formole (9) (a destra). Se il punto Y percorre la retta V :

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0,$$

si ottiene l'equazione del luogo descritto dal punto corrispondente X , eliminando le y_1, y_2, y_3 fra l'equazione precedente e le (9) (a destra), le quali ultime, per l'osservazione fatta pocanzi, possono essere sostituite dalle (9) (a sinistra). Quindi l'equazione risultante è evidentemente:

$$(bb'v)(cc'w)a_x a'_x = 0,$$

epperò il luogo cercato è una conica. Questa si dirà *corrispondente* alla coppia di rette (VW) , nella data correlazione di seconda specie.

Si giunge al medesimo risultato, se si cerca il luogo descritto in α dal punto X corrispondente alla coppia (ZV) , quando si supponga che il punto Z di questa coppia percorra la retta W .

Dunque:

I. « Ad una coppia di rette prese rispettivamente sopra due qualsivoglian dei tre piani α, β, γ corrisponde nel terzo una conica. Questa è il luogo dei punti del terzo piano corrispondente alle coppie formate da una qualunque delle due rette date e dai punti dell'altra. »

Come alla coppia di rette (VW) corrisponde la conica:

$$(bb'v)(cc'w)a_x a'_x = 0, \tag{10}$$

così alla coppia di rette (WU) corrisponde la conica:

$$(cc'w)(aa'u)b_y b'_y = 0, \tag{11}$$

e infine alla coppia di rette (UV) corrisponde la conica:

$$(aa'u)(bb'v)c_z c'_z = 0. \tag{12}$$

Le equazioni (10), (11) e (12) rappresentano le correlazioni di prima specie fra le rette di due dei tre piani α , β , γ corrispondenti ai punti del terzo piano.

In virtù del teorema III del n.º 3, la proposizione precedente può enunciarsi anche così:

II. « La conica che in uno dei tre piani α , β , γ corrisponde ad una « coppia di rette prese rispettivamente sopra gli altri due piani, è il luogo « dei poli di una qualunque di queste due rette rispetto alle correlazioni di « prima specie del fascio corrispondente all'altra. »

5. Chiamando col sig. HIRST *classe* e *ordine* di un sistema semplicemente infinito di correlazioni di prima specie, la classe dell'involuppo delle polari di un medesimo punto e l'ordine del luogo dei poli di una medesima retta rispetto alle correlazioni del sistema, si ha (II, 3 e II, 4):

I. « Un fascio di correlazioni di prima specie è della prima classe o « del secondo ordine. »

È noto (*) che dette μ e ν le due *caratteristiche* (classe e ordine) di un sistema semplicemente infinito di correlazioni di prima specie, il numero π delle correlazioni speciali centrali del sistema, e quello λ delle correlazioni speciali assiali (**) del sistema medesimo, sono dati dalle formole:

$$\pi = 2\nu - \mu.$$

$$\lambda = 2\mu - \nu.$$

Nel caso in cui il sistema dato sia un fascio si ha $\mu = 1$, $\nu = 2$; quindi si trova $\pi = 1$, $\lambda = 0$; epperò:

II. « Un fascio di correlazioni di prima specie contiene tre correlazioni speciali centrali e non contiene alcuna correlazione speciale assiale. »

La prima parte di questo teorema è anche una conseguenza della proposizione III del n.º 1.

Ad una retta u di α corrisponde un fascio di correlazioni fra i punti dei due piani β e γ , ed in virtù di questo ad ogni punto Y di β corrisponde un punto Z di γ e viceversa (3). Inoltre, se il punto Y percorre in β una retta V , il punto Z corrispondente alla coppia (UY) descrive in γ una conica, la quale è il luogo dei poli della retta V rispetto alle correlazioni del fascio corri-

(*) HIRST, loc. cit.

(**) Il sig. HIRST chiama correlazione speciale assiale una correlazione speciale di prima specie dotata di rette singolari.

spondente alla retta U (4). Ora in questo fascio esistono (II) tre correlazioni speciali centrali e il polo della retta V rispetto a ciascuna di queste coincide (*) col punto singolare della correlazione che si considera situato nel piano γ . Quindi la conica anzidetta passa per ciascuno dei punti singolari del piano γ appartenenti alle medesime correlazioni speciali. Dunque:

III. « A ciascuna retta di uno qualunque dei tre piani α, β, γ corrisponde una trasformazione quadratica fra i punti dei due piani rimanenti. « I punti fondamentali di questa trasformazione sono sopra ciascun piano i « punti singolari esistenti su di esso e appartenenti alle tre correlazioni speciali centrali contenute nel fascio corrispondente alla retta data. »

In virtù di questo teorema, la proposizione III del n.^o 3 e la II del n.^o 4 si possono enunciare anche così:

IV. « Ad una coppia formata da una retta e da un punto presi rispettivamente sopra due qualsivogliano dei tre piani α, β, γ corrisponde in generale nel terzo un punto, che è il punto corrispondente al punto dato nella « trasformazione quadratica che corrisponde alla retta data. »

V. « Ad una coppia di rette prese rispettivamente sopra due qualsivogliano dei tre piani α, β, γ corrisponde in generale nel terzo una conica, « che è la conica corrispondente ad una qualunque delle due rette date nella « trasformazione quadratica che corrisponde all'altra. »

Inoltre tenendo presenti le note proprietà della trasformazione quadratica si trova:

VI. « Data una retta sopra uno qualunque dei tre piani α, β, γ esistono sopra ciascuno dei due piani rimanenti tre punti, ognuno dei quali « forma con quella retta una coppia cui non corrisponde nel terzo piano un « punto, ma una retta. »

VII. « Data una retta sopra uno qualunque dei tre piani α, β, γ esistono sopra ciascuno dei due piani rimanenti tre rette, ognuna delle quali « forma con la data una coppia cui corrisponde nel terzo piano una conica « degenera »

etc.

6. L'equazione di una correlazione di seconda specie contiene 26 coefficienti indipendenti fra loro; epperò:

I. « Una correlazione di seconda specie è individuata da 26 condizioni « lineari. »

(*) HIRST, loc. cit., n.^o 17.

Se si vuole che i punti X, Y, Z dati rispettivamente sopra i piani α, β, γ siano elementi corrispondenti in una correlazione di seconda specie, le loro coordinate debbono verificare la relazione:

$$a_x b_y c_z = 0,$$

la quale contiene a primo grado i coefficienti dell'equazione della correlazione. Quindi:

II. « Il volere che una correlazione di seconda specie fra i punti di « tre piani α, β, γ abbia come corrispondenti tre punti dati rispettivamente « sui piani medesimi, equivale ad assoggettare la correlazione ad *una* condizione lineare. »

Se si vuole che i punti X ed Y dati sopra i piani α e β e la retta w data su γ siano elementi corrispondenti in una correlazione di seconda specie, le loro coordinate debbono verificare le relazioni seguenti:

$$a_x b_y c_1 = \rho w_1, \quad a_x b_y c_2 = \rho w_2, \quad a_x b_y c_3 = \rho w_3,$$

da cui eliminando il fattore di proporzionalità ρ , si ricavano le altre:

$$a_x b_y c_2 \cdot w_3 = a_x b_y c_3 \cdot w_2, \quad a_x b_y c_3 \cdot w_1 = a_x b_y c_1 \cdot w_3,$$

$$a_x b_y c_1 \cdot w_2 = a_x b_y c_2 \cdot w_1,$$

una qualunque delle quali è una conseguenza delle altre due. Queste contengono a primo grado i coefficienti dell'equazione della correlazione; epperò:

III. « Il volere che una correlazione di seconda specie fra i punti di « tre piani α, β, γ abbia come elementi corrispondenti due punti ed una « retta presi rispettivamente sui piani medesimi, equivale ad assoggettare la « correlazione a *due* condizioni lineari. »

Se si vuole che i punti X ed Y dati sui piani α e β costituiscano una coppia neutra per una correlazione di seconda specie, le loro coordinate debbono verificare le tre relazioni seguenti:

$$a_x b_y c_1 = 0, \quad a_x b_y c_2 = 0, \quad a_x b_y c_3 = 0,$$

le quali contengono a primo grado i coefficienti dell'equazione della correlazione. Quindi:

IV. « Il volere che una correlazione di seconda specie fra i punti di « tre piani α, β, γ abbia come neutra una coppia di punti dati sopra due dei « piani medesimi, equivale ad assoggettare la correlazione a *tre* condizioni « lineari. »

7. Si è dimostrato (1, I) che in una correlazione di seconda specie fra i punti di tre piani α, β, γ a ciascun punto di uno qualunque dei piani medesimi corrisponde una correlazione di prima specie fra i punti dei due piani rimanenti. Ora viceversa è facile dimostrare che se tre piani punteggiati α, β, γ sono riferiti tra loro in modo che a ciascun punto di uno qualunque di essi corrisponda algebricamente una correlazione di prima specie fra i punti degli altri due, i tre piani dati sono in correlazione di seconda specie. Infatti, perchè a ciascun punto X del piano α corrisponda una correlazione di prima specie fra i punti Y e Z dei due piani β e γ , fra le coordinate $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ dei punti anzidetti deve passare una relazione della forma:

$$y_1(A_1z_1 + A_2z_2 + A_3z_3) + y_2(B_1z_1 + B_2z_2 + B_3z_3) + \\ + y_3(C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3) = 0,$$

nella quale i coefficienti A_i, B_i, C_i ($i=1, 2, 3$) siano forme delle variabili x_1, x_2, x_3 del medesimo grado. Inoltre perchè ad ogni punto Y di β corrisponda ancora una correlazione di prima specie fra i punti dei due piani γ e α , le anzidette forme debbono essere di primo grado rispetto alle x_1, x_2, x_3 . Ma supposto che ciò abbia luogo, accade altresì che ad ogni punto Z di γ corrisponde una correlazione di prima specie fra i punti dei due piani α e β , e i tre piani dati sono legati fra loro da una correlazione di seconda specie; dunque:

I. « Se tre piani punteggiati α, β, γ sono riferiti fra loro in modo « che a ciascun punto di uno qualunque di essi corrisponda una correlazione « di prima specie fra i punti degli altri due, i tre piani dati sono in correlazione di seconda specie. »

Inoltre:

II. « Se la corrispondenza di cui si tratta nel teorema precedente ha « luogo per due dei tre piani dati, essa sussiste anche per il terzo piano. »

8. In particolare suppongasi che i tre piani α, β, γ coincidano con un medesimo piano π , e in tale ipotesi i punti X, Y, Z siano riferiti ad uno stesso triangolo fondamentale. Dette ξ_1, ξ_2, ξ_3 le coordinate di un punto qualunque P di π , e considerato P come appartenente ai due piani β e γ , o γ e α , o α e β , ad esso corrisponde nella correlazione di seconda specie una retta la quale ha per equazione:

$$b_\xi c_\xi(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = 0,$$

oppure:

$$c_\xi a_\xi(b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3) = 0,$$

o infine:

$$a_{\xi} b_{\xi} (c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3) = 0.$$

Dunque:

I. « Se i tre piani α , β , γ coincidono in un medesimo piano π , ad « ogni punto di questo corrispondono tre rette. »

La retta rappresentata da una qualunque delle tre equazioni precedenti, passa per il punto P cui corrisponde, se le coordinate di questo punto verificano la relazione:

$$a_{\xi} b_{\xi} c_{\xi} = 0,$$

e quindi:

II. « Il luogo di un punto del piano π cui corrisponde una retta passante per il punto stesso, è una curva generale del 3.^o ordine. »

Questa curva è sempre la stessa, qualunque sia quello dei tre piani α , β , γ coincidenti con π , cui si supponga che il punto P appartenga.

9. Una rete di correlazioni di prima specie fra i punti di due piani è individuata quando siano date sei coppie di punti coniugati comuni a tutte le correlazioni della rete. Per determinare ogni altra correlazione della rete medesima, basta assumere come polo e polare un punto ed una retta presi ad arbitrio sui piani dati, oppure come coniugati i punti di due coppie prese ad arbitrio sui piani stessi.

Individuata nel modo anzidetto una rete di correlazioni di prima specie fra due dei tre piani α , β , γ , per esempio fra β e γ , si stabilisca una corrispondenza omografica fra i punti del terzo piano α e le correlazioni della rete; e ciò si faccia assumendo sopra il piano α quattro punti A_1 , A_2 , A_3 , A_4 tali che tre qualsivogliano di essi non giacciono in linea retta e sui piani β e γ quattro correlazioni H_1 , H_2 , H_3 , H_4 della rete in modo che tre qualsivogliano di esse non appartengano ad un medesimo fascio, e poi scegliendo quei quattro punti come corrispondenti a queste quattro correlazioni rispettivamente. Le quattro correlazioni siano individuate prendendo sopra il piano β come poli i quattro punti B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , tre qualsivogliano dei quali non stiano in linea retta, e sopra il piano γ come polari corrispondenti le quattro rette c_1 , c_2 , c_3 , c_4 tre qualsivogliano delle quali non appartengano ad un medesimo fascio. Così individuata la corrispondenza proiettiva fra il piano punteggiato α e la rete di correlazioni di prima specie fra i due piani β e γ , resta determinata fra i punti dei tre piani α , β , γ una correlazione di seconda specie. Infatti, per questa correlazione gli elementi delle terne $(A_1 B_1 c_1)$, $(A_2 B_2 c_2)$, $(A_3 B_3 c_3)$, $(A_4 B_4 c_4)$ risultano corrispondenti fra loro, e quindi

(6, III) la correlazione stessa viene con ciò a soddisfare a $2 \cdot 4 = 8$ condizioni lineari. Inoltre le sei coppie date di punti coniugati comuni alle correlazioni della rete sono coppie di punti neutri dei piani β e γ nella correlazione di seconda specie: quindi (6, IV) questa viene a soddisfare ad altre $3 \cdot 6 = 18$ condizioni lineari. Essa dunque soddisfa ad $8 + 18 = 26$ condizioni lineari, epperò (6, I) è individuata.

Una volta individuata la corrispondenza proiettiva fra il piano punteggiato α , e la rete di correlazioni data fra i due piani β e γ , nasce il problema:

I. « Dato un punto qualunque X di α , costruire la corrispondente cor-
« relazione H fra i due piani β e γ . »

Per risolvere questo problema si unisca uno qualunque dei punti A_1, A_2, A_3, A_4 , per esempio A_1 , ai rimanenti e al punto X : si ottengono così le quattro punteggiate $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4, A_1 X$, appartenenti al medesimo fascio (A_1) , alle quali corrispondono i seguenti fasci di correlazioni fra β e γ : $(H_1 H_2), (H_1 H_3), (H_1 H_4), (H_1 H)$. Poi prendasi ad arbitrio un punto Y sul piano β . Alle coppie $(A_1 A_2, Y), (A_1 A_3, Y), (A_1 A_4, Y), (A_1 X, Y)$ corrispondono in γ (3, IV) quattro punti in linea retta Z_1, Z_2, Z_3, Z costituenti un gruppo di cui il rapporto anarmonico è eguale a quello, noto, del gruppo formato dai quattro raggi $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4, A_1 X$. I punti Z_1, Z_2, Z_3 si possono facilmente costruire. Ed in vero, Z_1 ad esempio, essendo il punto di γ corrispondente alla coppia $(A_1 A_2, Y)$ è (3, II) il punto di concorso delle polari di Y rispetto alle correlazioni del fascio $(H_1 H_2)$. Due di queste correlazioni, e precisamente H_1 e H_2 , sono note; perciò si possono trovare le polari di Y rispetto ad esse (*); il punto d'incontro di tali polari è il punto richiesto Z_1 . In modo analogo si costruiscono i punti Z_2 e Z_3 . Trovati questi tre punti, i quali, come si è detto, giacciono in linea retta, si determina subito Z , conoscendosi il rapporto anarmonico $(Z_1 Z_2 Z_3 Z)$. Considerando inoltre i quattro raggi $A_2 A_1, A_2 A_3, A_2 A_4, A_2 X$ di α e ancora il punto Y di β , si trova nello stesso modo un altro punto Z' di γ , corrispondente alla coppia $(A_2 X, Y)$. Ora il punto Z determinato in γ e corrispondente alla coppia $(A_1 X, Y)$, è il punto di concorso delle polari di Y rispetto alle correlazioni del fascio $(H_1 H)$; quindi la polare di Y rispetto ad H passa per Z . Analogamente si vede, con-

(*) SCHRÖTER: *Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova*. Giornale di Crelle, vol. 62. In questa Memoria vengono date le costruzioni di una correlazione di prima specie nei seguenti casi: (3 0 2 0), (2 0 4 0), (1 0 6 0), (0 0 8 0), secondo le notazioni del sig. HIRST.

siderando la coppia (A, X, Y) , che la polare anzidetta passa anche per Z' . Essa è dunque la retta ZZ' . Così della correlazione incognita H si conosce la polare ZZ' corrispondente ad un polo dato Y , epperò essa è individuata, dovendo anche appartenere alla data rete di correlazioni fra i piani β e γ , e si sa costruire.

Ripetendo, in ordine inverso, le costruzioni precedenti, si risolve il seguente problema:

II. « Data, mediante un polo ed una polare, una correlazione H fra « β e γ , appartenente alla rete considerata, costruire il punto corrispondente « X di α . »

Se in luogo della corrispondenza proiettiva fra i punti del piano α e le correlazioni della rete data fra i piani β e γ , si considera la correlazione di seconda specie fra i tre piani α, β, γ determinata da quella corrispondenza, i due problemi testè risolti prendono le forme seguenti:

III. « Data la coppia di punti (XY) , o (XZ) , costruire la retta corrispondente nella correlazione di seconda specie determinata fra i tre piani « α, β, γ . »

IV. « Data la coppia (YW) , o (ZV) , costruire il punto corrispondente « nella correlazione di seconda specie determinata fra i tre piani α, β, γ . »

Da questo problema si ricava subito la soluzione dell'altro:

V. « Data la coppia di punti (YZ) , costruire la retta corrispondente « nella correlazione di seconda specie determinata fra i tre piani α, β, γ . »

Infatti condotte per il punto Z , o Y , due rette ad arbitrio W_1 e W_2 , o V_1 e V_2 , si costruiscano i punti X_1 e X_2 corrispondenti alle coppie (YW_1) e (YW_2) , o (ZV_1) e (ZV_2) . La loro congiungente X_1X_2 è la retta richiesta.

Così dati due punti sopra due qualsivogliano dei tre piani α, β, γ , si sa sempre trovare la retta che ad essi corrisponde nella correlazione di seconda specie determinata fra i piani medesimi; e quindi può dirsi di saper costruire la correlazione stessa.

Sin qui si è supposto che ciascuna delle quattro correlazioni H_1, H_2, H_3, H_4 sia individuata da un polo e dalla polare corrispondente; ma se ciascuna di esse, o soltanto qualcuna, è individuata da due coppie di punti coniugati, tutte le costruzioni precedentemente indicate possono egualmente essere eseguite (*). In particolare, si supponga che le quattro correlazioni anzidette siano individuate rispettivamente dalle coppie di punti coniugati: (B_1, C_1) e (B'_1, C'_1) ,

(*) SCHROTER, loc. cit.

$(B_2 C_2)$ e $(B'_2 C'_2)$, $(B_3 C_3)$ e $(B'_3 C'_3)$, $(B_4 C_4)$ e $(B'_4 C'_4)$. In questa ipotesi la correlazione di seconda specie fra i tre piani α , β , γ è individuata dalle sei coppie date di punti neutri e dalle seguenti otto terne di punti corrispondenti:

$$\begin{array}{cccc} (A_1 B_1 C_1), & (A_2 B_2 C_2), & (A_3 B_3 C_3), & (A_4 B_4 C_4) \\ (A_1 B'_1 C'_1), & (A_2 B'_2 C'_2), & (A_3 B'_3 C'_3), & (A_4 B'_4 C'_4), \end{array}$$

le quali però non sono le terne più generali, e la correlazione per ciò che si è detto, si sa costruire.

Se in luogo delle due terne $(A_1 B_1 C_1)$ e $(A_1 B'_1 C'_1)$ le quali hanno in comune un medesimo punto A_1 del piano α , sono date le due terne $(A_1 B_1 C_1)$ e $(A'_1 B'_1 C'_1)$, la correlazione di seconda specie fra i tre piani α , β , γ resta parimenti determinata; ma come si costruisce? Questo problema è ricondotto al precedente, se si sa determinare la correlazione H_1 fra β e γ corrispondente al punto A_1 di α . Le correlazioni di seconda specie fra i tre piani α , β , γ aventi in comune le sei coppie date di punti neutri e le terne di punti corrispondenti:

$$\begin{array}{cccc} (A_2 B_2 C_2), & (A_3 B_3 C_3), & (A_4 B_4 C_4) \\ (A'_1 B'_1 C'_1), & (A_2 B'_2 C'_2), & (A_3 B'_3 C'_3), & (A_4 B'_4 C'_4), \end{array}$$

formano un fascio, e le correlazioni di prima specie fra β e γ corrispondenti al punto A_1 di α in ciascuna delle correlazioni del fascio precedente, formano parimenti un fascio (*). È facile determinare quest'ultimo fascio. Perciò prendansi due correlazioni del primo, il che può farsi aggiungendo agli elementi che determinano questo successivamente ciascuna delle due terne di punti corrispondenti $(A'_1 B_1 C_1)$ e $(A'_1 B'_1 C'_1)$, essendo B_1^0 e C_1^0 due nuovi punti presi rispettivamente sui piani β e γ . Trovate con le costruzioni sopra accennate, le correlazioni di prima specie corrispondenti al punto A_1 nelle due correlazioni di seconda specie testè prese, esse determinano il fascio suddetto. La correlazione di questo fascio individuata dalla coppia data di punti coniugati $(B_1 C_1)$ è la correlazione cercata H_1 .

Analogamente alle terne $(A_2 B_2 C_2)$ e $(A_2 B'_2 C'_2)$ si possono sostituire le altre $(A_3 B_3 C_3)$ e $(A'_3 B'_3 C'_3)$, e così di seguito.

In tal modo si giunge al risultato seguente:

VI. « Date sei coppie di punti neutri e otto terne di punti corrispondenti di una correlazione di seconda specie fra tre piani α , β , γ , questa è « individuata e si sa costruire. »

(*) È ovvio dimostrare analiticamente le proprietà accennate.

10. Una rete di correlazioni di prima specie fra i punti di due piani è individuata quando siano date cinque coppie di punti coniugati comuni a tutte le correlazioni della rete e tre correlazioni della rete medesima non appartenenti ad uno stesso fascio, ciascuna delle quali può essere individuata da una coppia di punti coniugati e da un polo con la polare corrispondente, oppure da tre coppie di punti coniugati.

Suppongasì che la rete di correlazioni sia data sui piani β e γ e le tre correlazioni che insieme alle cinque coppie date di punti coniugati comuni la individuano, siano rispettivamente date dalle coppie di punti coniugati:

$$(B_1 C_1), (B'_1 C'_1), (B''_1 C''_1); (B_2 C_2), (B'_2 C'_2), (B''_2 C''_2); \\ (B_3 C_3), (B'_3 C'_3), (B''_3 C''_3).$$

Nella rete così individuata prendasi una quarta correlazione, che non appartenga a nessuno dei tre fasci determinati dalle tre correlazioni precedenti, dando le coppie di punti coniugati:

$$(B_4 C_4) \text{ e } (B'_4 C'_4).$$

Se le quattro correlazioni considerate H_1, H_2, H_3, H_4 si fanno corrispondere rispettivamente a quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4 del piano α , tre qualsivogliano dei quali non giacciono in linea retta, resta stabilita una corrispondenza omografica fra i punti del piano α e le correlazioni della rete data, e quindi una correlazione di seconda specie fra i tre piani punteggiati α, β, γ . Infatti di questa correlazione sono date cinque coppie di punti neutri e le undici terne di punti corrispondenti:

$$(A_1 B_1 C_1), (A_2 B_2 C_2), (A_3 B_3 C_3), (A_4 B_4 C_4) \\ (A_1 B'_1 C'_1), (A_2 B'_2 C'_2), (A_3 B'_3 C'_3), (A_4 B'_4 C'_4) \\ (A_1 B''_1 C''_1), (A_2 B''_2 C''_2), (A_3 B''_3 C''_3),$$

La costruzione della correlazione così individuata è ricondotta al caso studiato nel numero precedente, se per mezzo degli elementi dati, si sa trovare una sesta coppia di punti neutri. A tale oggetto si ricordi (5, II) che in uno qualunque dei dati fasci di correlazioni $(H_2 H_3), (H_3 H_1), (H_1 H_2)$, per esempio nel primo, esistano tre correlazioni speciali centrali, i cui punti singolari R_1, R_2, R_3 , o S_1, S_2, S_3 , situati sul piano β , o γ , si sanno costruire, essendo (5, III) i punti principali di una determinata trasformazione quadratica. Quelli appartengono alla curva C_β (1, IV), e questi a C_γ . Quindi (1, II) ad uno qualsiasi dei primi, per esempio ad R_1 , corrisponde un punto R'_1 ,

di C_7 , che è il punto di concorso delle polari di R_1 rispetto a tutte le correlazioni della rete data. La polare di R_1 rispetto alle correlazioni del fascio $(H_2 H_3)$ è la retta $S_2 S_3$; quella di R_1 rispetto alla correlazione data H_1 si sa costruire. Il punto dove questa incontra la precedente è R'_1 , e i due punti R_1 e R'_1 costituiscono la sesta coppia cercata di punti neutri.

Se in luogo delle terne $(A_1 B_1 C_1)$, $(A_1 B'_1 C'_1)$, $(A_1 B''_1 C''_1)$, le quali hanno in comune un medesimo punto A_1 di α si considerano le altre $(A_1 B_1 C_1)$, $(A'_1 B_1 C'_1)$, $(A'_1 B'_1 C'_1)$ di cui le due ultime soltanto hanno in comune il punto A'_1 , la correlazione di seconda specie fra i tre piani α , β , γ , resta parimenti determinata; ma come si costruisce? Questo problema è ricondotto al precedente se si sa determinare la correlazione H_1 fra β e γ corrispondente al punto A_1 di α . Questa correlazione H_1 poi si determina con procedimenti affatto analoghi a quelli tenuti alla fine del n.^o 9 per sostituire alle terne $(A_1 B_1 C_1)$ e $(A_1 B'_1 C'_1)$ le altre $(A_1 B_1 C_1)$ e $(A'_1 B'_1 C'_1)$. Parimenti si possono ora sostituire alle terne $(A_1 B_1 C_1)$, $(A'_1 B_1 C'_1)$, $(A'_1 B''_1 C''_1)$ le altre $(A_1 B_1 C_1)$, $(A'_1 B'_1 C'_1)$, $(A''_1 B'_1 C'_1)$, che non hanno alcun punto comune. Così queste ultime sono state sostituite alle primitive $(A_1 B_1 C_1)$, $(A_1 B'_1 C'_1)$, $(A_1 B''_1 C''_1)$.

Analogamente alle terne $(A_2 B_2 C_2)$, $(A_2 B'_2 C'_2)$, $(A_2 B''_2 C''_2)$ si possono sostituire le altre $(A_2 B_2 C_2)$, $(A'_2 B'_2 C'_2)$, $(A''_2 B'_2 C'_2)$, e così di seguito.

In tal modo si giunge al risultato seguente:

« Date cinque coppie di punti neutri e undici terne di punti corrispondenti di una correlazione di seconda specie fra tre piani α , β , γ , questa è « individuata e si sa costruire. »

11. Sin qui si è supposto che le tre forme fondamentali in correlazione di seconda specie fossero piani punteggiati. È facile vedere come si modificano le proprietà trovate, se le tre forme sono piani rigati, oppure stelle di raggi o di piani.

In particolare, se esse sono tre stelle di raggi (A) , (B) , (C) , in queste esistono (2, III) tre coni del 3.^o ordine Γ_A , Γ_B , Γ_C tali che Γ_B e Γ_C , Γ_C e Γ_A , Γ_A e Γ_B sono i luoghi delle rette costituenti le coppie neutre delle stelle (B) e (C) , (C) e (A) , (A) e (B) .

Le generatrici dei due coni Γ_B e Γ_C , ad esempio, si corrispondono una ad una, chiamando corrispondenti le rette di una stessa coppia neutra. Ora quale è il numero delle coppie neutre formate da due rette incidenti? Un piano qualunque α condotto per la retta che unisce i vertici B e C dei due coni considerati, taglia ciascuno di questi secondo tre generatrici alle quali corrispondono sull'altro altrettante generatrici, che determinano tre piani β

passanti per la retta BC . Così fra i piani α e β del fascio (BC) viene ad essere stabilita una corrispondenza algebrica $(3, 3)$. Questa ammette sei coincidenze; epperò si ha:

« Se (A) , (B) , (C) sono tre stelle di raggi in correlazione di seconda specie, in ciascuna delle coppie (B) e (C) , (C) e (A) , (A) e (B) esistono sei coppie neutre formate da rette incidenti. »

§ 2.

12. Siano date tre stelle di raggi (A) , (B) , (C) in correlazione di seconda specie. A due raggi appartenenti a due qualsivogliano di queste stelle corrisponde nella terza un piano $(2, I)$. Quale è il luogo dei punti dello spazio in ciascuno dei quali concorrono due rette ed un piano corrispondenti? Seguendo le tre stelle date con uno stesso piano Π , si ottengono evidentemente tre piani punteggiati sovrapposti in correlazione di seconda specie. Se P è un punto di Π per cui passano due raggi di due stelle e il piano a questi corrispondente nella terza, il punto P appartiene alla curva di Π , luogo di un punto situato sulla retta corrispondente nella correlazione di seconda specie determinata su Π , e viceversa. Quindi si ha (8, II):

I. « Date tre stelle di raggi in correlazione di seconda specie, il luogo di un punto dello spazio dove concorrono due raggi ed un piano corrispondenti è una superficie del 3.^o ordine. »

Il centro di una stella congiunto ai centri delle altre due determina in queste due raggi ai quali corrisponde nella prima un piano determinato. Dunque nel centro di ciascuna stella concorrono due raggi ed un piano corrispondenti, epperò:

II. « La superficie del 3.^o ordine generata da tre stelle di raggi in correlazione di seconda specie, passa per i centri delle stelle medesime. »

Sia α il piano della stella (A) , corrispondente alla coppia di raggi AB e AC considerati come appartenenti alle altre due stelle rispettivamente. Ad un raggio qualunque r di (A) posto sul piano α , corrisponde $(1, I)$ una correlazione di prima specie fra le stelle (B) e (C) , la quale determina sullo stesso piano α un'altra correlazione di prima specie. La conica di α , luogo di un punto situato sulla polare che ad esso corrisponde in questa correlazione, passa per il punto A , perchè le rette AB e AC sono raggi coniugati nell'anzidetta correlazione fra le stelle (B) e (C) . La retta considerata r incontra quella

conica in un sol punto, fuori di A , il quale è l'unico che, oltre A , essa abbia in comune con la superficie generata dalle tre stelle (A) , (B) , (C) . Dunque:

III. « Date tre stelle di raggi in correlazione di seconda specie, il piano « che in una qualunque di esse corrisponde alla coppia formata dalle rette « che uniscono il centro di questa stella con i centri delle altre due, è tangente alla superficie del 3.^o ordine generata dalle stelle date e il punto di « contatto è il centro della stella cui il piano appartiene. »

Inoltre si ha evidentemente:

IV. « La superficie del 3.^o ordine generata da tre stelle di raggi in « correlazione di seconda specie, passa per i diciotto punti dello spazio determinati dalle diciotto coppie neutre formate da rette incidenti. »

Fissato un raggio a nella stella (A) , resta determinata (1, I) una correlazione di prima specie fra i raggi delle altre due stelle (B) e (C) , la quale genera una superficie del 2.^o ordine, che passa per i centri B e C delle stelle medesime. Questa superficie varia al variare del raggio a nella stella (A) e descrive una rete, di cui B e C sono due punti-base. Quali sono gli altri punti-base della rete stessa? Nelle stelle (B) e (C) esistono (11) sei coppie neutre formate da rette incidenti. I due raggi di una qualsiasi di queste coppie ed un raggio qualunque a della stella (A) costituiscono una terna di rette corrispondenti nella data correlazione di seconda specie fra le tre stelle (A) , (B) , (C) . Quindi il punto d'appoggio dei due raggi della coppia considerata appartiene alla quadrica generata dalla correlazione fra le due stelle (B) e (C) , corrispondente al raggio a di (A) , qualunque esso sia. Dunque:

V « Date tre stelle di raggi in correlazione di seconda specie, ciascuna « di esse determina una rete proiettiva di quadriche, di cui gli otto punti-base « sono i centri delle altre due stelle e i punti dello spazio determinati dalle « sei coppie di rette incidenti somministrate dalle due stelle medesime. »

Un raggio a della stella (A) incontra la quadrica corrispondente in due punti, per ciascuno dei quali passano due rette ed un piano corrispondenti nella data correlazione di seconda specie fra le tre stelle (A) , (B) , (C) . Quindi questi due punti giacciono sulla superficie del 3.^o ordine generata dalle stelle medesime, epperò:

VI. « La superficie del 3.^o ordine generata da tre stelle di raggi in « correlazione di seconda specie, può essere generata anche da una qualunque « delle tre stelle medesime e da una rete proiettiva di quadriche (*). »

(*) REYE: *Projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung*. Mathem. Annalen, vol. I, pag. 455.

13. Ora suppongasi data una superficie generale del 3.^o ordine. Come è noto (*), essa può sempre essere generata mediante una stella di raggi e una rete di quadriche proiettive fra loro. Sia A il centro della stella e $B, C, P_1, P_2, \dots, P_6$ gli otto punti-base della rete. Ad un raggio qualunque a della stella corrisponde nella rete una quadrica F , la quale può sempre immaginarsi generata da due stelle reciproche. I centri di queste due stelle possono essere scelti ad arbitrio; quindi per essi possono assumersi i due punti B e C . Per determinare la reciprocità fra le stelle medesime, basta prendere un punto qualunque P su F e al raggio BP della stella (B) far corrispondere nella stella (C) un piano qualsiasi passante per la retta CP (**). Come punto P prendasi uno qualsivoglia dei punti-base $P_1, P_2, \dots, P_6$, per esempio P_1 , e al raggio BP_1 di (B) facciasi corrispondere in (C) il piano CP_1P_2 . Così resta determinata la reciprocità fra le due stelle (B) e (C) in modo da generare la quadrica F . Variando il raggio a nella stella (A), varia nella rete la quadrica corrispondente F ; ma siccome questa passa sempre per i punti $B, C, P_1, P_2, \dots, P_6$, così essa può sempre immaginarsi generata da due stelle aventi i centri nei punti B e C e di cui la reciprocità sia determinata scegliendo come elementi corrispondenti quelli già fissati, cioè la retta BP_1 e il piano CP_1P_2 . Quindi si può concludere.

a) Ogni raggio della stella (A) determina una reciprocità fra le due stelle (B) e (C).

Prendasi ad arbitrio un raggio b nella stella (B). Una quadrica qualunque della rete data incontra la retta b , oltre il punto B in un punto X . Questa quadrica viene generata da una determinata reciprocità fra le due stelle (B) e (C) (quando ben inteso restino fissi come si è supposto sopra i due elementi corrispondenti BP_1 e CP_1P_2): quindi al raggio BX di (B) corrisponde in (C) un piano determinato passante per il punto X . Così si ha:

1.^o Per mezzo della retta b di (B), ad ogni quadrica della rete data corrisponde un piano nella stella (C).

Sia γ un piano qualunque della stella (C): esso incontra la retta b in un punto X , per cui passano infinite quadriche della rete formanti un fascio. Fra queste quadriche ve n'ha una ed una sola generata da una tale reciprocità fra le due stelle (B) e (C), che in essa la retta b e il piano γ sono elementi

(*) REYE, loc. cit.

(**) SCHRÖTER: *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung als erzeugnisse projektivischer Gebilde*, pag. 161.

corrispondenti. Per dimostrare ciò si ricordi (*) che data una quadrica F , presi sopra di essa due punti qualsivogliano B e C come centri di due stelle e stabilita la reciprocità fra queste in modo che siano elementi corrispondenti la retta BP_1 e il piano CP_1P_2 , essendo P_1 un punto qualunque di F e CP_1P_2 un piano qualunque condotto per CP_1 , il piano che nella stella (C) corrisponde ad un raggio b dato in (B), è il piano CXY , dove X è il punto d'incontro, oltre B , di b con F ed Y il punto in cui la retta r , comune ai piani CP_1P_2 e bP_1 , incontra, oltre P_1 , la quadrica F . Quindi se al raggio b corrisponde il piano dato γ , con questo deve coincidere il piano CXY , epperò si vede che la quadrica della rete, generata da una tale reciprocità fra le due stelle (B) e (C), che in essa siano corrispondenti la retta b e il piano γ , passa per il punto Y , in cui questo piano è incontrato dalla retta r , punto che è determinato quando sono dati b e γ . La quadrica che si cerca deve dunque passare per i due punti X ed Y ; inoltre appartiene ad una rete data; quindi è unica; epperò:

2.^o Per mezzo della retta b di (B), ad ogni piano della stella (C) corrisponde una quadrica nella rete data.

Nella rete data prendasi un fascio di quadriche; a questo corrisponde nella stella (C), per mezzo della retta b , un inviluppo di piani tale che per ogni punto di b , e quindi anche per ogni retta del piano bC , la quale contenga il punto C , passa un sol suo piano, perchè per quel punto di b passa una sola superficie del fascio considerato. Il piano bC poi non appartiene all'inviluppo, perchè se vi appartenesse, nel fascio dato dovrebbe esistere una quadrica generata da una reciprocità fra le stelle (B) e (C), nella quale la retta b e il piano γ fossero elementi corrispondenti; quindi la quadrica stessa conterrebbe la retta b , ciò che è impossibile, il fascio di quadriche essendo stato preso ad arbitrio nella rete. Dunque il piano bC non appartiene all'inviluppo; inoltre per ogni sua retta condotta per C passa un sol piano dell'inviluppo stesso. Questo è adunque un fascio, epperò:

3.^o Per mezzo della retta b di (B), ad un fascio di quadriche della rete data corrisponde nella stella (C) un fascio di piani.

In virtù delle ultime proprietà dimostrate 1.^o, 2.^o e 3.^o, si ha che per mezzo della retta b di (B) resta stabilita una corrispondenza omografica fra la stella di piani (C) e la rete di quadriche. Ma questa è proiettiva alla stella di raggi (B); dunque le due stelle (B) e (C) sono reciproche, epperò:

b) Ogni raggio della stella (B) determina una reciprocità fra le due stelle (C) ed (A).

(*) SCHRÖTER: *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung*, etc., pag. 461.

Dalle proprietà *a*) e *b*), tenendo presenti i due teoremi dimostrati nel n.° 7, segue che per mezzo della data superficie del 3.° ordine si può stabilire fra le tre stelle (*A*), (*B*), (*C*) una correlazione di seconda specie, che generi la superficie stessa. Dunque:

I. « Una superficie generale del 3.° ordine può essere generata da tre « stelle di raggi in correlazione di seconda specie. »

Il centro della stella di raggi e due degli otto punti-base della rete proiettiva di quadriche, che insieme a quella stella genera una data superficie del 3.° ordine, possono essere scelti ad arbitrio su questa superficie (*) Quindi, in virtù di quanto precede, si ha ancora:

II. « Tre punti arbitrari di una superficie generale del 3.° ordine possono essere scelti come centri di tre stelle di raggi in correlazione di seconda specie tale che esse generino la superficie data. »

Dati 19 punti dello spazio, si prendano tre qualsivogliano di essi *A*, *B*, *C*, come centri di tre stelle di raggi. Detti P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 altri cinque dei 19 punti dati e indicati con 1, 2, 3, ... 11 i rimanenti, è determinata e si sa costruire (10) la correlazione di seconda specie fra le stelle (*A*), (*B*), (*C*), che ha come neutre le cinque coppie di raggi:

$$(BP_1, CP_1), (BP_2, CP_2), (BP_3, CP_3), (BP_4, CP_4), (BP_5, CP_5),$$

e come corrispondenti i raggi delle undici terne:

$$(A1, B1, C1), (A2, B2, C2), \dots (A11, B11, C11).$$

Quindi:

III. « Per 19 punti arbitrari dello spazio si può far passare una superficie generale del 3.° ordine ed una soltanto. »

Individuata nel modo anzidetto la correlazione di seconda specie fra le tre stelle di raggi (*A*), (*B*), (*C*), prendasi in una qualunque di queste, per esempio nella stella (*A*), un raggio *a* e costruiscansi i due punti in cui questo incontra la quadrica generata dalla correlazione di prima specie fra le altre due stelle (*B*) e (*C*) corrispondente al raggio stesso. I due punti così ottenuti appartengono alla superficie del 3.° ordine individuata dai 19 punti dati. Facendo variare la retta *a* nella stella (*A*), questa superficie resta in tal modo costruita per punti.

Pavia, 15 Aprile 1894.

(*) REYE, loc. cit.