SULLE VARIETÀ CHE RAPPRESENTANO LE COPPIE DI PUNTI DI DUE PIANI O SPAZI;

Nota di **Corrado Segre**, in Torino

Adunanza del 10 maggio 1891

1. Nelle ricerche geometriche in cui compajono simultaneamente i punti di k spazi S_p, S_q, .. , ad esempio nello studio delle corrispondenze fra questi spazi, dei connessi, ecc., può esser utile di considerare gli aggregati di k punti presi risp in S_p, S_q, ... come elementi o *punti* di una nuova varietà di dimensione $\sigma = p + q + \ldots$. La varietà che effettua questa rappresentazione nel modo più semplice e, sotto certi aspetti, più opportuno, è quella M_σ che nello spazio $[(p+1)(q+1)\ldots - 1]$ è costituita dai punti di coordinate

$$X_{lm\,.} = x_l y_m \ldots, \qquad \begin{pmatrix} l = 1, \ldots, p+1 \\ m = 1, \ldots, q+1 \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix} \tag{1}$$

ove le x, y, ... sono k sistemi di parametri variabili indipendenti: coordinate dei punti negli spazi S_p, S_q, ...

L'ordine di questa varietà (cioè il numero delle soluzioni comuni a σ equazioni, le quali siano lineari tanto nelle x, quanto nelle y, ..) è dato da $\dfrac{\sigma!}{p!\,q!\ldots}$ (come subito si verifica supponendo che ciascuna di quelle σ equazioni si spezzi in k fattori, ognuno dei quali contenga solo una serie di variabili).

Facendo solo variare nelle (1) una serie di parametri, ovvero tenendo invece fissa la serie medesima e facendo variare le altre $k - 1$, si vede che sulla varietà vi sono k schiere infinite di spazi S_p, S_q, ..., ed altrettante di varietà $M_{\sigma-p}$, $M_{\sigma-q}$, .. appartenenti risp. a spazi $[(q+1)(r+1)\ldots - 1]$, $[(p+1)(r+1)\ldots - 1]$, ... ed analoghe alla M_σ. E si vedono anche subito le relazioni semplici e notevoli che hanno luogo fra quegli spazi e quelle varietà: così gli spazi (o le varietà) di una schiera son punteggiati collinearmente dalle varietà (o dagli spazi) della schiera omologa, ecc.

2. Quando si tratta delle coppie di punti presi da due soli spazi S_p, S_q, si ha per rappresentarle una varietà M_{p+q} d'ordine $\binom{p+q}{p}$, appartenente a $[pq + p + q]$; e questa è luogo (semplice) di due schiere risp. ∞^q, ∞^p di spazi S_p, S_q (con cui coincidono risp. le $M_{\sigma-q}$, $M_{\sigma-p}$), le quali sono incidenti l'una all'altra per modo che gli spazi di una schiera son punteggiati collinearmente da quelli dell'altra — Viceversa, nello spazio $[pq + p + q]$ si ottiene sempre una M_{p+q} siffatta quando si considera: 1° il luogo degli S_q che congiungono i punti omologhi di $q + 1$ spazi S_p riferiti collinearmente fra loro (poichè si ottengono subito le coordinate dei punti di quegli S_q come forme bilineari di due serie di $p + 1$ e $q + 1$ parametri), 2° il luogo degli ∞^p spazi S_q incidenti a $q + 2$ dati S_p (poichè due qualunque di questi vengono punteggiati da quegli S_q per modo da risultare come sezioni della forma fondamentale avente per sostegno lo spazio $[pq + q - 1]$ che congiunge i q rimanenti S_p).

La rappresentazione delle coppie di punti di due spazi S_p, S_q sui punti di questa varietà si può intender fatta considerando la schiera degli ∞^p S_q e quella degli ∞^q S_p come due forme di specie p e q riferite projettivamente ai due spazi dati (ad esempio mediante sezione di ogni schiera con uno spazio dell'altra, ecc.), e rappresentando poi una coppia di punti di questi col punto d'incontro dei due spazi corrispondenti delle due schiere.

Per $p = q = 1$ si ha la notissima rappresentazione della geometria di due forme di 1ª specie nella geometria su una quadrica ordinaria. Se $p = 2$, $q = 1$ si ha pure una varietà nota: la varietà cubica a 3 dimensioni M_3^3 appartenente ad S_5, luogo di una ∞^1 di piani e di una ∞^2 di rette mutuamente incidenti.

In generale si può affermare che lo studio delle prime proprietà di tutte le varietà in discorso è affatto ovvio: basta ricorrere alla rappresentazione analitica (1), od all'equivalente rappresentazione geometrica (*). Noi non staremo a svilupparle. Ma accenneremo solo un po' minutamente le più semplici proprietà che si hanno per $p = q = 2$, proprietà che poi s'estendono subito alle varietà di dimensione $2n$ e d'ordine $\binom{2n}{n}$ appartenenti a $[n(n+2)]$ e rappresentanti le coppie di punti di due S_n. Tale cenno non è solo utile per le applicazioni alla geometria di due piani o spazi: esso fornisce *una rappresentazione reale dei punti complessi di uno spazio qualunque*, che è la naturale estensione della rappresentazione di una variabile complessa coi punti reali di una sfera, e che sarà pure esposta alla fine di questa Nota.

3. La varietà Σ del 6° ordine a 4 dimensioni appartenente allo spazio S_8 e rappresentata da

$$X_{lm} = x_l y_m \qquad (l, m = 1, 2, 3) \tag{2}$$

ha i suoi punti X rappresentati dalle coppie di punti x, y presi rispettivamente su due dati piani π, π' (e aventi in questi per coordinate risp. le x e le y). Essa contiene due schiere ∞^2 di piani: si ha un piano della *1ª schiera* tenendo fisso x, uno della *2ª schiera* tenendo fisso y. Per ogni punto di Σ passano due piani risp. delle due schiere: essi son congiunti mediante un S_4 che sarà quello *tangente* a Σ in quel punto. I piani dell'una schiera son punteggiati collinearmente (a π' od a π) da quelli dell'altra. Ogni S_7 od *iperpiano* (**) di S_8, il quale passi per un piano di una schiera (ne taglia altri due in due rette che

(*) Del resto è chiaro che anche qui si è nel campo di ricerche (inaugurato dal Veronese) sulle varietà degl'iperspazi generate da forme projettive.

(**) Riservando la denominazione di *piano* ai piani ordinari od S_2, si possono chiamare *iperpiani* di un S_n i suoi S_{n-1}, a quel modo che gli spazi superiori a quello ordinario si son chiamati *iperspazi*.

contengono due punti omologhi nella collineazione dei piani e quindi) contiene pure un piano dell'altra schiera, e però è tangente a Σ nel punto d'incontro dei due piani. Viceversa ogni iperpiano tangente a Σ in un punto contiene i due piani generatori uscenti da questo.

Indicando con a_{lm} le coordinate di un iperpiano tangente a Σ e con x l'imagine su π del piano della 1ª schiera contenuto in quell'iperpiano, dovrà l'equazione:

$$\sum a_{lm} X_{lm} = 0, \quad \text{ossia} \quad \sum a_{lm} x_l y_m = 0,$$

esser soddisfatta qualunque sia y, dal che si trae subito:

$$\Delta(a) = 0, \tag{3}$$

indicando con $\Delta(a)$ il determinante cubico delle a_{lm}. La (3) è dunque l'equazione di Σ come inviluppo d'iperpiani: essa mostra che Σ è di 3ª classe (*).

4. La rappresentazione (2) di Σ, quando vi si assoggettino i punti x, y a stare su due date rette di π, π', o quando a tale condizione si obblighi l'uno solo dei due punti lasciando l'altro completamente libero nel suo piano, si riduce alle rappresentazioni già ricordate (n. 2) delle coppie di punti presi da due rette mediante una quadrica, e delle coppie di punti presi risp. da una retta e da un piano mediante i punti di una M_3^3 appartenente ad S_5. — Si hanno dunque per tal modo su Σ ∞^4 quadriche ordinarie, ognuna delle quali rappresenta le coppie di punti presi da due rette di π, π': le generatrici rettilinee rappresentano le coppie in cui un punto è fisso e l'altro percorre la propria retta. E si hanno su Σ due schiere ∞^2 di varietà cubiche a 3 dimensioni M_3^3

(*) Il fatto che per un S_6 passano tre iperpiani tangenti a Σ si può vedere in altri modi: ad es° considerando la superficie F^6 d'intersezione di quello spazio con Σ (superficie che è stata studiata specialmente dal sig. Bordiga, Atti Ist. Veneto, t. IV, ser. 6ª, 1886). Su essa giace un esalatero semplice: per due lati opposti qualunque di questo passano due piani di schiere opposte di Σ i quali staranno in un iperpiano tangente passante per l'S_6, ecc.

appartenenti a spazi S_5. una varietà della *1ª schiera* rappresenta le coppie xy aventi il punto x su una data retta di π, e contiene quindi ∞^1 piani della 1ª schiera, mentre dagli ∞^2 della 2ª è incontrata secondo le ∞^2 rette generatrici, una varietà della *2ª schiera* rappresenta le coppie per le quali il punto y sta su una retta data di π', ed è perciò il luogo di ∞^1 piani della 2ª schiera, ecc. Due varietà cubiche della stessa schiera hanno un piano a comune. Due varietà di schiere opposte si tagliano in una quadrica; e viceversa per ogni quadrica passano due varietà cubiche delle due schiere

Quest'ultimo fatto trova un'utile applicazione Se si projetta Σ dallo spazio S_3 di una sua quadrica sopra un S_4, si vede facilmente che la projezione sarà generalmente univoca Orbene le due varietà cubiche passanti per la quadrica si projetteranno secondo due rette r, r', tracce dei loro spazi; e precisamente in modo che i loro piani generatori si projetteranno risp. nei singoli punti di r, r'. In generale però i piani di Σ della 1ª schiera, incontrando la 2ª varietà cubica secondo rette, si projetteranno nei piani di S_4 passanti per r', e similmente i piani della 2ª schiera nei piani di S_4 passanti per r La rappresentazione di Σ su S_4 si potrà effettuare riferendo projettivamente le due schiere di piani di Σ risp. alle due reti di piani di S_4 passanti per le rette fisse r', r, e considerando come omologhi due punti di Σ e S_4 quando sono intersezioni di coppie omologhe di piani In altri termini si posson rappresentare le coppie di punti di π, π' sui punti di S_4 sostituendo risp. a quei due piani due reti (collineari a π, π') r, r' di piani e prendendo come imagine di una coppia di punti di π, π', cioè di una coppia di piani di r, r', il punto d'incontro di questi piani (*)

5. Ritornando alle proprietà già accennate delle varietà cubiche e delle quadriche che giacciono in Σ, se vi mettiamo in evidenza gli

(*) Analogamente si posson rappresentare ad es° le coppie di punti di un S_p ed un S_q sui punti di un S_{p+q} ricorrendo alle forme fondamentali aventi per assi risp un S_{q-1} ed un S_{p-1} di questo spazio. Tutte queste rappresentazioni presentano però sulle nostre (di cui son projezioni) l'inconveniente di avere degli elementi eccezionali, e di non far corrispondere alle trasformazioni projettive dei due spazi dati delle trasformazioni projettive delle imagini spazi S_5 e S_3 a cui esse risp appartengono, risulta evidente una *legge di dualità* per la quale questi spazi corrispondono rispettivamente ai piani generatori ed agli S_4 tangenti di Σ Così al fatto che due piani s'incontrano in un punto — e quindi stanno in un S_4 tangente — solo se sono di schiere diverse, corrisponde il fatto che due S_5 di schiere diverse si tagliano in un S_3—e però giacciono in un iperpiano. E come due S_5 di una stessa schiera si tagliano in un piano di Σ, così due piani della stessa schiera stanno in un S_5 della nostra figura Questa legge di dualità si verifica pure nella rappresentazione: come i piani delle due schiere hanno (in un certo senso) per imagini i punti risp. di π e di π', così gli S_5 delle due schiere corrispondono risp alle rette di questi due piani (*)

Ogni iperpiano passante per un S_5 di una schiera contiene pure un S_5 dell'altra schiera, giacchè contenendo una varietà cubica di Σ dovrà segare questa secondo un'altra M_3^3. Ne deriva che un S_6 passante per un S_5 di una schiera taglia Σ, fuori di quello spazio, secondo un piano della schiera opposta, come viceversa un piano ed un S_5 di schiere opposte (si tagliano in una retta e però) stanno in un S_6. Se dunque si projettano da due S_5 di una stessa schiera i piani e gli S_5 della schiera opposta, si avranno gli S_6 e gl'iperpiani omologhi di due *reti* collineari Segue che le due schiere di S_5 riempiono una varietà cubica M_7^3, che indicheremo con Γ, ognuna di esse si compone degli spazi in cui si segano gl'iperpiani omologhi di tre reti collineari (aventi per sostegni tre S_5 dell'altra schiera) E poichè gli S_6 omologhi di queste reti si tagliano nei piani di Σ, così questa sarà una *varietà doppia* per Γ.—Si noti poi che l'iperpiano congiungente due S_5 di schiere diverse è tangente a Γ lungo tutto l'S_3 d'incontro di quei due spazi, gl'iperpiani tangenti a Γ sono appunto quelli passanti per gli S_5 generatori.

La dualità fra Σ e Γ, l'una come luogo e l'altra come inviluppo, apparisce anche dalle rappresentazioni analitiche. Invero se, analogamente

(*) Un'analoga dualità ha luogo più in generale per le varietà dei n[i] 1 e 2, ed anzi per una classe molto più vista che abbraccia pure le varietà rappresentate su un dato spazio S_r del sistema di tutte le M_{r-1}^n Ciò si collega, come in casi particolari è già stato notato, con la relazione generale di *apolarità* (fra varietà o fra connessi qualunque) alle (2), poniamo

(4) $$\Xi_{lm} = \xi_l \eta_m \qquad (l, m = 1, 2, 3),$$

sicchè sarà identicamente

$$\sum \xi_l x_l \sum \eta_m y_m = \sum \Xi_{lm} X_{lm},$$

è chiaro che l'iperpiano di coordinate Ξ_{lm} conterrà le due M_3^3 cioè i due S_5 imagini delle rette ξ, η di π, π', e si potrà quindi assumere come imagine di questa coppia di rette. Così mentre le coppie di punti di π, π' sono rappresentate dalle (2) sui punti di Σ, varietà che come inviluppo è data dall'equazione (3), le coppie di rette di π, π' vengono mediante le (4) rappresentate sugli ∞^4 iperpiani tangenti a Γ, e per equazione di questa, come luogo di punti α, si ha, similmente alla (3):

(5) $$\Delta(\alpha) = 0.$$

6. Alla stessa varietà Σ o Γ si giunge se si vogliono rappresentare linearmente coi punti o cogl'iperpiani di S_8 le reciprocità fra π e π'. Se una tal reciprocità, come connesso di punti o come connesso di rette, è data dall'equazione

$$\sum a_{lm} x_l y_m = 0,$$

ovvero

$$\sum \alpha_{lm} \xi_l \eta_m = 0,$$

sicchè, com'è noto,

$$\alpha_{lm} \equiv \frac{\partial \Delta(a)}{\partial a_{lm}}, \qquad a_{lm} \equiv \frac{\partial \Delta(\alpha)}{\partial \alpha_{lm}},$$

si prenda come sua imagine l'iperpiano a ovvero il punto α [che, in forza di queste ultime relazioni, sono mutuamente polari di 1° ordine rispetto alla varietà inviluppo Σ (3) ed alla varietà luogo Γ (5)]. Allora alle reciprocità per cui i punti x, y sono reciproci (connessi contenenti l'*elemento* xy) corrispondono gl'iperpiani a passanti pel punto di coordinate $X_{lm} = x_l y_m$, e così si ritrova Σ. In sostanza questo procedimento equivale a stabilire la reciprocità fra le due schiere di piani di Σ considerate come forme di 2ª specie (riferite risp. a π, π'): il luogo dei punti d'intersezione dei piani reciproci delle due schiere è la sezione di Σ coll'iperpiano a imagine della reciprocità. Similmente le coppie di rette reciproche di π, π' vengon rappresentate da iperpiani tangenti di Γ (iperpiani delle coppie di S_5 reciproci) che passano pel punto imagine α.

Si vede subito come si rappresentano le reciprocità che degenerano come connessi di punti. Quelle degeneri di 1ª specie, cioè ridotte ad una projettività fra due fasci di rette di π, π', son tali che $\Delta(a) = 0$ ed hanno per imagini gl'iperpiani tangenti di Σ. Quelle degeneri di 2ª specie si scompongono in due rette di π, π' ai cui punti bisogna associare come reciproci tutti i punti di π', π: esse hanno per imagini gl'iperpiani tangenti di Γ. Analogamente i punti di Γ e di Σ rappresentano risp. le reciprocità che sono degeneri di 1ª o di 2ª specie considerate come connessi di rette (*).

7. Due reciprocità qualunque fra π e π', e quindi tutte quelle del *fascio* da esse determinato, ove si considerino come connessi bilineari di punti hanno per intersezione (*coincidenza*) una corrispondenza univoca quadratica fra i punti di π e π'; e viceversa una tal corrispondenza si può sempre considerare come l'intersezione di un fascio di reciprocità. Segue che su Σ le imagini delle corrispondenze univoche quadratiche tra π e π' sono le sezioni fatte con gli S_6. Ai tre iperpiani tangenti condotti a Σ da un S_6 (n. 3) corrispondono le tre coppie di fasci projettivi di rette che sono omologhi nella corrispondenza qua-

(*) Si osservi qui e nel seguito l'analogia fra queste rappresentazioni delle reciprocità fra due piani e quelle delle coniche di un piano contenute in una mia Nota (Atti Acc. Torino, t. XX, 1885) *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano* ecc. (affine a quella del Veronese che citerò tosto). — Similmente ad osservazioni ivi fatte si può qui notare che la varietà Σ è l'intersezione di ∞^8 quadriche (M_7^2) le polari dei punti di S_8 rispetto a Γ, e che quando l'iperpiano imagine di una reciprocità passa pel punto che è imagine di un'altra, sicchè la quadrica polare di questo punto rispetto a Γ contiene il punto imagine della prima reciprocità, questa, considerata come connesso *di punti*, è armonica o coniugata alla seconda reciprocità considerata come connesso *di rette*.

dratica. — Analogamente gli S_5, S_4, ... di S_8 e le loro sezioni con Σ rappresentano i sistemi lineari ∞^2, ∞^3, .. di reciprocità fra π e π' e le loro intersezioni. Così la nota proposizione che da cinque coppie di punti reciproci in una reciprocità è in generale determinata una sesta equivale al fatto che un S_4 congiungente cinque punti di Σ taglia ancora questa varietà in un sesto punto. Ecc.

Ma il caso che a noi importa rilevare è quello che si presenta quando fra π e π' si abbia una *collineazione*. Questa (come coincidenza) è contenuta in ∞^2 reciprocità degeneri (come connessi di punti) cioè in quelle costituite dalle projettività fra i fasci di rette omologhi della collineazione. E viceversa due coppie di fasci projettivi di rette di π, π', quando abbiano una coppia di rette omologhe comuni, generano una collineazione. Dunque una collineazione è rappresentata su Σ dalla intersezione con due iperpiani tangenti, i quali contengano una stessa quadrica di Σ, da cui si astrae; quell'imagine sarà dunque una superficie del 4° ordine, che dovendo stare precisamente su ∞^2 iperpiani (tangenti a Σ) apparterrà ad un S_5. Questa superficie F^4 conterrà ∞^2 coniche corrispondenti alle ∞^2 coppie di punteggiate projettive contenute nella collineazione, e sarà perciò una *superficie di Veronese* (*). Si hanno così su Σ ∞^8 superficie sì fatte: per quattro punti qualunque di Σ ne passa in generale una determinata.

8. Si ottengono immediatamente le *trasformazioni projettive di Σ o Γ in se stessa* considerando quelle che ne derivano nelle due schiere di piani o di S_5, cioè le corrispondenti projettività di π e π'.

Trasformando π in se stesso con una collineazione, e similmente π', si ottiene in S_8 una trasformazione collineare di Σ (e Γ) in se stessa, mediante cui ogni schiera di piani (o di S_5) si muta in se. Se invece si trasforma π in π' con una collineazione, e π' in π con un'altra, si ha una 2ª specie di collineazioni di Σ, le quali cioè scambiano fra loro le due schiere di piani (o di S_5).

Una collineazione di 1ª specie è involutoria quando le due colli-

(*) *Vedi* Veronese *La superficie omaloide normale del quarto ordine* ecc. (Atti della R. Acc. dei Lincei, XIX_3, 1884), e la mia Nota citata al n° prec.

neazioni di π e di π' che le corrispondono sono anch'esse involutorie, cioè omologie armoniche Considerando i centri e gli assi di queste si trae che un'involuzione di 1ª specie di S_8 ha per *assi* un S_3 contenente due rette di Σ ed un S_4 contenente una quadrica ed un punto fuori di questa

Una collineazione di 2ª specie di Σ sarà involutoria quando le due collineazioni fra π, π' e fra π', π, cioè fra le due schiere di piani di Σ, sono inverse l'una dell'altra. È chiaro allora che le coppie di punti omologhi di π, π' rappresentano i punti uniti di Σ Dunque (n. 7) una collineazione involutoria di 2ª specie di Σ ha su questa una superficie F^4 di punti uniti, e però ha per assi l'S_5 della superficie ed un piano (*). Così agli ∞^8 S_5 contenenti le F^4 di Σ sono associati ∞^8 piani (che corrispondono a quegli spazi per dualità) —Se i piani π, π' son sovrapposti, risulta data una particolare collineazione fra essi: la identità, la quale farà corrispondere ad una coppia qualunque xy di punti di π, π' la coppia yx di π, π' Quindi la geometria delle coppie di punti di un piano π si rappresenta su Σ in modo che due punti omologhi di una certa involuzione di 2ª specie di Σ rappresentano due coppie fra loro inverse, e che una determinata F^4 rappresenta le coppie composte di punti coincidenti Projettandola dal piano assiale di quell'involuzione su un S_5, la varietà Σ verrà projettata doppiamente secondo una M_4^3 i cui punti rappresenteranno le coppie di punti di π senza più distinguere l'ordine di questi si ritorna cioè a quella rappresentazione delle coppie di punti di un sol piano che già si trova studiata nei lavori del sig Veronese e mio, citati dianzi —

Analogamente se si stabilisce una reciprocità su π ed una su π', ovvero se si trasforma π in π' con una reciprocità e π' in π con un'altra, si vengono a mutare le coppie di punti di π, π' in coppie di rette, e quindi i punti di Σ negl'iperpiani tangenti di Γ e viceversa, e si ottengono in S_8 le due specie di reciprocità atte a mutare Σ in Γ. Le

(*) Gl'iperpiani passanti per quel piano rappresentano il sistema lineare ∞^5 delle reciprocità fra π e π' che non son mutate, o meglio son mutate nelle loro inverse, dalla data collineazione fra π e π' La relazione fra una collineazione ed una reciprocità così fatte è scambievole, il prodotto di una qualunque di esse per l'inversa dell'altra è una corrispondenza involutoria, cioe una polarità reciprocità di 1^a specie mutano ogni schiera di piani di Σ nella schiera omonima di S_5 di Γ, mentre quelle di 2^a specie fanno uno scambio fra le 1^e e le 2^e schiere. Una reciprocità di 1^a specie è involutoria, e precisamente la polarità rispetto ad una quadrica, se le due reciprocità di π e di π' sono esse stesse delle polarità, una reciprocità di 2^a specie invece quando proviene da una sola reciprocità fra π e π' (con la inversa fra π' e π).

Una reciprocità di S_8 ha per luogo di punti uniti una quadrica M_7^2. Ora se essa è di 2^a specie, cioè determina una reciprocità fra la 1^a e la 2^a schiera di piani di Σ, il luogo dei punti d'incontro dei piani reciproci sarà, come sappiamo, l'intersezione di Σ con un iperpiano, e similmente il luogo delle intersezioni dei piani reciproci nella reciprocità che quella di S_8 determina fra la 2^a e la 1^a schiera. Ne segue che nel caso di una reciprocità di 2^a specie la detta quadrica taglia Σ nelle varietà secondo cui questa è segata da due iperpiani. Se poi la reciprocità di 2^a specie è una polarità, questi due iperpiani coincidono, e la quadrica fondamentale sarà tangente a Σ lungo l'intersezione di questa con un iperpiano.

9. Se la varietà Σ (o Γ) è reale, essa può presentare due casi distinti, quello *iperbolico* e quello *ellittico* (*). — Se ogni schiera di piani, e quindi di S_5, è coniugata di se stessa, come intersezioni degli S_5 coniugati (o come congiungenti i piani coniugati) si avranno in ogni schiera infiniti piani (od S_5) reali, sì che per qualunque punto reale di Σ (o di Γ) passerà un piano (od un S_5) reale di ogni schiera.

Se invece le due schiere di piani (e quindi quelle di S_5) sono fra loro coniugate, tutti i piani di Σ (e tutti gli S_5 di Γ) saranno imaginari, ma ognuno incontrerà il coniugato in un punto reale di Σ. Ne segue che gl'infiniti punti *reali* di Σ corrispondono univocamente senza

(*) Questi due casi si ottengono, nella rappresentazione parametrica (2) di Σ, supponendo o che il sistema di riferimento delle coordinate X_{lm} si componga di elementi tutti reali, oppure sia tale che per punti reali si abbia sempre la X_{lm} coniugata ad X_{ml}. — Anche per le varietà d'ordine $\binom{2n}{n}$ con due schiere ∞^n di S_n (v. n. 2) si hanno due casi analoghi da distinguere quando son reali ed hanno punti reali (se n è impari possono esser reali ma con tutti i punti imaginari).

eccezione agl'infiniti piani della 1ª schiera (o della 2ª) su cui essi stanno, e quindi anche agl'infiniti punti di π. *Una varietà Σ ellittica serve per rappresentare coi suoi punti reali tutti gli elementi (complessi) di una forma fondamentale di 2ª specie, ad esempio tutti i punti (complessi) di un piano*, a quello stesso modo che un'ordinaria quadrica ellittica, una sfera, serve per rappresentare gli elementi complessi di una forma fondamentale semplice Si può anzi dire che quella rappresentazione contiene questa. in quanto che i punti di una retta di π, cioè i piani di una M_3^3 della 1ª schiera di Σ, hanno per imagini i punti reali di una quadrica ellittica (intersezione di quella M_3^3 con la coniugata).

La rappresentazione reale dei punti complessi di un piano che noi così otteniamo è appunto una di quelle a cui io alludevo nell'introduzione ad un Saggio su *Un nuovo campo di ricerche geometriche* publicato nei vol. XXV e XXVI degli Atti dell'Acc di Torino (*). Con essa gli enti complessi *iperalgebrici* di cui ivi è incominciato lo studio si rappresentano mediante le curve, superficie e varietà triple, *algebriche* e reali, giacenti su Σ Le trasformazioni projettive di π, e quindi della 1ª schiera di piani di Σ (unendovi le projettività coniugate nella 2ª schiera), son rappresentate dalle trasformazioni projettive *reali* di 1ª specie (v n 8) di Σ, sicchè *la geometria projettiva del piano si rispecchia nella geometria projettiva* REALE *di* Σ, ove però si ponga a base il gruppo costituito dalle sole projettività di 1ª specie

Quanto alle trasformazioni projettive *reali* di 2ª specie di Σ in se stessa si vede subito che esse rappresentano quelle corrispondenze nella 1ª schiera di piani (o su π) che si posson considerare come prodotti di corrispondenze projettive (fra la 1ª e la 2ª schiera) e del coniugio, cioè le corrispondenze che in quel Saggio ho studiato sotto il nome

(*) Un'altra rappresentazione, coi punti reali di S_4, si ottiene subito se per forma fondamentale di 2ª specie si assume la rete dei piani di S_4 passanti per una retta r completamente imaginaria, e si prende per imagine di ogni piano l'unico suo punto reale Essa si può anche considerare come proveniente dal projettare la Σ ellittica dallo spazio di una sua quadrica reale, cfr n 4 (Rappresentazioni analoghe dei punti complessi di un S_n sui punti reali di un S_{2n}, ovvero di una varietà reale d'ordine $\binom{2n}{n}$ appartenente a $[n(n+2)]$ e analoga alla Σ ellittica, si avrebbero immediatamente). Su ciò e su cose affini ritornerò in un altro lavoro di *antiprojettività* (*anticollineazioni* ed *antireciprocità*). Le anticollineazioni involutorie del piano hanno infiniti punti uniti costituenti le *catene doppie*: imagini di queste (ed in particolare dell'insieme dei punti reali, se il piano è reale) saranno dunque (n. 8) le superficie F^4 di Veronese, reali, giacenti su Σ. Le antireciprocità involutorie od *antipolarità* saranno invece rappresentate dagl'iperpiani (o dai punti) reali di S_8, e quando l'iperpiano imagine sega Σ in punti reali, l'antipolarità avrà un'*iperconica* fondamentale, cioè luogo di punti uniti, rappresentata da quella sezione spaziale di Σ. Così le questioni sui sistemi lineari d'iperconiche, e sulle intersezioni di questi semplici enti iperalgebrici, che son studiate nel Saggio citato, diventano più intuitive quando si traspoitino su Σ, riducendosi allora a problemi sulle sezioni spaziali di questa varietà. Ad esempio da un'osservazione fatta alla fine del n. 8 intorno ai punti uniti di una reciprocità di 2ª specie di Σ si trae subito che se un'antireciprocità non involutoria di π ammette dei punti uniti, questi (hanno le loro imagini su due iperpiani coniugati, cioè su un S_6 reale, e però) costituiscono l'intersezione di un fascio d'iperconiche. Ecc. ecc.

Torino, aprile 1891.

CORRADO SEGRE