SUL MOVIMENTO DI PIÙ SFERE IN UN FLUIDO INDEFINITO E INCOMPRESSIBILE, E SUI FENOMENI COSÌ DETTI IDROMAGNETICI ED IDROELETTRICI; DEL DOTT. ANNIBALE STEFANINI.

(Dalla Tesi di Laurea in Fisica).

I.

Il problema del moto dei solidi nei fluidi incompressibili, fu trattato nel 1833 da Green, il quale, nelle sue *Ricerche sulle vibrazioni dei pendoli nei fluidi*, trovò la resistenza che offre un fluido al moto di un'ellissoide parallelamente ad uno dei suoi assi. Nel 1843 Stokes, nella sua memoria *Sopra alcuni casi del movimento dei liquidi*, indicò il potenziale di velocità per la sfera. Nel 1852 il Dirichlet trattò esso pure il moto della sfera in un liquido, dando per primo le equazioni delle linee di corrente, e accennò al caso dell'ellissoide che fu poi risoluto da Clebsch e da Schering. Molti altri si occuparono di tali problemi, come dei casi più generali di solidi qualunque o di rotazione, ma sempre nell'ipotesi che il volume dei solidi in movimento fosse invariabile ⁽¹⁾.

Il Dott. Bjerknes generalizzò i risultati ottenuti dal Dirichlet al caso che la sfera variasse anche di volume, e pubblicò nel 1863 gli studi a ciò relativi ⁽²⁾. In una seconda memoria ⁽³⁾, seguendo il metodo di Poisson per la distribuzione della elettricità sui conduttori trattò poi il caso del movimento di due sfere, invariabili di volume, lungo la retta congiungente i due centri. In questa memoria non è dato nè l'espressione del potenziale di velocità, nè la dimostrazione dei risultati; il Bjerknes dice di aver risoluto completamente il problema, e ne sviluppa alcune conseguenze, fra le quali quella che il moto uniforme di una delle sfere produce sull'altra una forza repulsiva.

(1) Per la bibliografia vedi Auerbach: La idrodinamica teorica ec. Milano 1881.

(2) Om de indre Tilstande i et inkompressibelt Fluidum hvori en Kugle bewæger sig, idet den forandrer volum. *Forhandlinger i Vihenskabsselskabet i Christiania*. 1863.

(3) Om den samtidige Bewægelse af Kugleformige Legemer i et inkompressibelt Fluidum. *Forh. ved de Skandinaviske Naturforskeres møder*, 1868.

Questo stesso problema fu risoluto dal Thomson (1) il quale trovò che una piccola sfera, oscillante secondo la retta che unisce il suo centro con quello d'un'altra sfera libera, ma ferma e grandissima, deve attirare o respingere quest'ultima: l'attira se la sfera maggiore è più densa del fluido; altrimenti esiste un *punto critico* in cui l'attrazione si cambia in repulsione. Per la distanza del punto critico il Thomson dà la formola:

$$c = \frac{R}{\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{\rho'}{\rho}}}}$$

ove R è il raggio, ρ' la densità della sfera ferma, ρ la densità del liquido; se r indica la distanza fra i centri delle due sfere, per $r < c$ vi è attrazione, per $r > c$ vi è repulsione. Il Bjerknæs osserva (2) che tal risultato, dato dal Thomson senza dimostrazione può essere ottenuto, sebbene non immediatamente, dalle formule che egli aveva già pubblicate nel 1868, dalle quali peraltro per la distanza del punto critico deduce il valore:

$$c = \frac{R}{\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{\rho'}{\rho}}}}$$

Il Bjerknæs ricerca inoltre le forze che sollecitano le particelle del fluido quando in esso si muove una sfera di volume costante: e supponendo di poter trascurare le forze che dipendono dalla 4^a potenza dell'inversa della distanza, con alcuni teoremi sulla indipendenza delle forze considerate, riduce il problema del moto contemporaneo di più sfere a quello in cui si tratti di due sole. Sostituendo poi alla massa di una sfera A , quella di un'altra sfera A' formata della prima e di un involucro di fluido uguale alla metà della massa di A , riduce ulteriormente il problema a quello di una sfera sola; allora indicando con forza di grado n quella che dipende dalla n^a potenza dell'inversa della distanza, egli trova che debbonsi considerare principalmente forze

(1) Philosoph. Mag. (4) vol. 40.

(2) Göttinger Nachrichten. 1877. S. 310.

di 3° e di 4° grado, e nel caso di due sfere A e B la forza di 3° grado agente sul centro di B dipende dalla accelerazione e quella di 4° grado dal quadrato della velocità del centro della sfera A. La prima forza può paragonarsi a quella esercitata da una calamita infinitesima posta nel centro di A sopra un polo magnetico nord situato nel centro di B, essendo la calamita diretta, dal sud al nord, come l'accelerazione totale della sfera A. La seconda forza può esser paragonata all'azione di una calamita infinitesima posta nel centro di A sopra una simile posta nel centro di B orientate l'una inversamente dall'altra secondo la direzione della velocità del centro di A.

L'effetto delle forze anzidette non dipende dal moto anteriore delle sfere, e le loro azioni scambievoli non sono, in generale, uguali ed opposte.

In un'altra memoria (1) il Bjerknes comincia dall'osservare che, secondo i risultati del Dirichlet, nel caso di una sfera sola, il fluido non oppone resistenza al moto rettilineo ed uniforme di essa, perchè la resistenza del fluido dipende soltanto dalla variazione della velocità. Nasce quindi la questione di sapere se anche nel caso del moto contemporaneo di più corpi in un fluido sussista sempre tal proprietà; ma s'intende fin d'ora che ciò non può essere, altrimenti un corpo qualunque del sistema non sarebbe disturbato dalle correnti che gli altri producono nel fluido, e questo è inammissibile, risultando già dai lavori del Thomson e del Bjerknes che due sfere, mobili contemporaneamente in un fluido, esercitano fra loro azioni scambievoli. Se inoltre si suppone che le sfere possano cambiar di volume, si dovrà tener conto anche degli effetti di questi nuovi moti, che si manifesteranno mediante forze motrici agenti secondo le centrali comuni.

Tali movimenti modificheranno lo stato interno del fluido, e per studiare la velocità e la pressione in ciascun suo punto, si ammette l'esistenza del potenziale di velocità, escludendo così i moti rotatori delle particelle del fluido, ciò che non indurrà peraltro limitazione alcuna, a motivo della forma sferica supposta

(1) Sur les mouvements simultanés de corps spheriques de formes variables dans un fluide indéfini et incompressible. Forh. ecc. Christiania 1871,

nei corpi che si considerano e della mancanza di attrito, se si suppone che nello stato iniziale il fluido sia in quiete.

Supponiamo dunque che in un fluido indefinito, omogeneo, incompressibile e privo di attrito, si muova un sistema di m sfere, variabili di volume, i cui raggi sieno molto piccoli in confronto delle distanze fra i centri; e cerchiamo di determinare il potenziale di velocità nel caso di m finito e che il fluido si estenda indefinitamente al di là dello spazio occupato dalle sfere. Ad eccezione di quelle molecolari, nessuna forza agisce nell'interno del fluido, e all'infinito la pressione deve convergere verso un limite dipendente soltanto dal tempo, ed abbastanza grande perchè i movimenti delle sfere possano aver luogo senza far cessare la continuità nel fluido.

Siano ora:

S_g una sfera qualunque fra le m date;

R_g il raggio, e a_g, b_g, c_g le coordinate ortogonali del centro g ;

$R'_g = \frac{dR_g}{dt}$ la *velocità di variazione*, cioè quella con la quale un

punto della superficie di S_g si allontana dal centro;

$s'_g =$ la *velocità di traslazione*, cioè quella del centro di S_g , e

le sue componenti sieno a'_g, b'_g, c'_g ;

r_g il raggio vettore condotto da g (centro di S_g) al punto $M(x, y, z)$;

(s'_g, r_g) l'angolo che fa la direzione di s'_g con quella di r_g ;

dn l'elemento di normale, e più particolarmente:

dn_g l'elemento di una normale esterna alla superficie di S_g , talchè per $r_g = R_g$ sia $dn_g = dr_g$.

Si trascura la *velocità di rotazione*.

Ciò posto, osserva il Bjerknes che una molecola di fluido situata sulla superficie di un corpo mobile e deformabile deve rimanervi indefinitamente, o almeno deve muoversi in modo da esser tangente alla superficie nell'atto di lasciarla; quindi scomponendo il movimento totale della sfera nell'elemento di tempo nei suoi elementi semplici, la velocità di una molecola di fluido situata sulla superficie di S_g , nella direzione della normale alla superficie stessa sarà data da:

$$R'_g + s'_g \cos(s'_g, r_g).$$

Se dunque indichiamo con ϕ il potenziale di velocità, dovremo avere:

$$(1) \quad \frac{d\phi}{dn_g} = R'_g + s'_g \cos(s'_g, r_g).$$

È questa la condizione che deve esser soddisfatta da tutti i punti della superficie di S_g e che servirà alla determinazione della funzione ϕ .

Dalla (1) si deduce che può porsi:

$$(2) \quad \phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} = \sum_i \phi^{(i)} \quad \text{per } i = 0, 1$$

purchè le $\phi^{(i)}$ sien determinate in modo che alla superficie di S_g si abbia:

$$(3) \quad \frac{d\phi^{(0)}}{dn_g} = R'_g$$

$$\frac{d\phi^{(1)}}{dn_g} = s'_g \cos(s'_g, r_g) = a'_g \cos(x, r_g) + b'_g \cos(y, r_g) + c'_g \cos(z, r_g).$$

La funzione ϕ che nello spazio esterno alle sfere deve soddisfare alla condizione $\Delta^2 \phi = 0$, può esser quindi formata mediante due altre funzioni, ciascuna delle quali deve soddisfare al $\Delta^2 = 0$ e alle condizioni (3) rispettivamente. Le $\phi^{(i)}$ devono esser inoltre finite e continue, con le loro derivate, in tutto lo spazio occupato dal fluido, devono annullarsi all'infinito, ed essere ad un sol valore. La $\phi^{(0)}$ corrisponde al caso di sfere variabili di volume, ma immobili; la $\phi^{(1)}$ al caso di sfere mobili, ma invariabili di volume.

Dalla (1) si vede ancora che il potenziale ϕ può esser composto di m potenziali parziali. Quello che è determinato dall'indice h corrisponde al caso che la sfera S_h si muova e vari di volume, mentre tutte le altre stanno fisse e invariabili; nel qual caso la $\phi_h^{(1)}$ deve determinarsi in modo che sulle altre sfere (al di fuori della S_h), sia $\frac{d\phi_h^{(1)}}{dn} = 0$. Perciò le componenti della velocità potranno essere espresse mediante la somma di m componenti parziali.

Per dimostrare che il potenziale di velocità è unico, il Bjerknes fa vedere, mediante lo sviluppo in serie di funzioni sferiche, che la funzione χ rappresentante la differenza fra due supposte

funzioni potenziali, deve esser sempre nulla; ma ciò si deduce più semplicemente dall'osservare che la funzione χ essendo a un sol valore, finita e continua con le sue derivate prime, e in tutto lo spazio S limitato dalla superficie σ della sfera di raggio infinito e dalle superficie S_g soddisfacendo alla equazione $\Delta^2 \chi = 0$, e sopra tali superficie avendo il valore zero, deve esser nulla in tutto lo spazio S ⁽¹⁾. Oppure si può anche osservare col Kirchhoff che lo spazio in cui si muovono le sfere essendo semplicemente connesso, il potenziale di velocità, se esiste, è unico.

Per determinare tal potenziale ϕ , si osservi intanto che le funzioni $\phi^{(i)}$ che soddisfano alla condizione $\Delta^2 \phi^{(i)} = 0$, che alla superficie di S_g verificano le condizioni (3), che sono finite e continue e hanno valori unici insieme alle loro derivate prime in tutta la porzione del fluido che circonda S_g e all'infinito si annullano, sono date da:

$$\begin{aligned}\phi_g^{(0)} &= -R_g \frac{R_g^2}{r_g^3} \\ \phi_g^{(1)} &= -\frac{1}{2} s_g' \frac{R_g^3}{r_g^3} \cos(s_g', r_g),\end{aligned}$$

talchè, essendo $\phi_g = \phi_g^{(0)} + \phi_g^{(1)}$, si può scrivere:

$$(4) \quad \phi_g = -\frac{1}{2} R_g \frac{d}{dt} \left(\frac{R_g^2}{r_g} \right).$$

La funzione (4) risolve completamente il problema idrodinamico nel caso di una sfera sola S_g . In prossimità della S_g le $\phi^{(i)}_g$ e le loro derivate sono finite e diverse da zero; a distanza infinita la $\phi^{(i)}_g$ è infinitesima dell'ordine $1+i$, e le sue derivate lo sono dell'ordine $2+i$.

Consideriamo ora le nuove funzioni:

$$\phi_{gh}^{(i)}, \quad \phi_{ghj}^{(i)}, \dots, \phi_{ghj\dots l}^{(i)}, \quad \phi_{ghj\dots lp}^{(i)}$$

in cui il numero degli indici sia maggiore di 1, e gli indici stessi

(1) Vedi *Betti* Teoria delle forze newtoniane. Pisa 1879, pag. 48.

appartengano alla serie dei numeri $1, 2, \dots, m$, e possano essere scelti arbitrariamente purchè sussistano le disuguaglianze:

$$g \geq h, \quad h \geq j, \quad \dots, l \geq p;$$

per definire le indicate funzioni, oltre tutte le proprietà fondamentali che valgono per le $\phi^{(i)}_g$ si aggiunge la condizione che alla superficie di S_p sia:

$$(5) \quad \frac{d\phi_{gh\dots l}}{dn_p} + \frac{d\phi_{gh\dots lp}}{dn_p} = 0.$$

Ciò posto, sarà facile determinare la $\phi^{(i)}_{gh\dots lp}$, quando si conosca la precedente $\phi^{(i)}_{gh\dots l}$. Infatti si osservi che attorno al centro l si può porre:

$$(6) \quad \phi^{(i)}_{gh\dots l} = \sum_0^\infty \frac{Z_n}{r_l^{n+1}}$$

essendo Z_n una funzione sferica di ordine n ; mentre, riferendoci ad un sistema polare col polo in p , si ha:

$$(7) \quad \phi^{(i)}_{gh\dots l} = \sum_0^\infty r_p^n X_n$$

in cui X_n è pure una funzione sferica di ordine n . Poichè le sfere S_e ed S_p nè si toccano nè si compenetrano la funzione precedente resterà finita e continua nell'interno di una sfera T_p concentrica a S_p , e il cui raggio δ_p è maggiore di R_p ; perciò lo sviluppo (7) vale per r_p compreso fra 0 e δ_p . Ciò essendo, si avrà:

$$(8) \quad \phi^{(i)}_{gh\dots lp} = \sum_0^\infty \frac{n}{n+1} \frac{R_p^{n+1}}{r_p^{n+1}} X_n.$$

Infatti, poichè la (7) è convergente entro i limiti indicati, si vede che la (8) è essa pure convergente per $R_p \leq r_p \leq \infty$; derivando rispetto a r_p , avremo dalle (7) e (8):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr_p} \phi^{(i)}_{gh\dots l} &= \sum_0^\infty n r_p^{n-1} X_n \\ \frac{d}{dr_p} \phi^{(i)}_{gh\dots lp} &= - \sum_0^\infty n \frac{R_p^{n+1}}{r_p^{n+1}} X_n, \end{aligned}$$

che sono pure convergenti, la prima per $0 < r_p \leq R_p$, e la seconda per $R_p \leq r_p < \infty$. Facendo in queste derivate $r_p = R_p$ la (5) è soddisfatta se per $\phi^{(i)}_{gh\dots lp}$ si prende la funzione definita dalla (8), la quale, avendo anche le altre proprietà volute, è perciò la funzione cercata.

Il Bjerknes indica un altro modo di ottenere la $\phi^{(i)}_{gh\dots lp}$ senza che sia necessario conoscere lo sviluppo di $\phi^{(i)}_{gh\dots l}$ attorno al centro p di S_p . Si supponga infatti di sapere esprimere la $\phi^{(i)}_{gh\dots l}$ in coordinate polari col polo in p e che dopo la trasformazione si abbia:

$$(9) \quad \phi^{(i)}_{gh\dots l} = \psi^{(i)}_{gh\dots l}(r_p, \omega_p, \theta_p);$$

paragonando i termini generali delle (7). (8) si vede che se invece di r_p si pone la sua coniugata $r^{(\pi)}_p$ determinata dalla relazione:

$$(10) \quad \rho = r^{(\pi)}_p = \frac{\pi^2}{r_p},$$

potremo porre:

$$(11) \quad \phi^{(i)}_{gh\dots lp} = \frac{1}{R_p} \int_0^{R_p} \pi^2 \frac{d}{d\pi} \left(\frac{1}{r_p} \psi(\rho, \omega_p, \theta_p) \right) d\pi = \frac{1}{R_p} \int_0^{\frac{R_p^2}{r_p}} \rho \frac{d}{d\rho} \psi^{(i)}_{gh\dots l}(\rho, \omega_p, \theta_p) d\rho$$

poichè si ha:

$$\frac{1}{R_p} \int_0^{R_p} \frac{\pi^2}{r_p} \frac{d}{d\pi} \left(\frac{\pi^{2n}}{r_p^n} \right) d\pi = \frac{n}{n+1} \frac{R_p^{2n+1}}{r_p^{n+1}}$$

Le funzioni $\phi^{(i)}_g$ e $\phi^{(i)}_{gh\dots lp}$ possono esser determinate anche per mezzo di altre funzioni f_{g_1} e $f_{g_1 h_1 \dots l_1 p_1}$ più semplici, tali cioè che si abbia, alla superficie di una sfera S_{g_1} determinata in grandezza e posizione dalle quantità a_{g_1} , b_{g_1} , c_{g_1} , R_{g_1} , la relazione:

$$\frac{df_{g_1}}{dn_{g_1}} = 1,$$

e sopra S_{p_1} :

$$\frac{d}{dn_{p_1}} (f_{g_1 h_1 \dots l_1} + f_{g_1 h_1 \dots l_1 p_1}) = 0$$

essendo $g, h, \dots, l, p$, nuovi indici qualunque, e dovendo le f avere le solite proprietà fondamentali rispetto alla continuità ecc. come le funzioni ϕ .

Introducendo un sistema speciale di punti coniugati, queste funzioni f possono aversi direttamente mediante integrali definiti multipli; altrimenti posson definirsi colle relazioni:

$$f_{g, h, \dots, l} = \sum_0^\infty \frac{Z_n}{r_{l, n+1}} = \sum_0^\infty r_{p, n} X_n$$

$$f_{g, h, \dots, l, p} = \sum_0^\infty \frac{n}{n+1} \frac{R_{p, n+1}}{r_{p, n+1}} X_n$$

ove Z_n e X_n sono funzioni sferiche di ordine n , o con altre relazioni analoghe alle (11). Con queste nuove funzioni si ha:

$$\phi_g^{(0)} = \left(\frac{R_g}{2} \frac{df_g}{dR_g} R'_g \right) = \frac{R_g}{2} R'_g \frac{df_g}{dR_g}$$

$$\phi_g^{(1)} = \left(\frac{R_g}{2} s'_g \frac{df_g}{ds_g} \right) = \frac{R_g}{2} s'_g \frac{df_g}{ds_g}$$

e analogamente

$$\phi_{gh\dots lp}^{(0)} = \left(\frac{R_g}{2} R'_g \frac{d}{dR_g} f_{g, h, \dots, l, p} \right)$$

$$\phi_{gh\dots lp}^{(1)} = \left(\frac{R_g}{2} s'_g \frac{d}{ds_g} f_{g, h, \dots, l, p} \right)$$

in cui le parentesi indicano che bisogna cambiare $g, h, \dots, l, p$, in $g, h, \dots, l, p$ dopo eseguite le operazioni.

Mediante le funzioni fin qui considerate si può formare, come vedremo, il potenziale di velocità cercato; ma poichè, quando si hanno più di due sfere, tal potenziale non può ottenersi che approssimativamente, il Bjerknes determina anche l'ordine delle funzioni che lo compongono, nell'intorno di una sfera qualunque, per poter giudicare dell'approssimazione che si ha ritenendo soltanto un certo numero di termini nell'espressione di ϕ .

Intanto è chiaro che nell'intorno di S_g la funzione $\phi^{(i)}_g$ e le sue derivate rapporto alle coordinate, sono finite e generalmente diverse da zero. In prossimità di un'altra sfera S_h la $\phi^{(i)}_g$ è in-

vece infinitesima dell'ordine $1+i$; le sue derivate lo sono dell'ordine $2+i$.

Per poter determinare l'ordine delle $\phi^{(i)}_{gh\dots lp}$ si osservi che se U_m è una funzione tale che $r_e^m U_m$ sia intera e omogenea di grado m nelle $x-a, y-b, z-c$, sviluppando in serie di funzioni sferiche attorno ad un punto f diverso da e avremo:

$$\frac{U_m}{r_e^{m+1}} = \frac{1}{(e,f)^{m+1}} \sum_0^\infty \frac{r_f^n}{(e,f)^n} V_n^{(m)},$$

e questa serie sarà convergente finchè $r_f < (e, f)$. La funzione $r_e^m U_m$ essendo intera, non potrà annullarsi in nessuna porzione di uno spazio a tre dimensioni, e sulla superficie di una sfera data non potrà annullarsi altro che lungo l'intersezione di essa con le superficie coniche aventi il vertice in e , rappresentate da $r_e^m U_m = 0$. Ma il primo termine di $r_e^m U_m$, contenendo il fattore $(x-a_e)^m$, non può annullarsi che per posizioni particolari degli assi, che potranno esser sempre evitate con spostamenti piccoli ad arbitrio; e da ciò può dedursi che i coefficienti $V_n^{(m)}$ saranno in generale, cioè in una infinità di direzioni attorno al punto f , diversi da zero. Gli sviluppi di $\phi^{(i)}_g$ e $\phi^{(i)}_{gh\dots lp}$ avendo la forma precedente, se ne conclude che in queste funzioni ciascun termine sarà infinitesimo di un ordine superiore di un'unità in confronto di quello che lo precede; avendo poi riguardo alle (7), (8) si deduce che l'ordine più piccolo è quello che corrisponde a $n=1$, nè esso può essere elevato con riduzioni o trasformazioni.

Mediante tali proprietà si deduce che se s è l'ordine di $\phi^{(i)}_{gh\dots l}$ attorno al punto p , l'ordine di $\phi^{(i)}_{gh\dots lp}$ attorno al punto q sarà $s+3$. Infatti dalle (7) e (8), poichè nell'intorno di p e di S_p i termini corrispondenti allo stesso valore di n sono dello stesso ordine, e poichè il termine corrispondente ad $n=0$ non compare in $\phi^{(i)}_{gh\dots lp}$, si deduce che in vicinanza di p l'ordine di $\phi^{(i)}_{gh\dots lp}$ è superiore di una unità rispetto a quello di $\phi^{(i)}_{gh\dots l}$. Ma dalla (8) stessa si vede che l'ordine di $\phi^{(i)}_{gh\dots lp}$ in vicinanza del punto q è superiore di due unità a quello che la funzione stessa ha sulla sfera S_p ; dunque l'ordine di $\phi^{(i)}_{gh\dots lp}$ nell'intorno di q è $s+3$.

Quindi, poichè l'ordine di $\phi^{(i)}_g$ attorno h è $1+i$, quello di $\phi^{(i)}_{gh}$ attorno j sarà $4+i$, e così di seguito; talchè se $n+2$ è

il numero degli indici, l'ordine di $\phi^{(i)}_{gh\dots l}$ attorno q sarà $3n+4+i$, e quello della stessa funzione sulla sfera S_p sarà $3n+2+i$.

L'ordine delle derivate si avrà immediatamente dalla (8), e si vede che quello di $\phi^{(i)}_{gh\dots l}$ o della sua derivata rapporto al tempo, e l'ordine delle derivate rapporto alle coordinate attorno al centro p sarà rispettivamente $3n+1+i$, e $3n+2+i$, essendo ora $n+1$ il numero degli indici; talchè queste considerazioni valgono anche per le funzioni $\phi^{(i)}_g$.

Trovate così le principali proprietà delle funzioni $\phi^{(i)}_{gh\dots l}$, il Bjerknes pone il potenziale ϕ sotto la forma:

$$(12) \quad \phi^{(i)} = \Sigma \phi^{(i)}_g + \Sigma \phi^{(i)}_{gh} + \Sigma \phi^{(i)}_{ghj} + \dots + \Sigma \phi^{(i)}_{gh\dots l} + \chi^{(i)}_n,$$

ove $\chi^{(i)}_n$ è una funzione da determinarsi, gli indici $g, h, \dots, l$ appartengono alla serie $1, 2, \dots, m$, e deve essere:

$$g \geq h, \quad h \geq j, \quad \dots, \quad l \geq p,$$

e il numero degli indici $g, h, \dots, l$ è $n+1$ con $n \geq 0$.

Indicando poi con $\Sigma^{h_{m_1}} \phi^{(i)}_{gh\dots l}$ una somma di funzioni $\phi^{(i)}_{gh\dots l}$ dalla quale si esclude la combinazione $h = m_1$, essendo m_1 un numero determinato della serie $1, 2, \dots, m$, si potrà anche scrivere:

$$\Sigma \phi^{(i)}_{gh\dots kl} = \Sigma \phi^{(i)}_{gh\dots km_1} + \Sigma^{h_{m_1}} \phi^{(i)}_{ghj\dots kl} = \Sigma^{k_{m_1}} \phi^{(i)}_{gh\dots km_1} + \Sigma^{l_{m_1}} \phi^{(i)}_{gh\dots kl},$$

o quindi:

$$(13) \quad \begin{aligned} \phi^{(i)} = & \phi^{(i)}_{m_1} + \Sigma^{e_{m_1}} \left(\phi^{(i)}_g + \phi^{(i)}_{gm_1} \right) + \Sigma^{h_{m_1}} \left(\phi^{(i)}_{gh} + \phi^{(i)}_{ghm_1} \right) \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \Sigma^{k_{m_1}} \left(\phi^{(i)}_{gh\dots k} + \phi^{(i)}_{gh\dots km_1} \right) + \Sigma^{l_{m_1}} \phi^{(i)}_{gh\dots kl} + \chi^{(i)}_n. \end{aligned}$$

La funzione d'errore $\chi^{(i)}_n$ è evidentemente finita e continua con le sue derivate in tutto lo spazio occupato dal fluido, nel quale sodisfa alla condizione $\Delta^2 \chi^{(i)}_n = 0$; essa e le sue derivate sono in tale spazio ad un sol valore e all'infinito si annullano, e

sulla superficie di una sfera qualunque S_{m_1} sodisfa alla condizione:

$$\frac{d\chi^{(i)}_n}{dn_{m_1}} + \sum_{m_1}^1 \frac{d}{dn_{m_1}} \phi_{gh\dots kl}^{(i)} = 0.$$

Poichè $\chi^{(i)}_n$ non dipende dalla scelta del numero m_1 , per ciò che si è osservato precedentemente l'ordine di $\chi^{(i)}_n$ alla superficie di una sfera qualunque è $3n+2+i$, essendo $n+1$ il numero delle lettere $g, h\dots l$. Indicando poi con R la media aritmetica delle distanze centrali, la funzione:

$$\psi_n^{(i)} = R^{3n+2+i} \chi_n^{(i)}$$

avrà le stesse proprietà di $\chi^{(i)}_n$ e per di più la sua derivata rispetto alla normale, su una superficie S_{m_1} deve esser finita e diversa da zero, quando le distanze centrali crescono indefinitamente: nel qual caso la $\psi^{(i)}_n$ si conserva finita, perchè le condizioni relative alle superficie che limitano lo spazio nel quale è verificata la condizione $\Delta^2 = 0$ sono espresse da funzioni che restano finite anche quando le distanze centrali crescono indefinitamente. Quindi, sia sulle superficie delle sfere, sia in un punto qualunque del fluido, l'ordine di $\chi^{(i)}_n$ è $3n+2+i$. Tuttociò serve a determinare l'approssimazione che si avrà pel potenziale $\phi^{(i)}$, quando per esso si prendano i primi termini delle (12) o (13).

Le funzioni ausiliarie $\phi^{(i)}_g, \phi^{(i)}_{gh}\dots$ posson dirsi *potenziali parziali*. Infatti, ponendo:

$$\phi^{(i)} = \sum \phi_g^{(i)}$$

si avrà una prima approssimazione (errore di ordine $2+i$), ritenendo il movimento totale come una somma di m movimenti parziali determinati dalle $\phi^{(i)}_g$, e tali che ciascuno si produca pel moto di una sfera sola, come se le altre non esistessero. Ma ciascuno di tali movimenti produce dei moti secondari, e per tener conto anche di questi, bisognerà prendere:

$$\phi^{(i)} = \sum \phi_g^{(i)} + \sum \phi_{gh}^{(i)}.$$

Così il movimento effettivo (con un'approssimazione di ordine

5 + i) sarebbe ritenuto composto di m^2 movimenti parziali: cioè di m movimenti *diretti*, prodotti da ciascuna sfera come se le altre non esistessero, e di $m(m-1)$ movimenti di reazione, perchè ciascuna sfera reagisce con la sua presenza nel fluido. Per le condizioni (5) cui devon soddisfare le $\phi^{(i)}_{gh\dots}$ si deduce che sulla sfera S_h la componente normale della velocità prodotta da S_g è uguale e contraria a quella reazione che può immaginarsi esser prodotta dalla S_h stessa.

Così seguitando, col prendere successivamente un maggior numero di somme nella $\phi^{(i)}$, si viene a tener conto dei successivi moti di reazione. Le proprietà delle funzioni di cui si compone la $\phi^{(i)}$ permettono tuttavia di ritenere pochi termini solamente, e di raggiunger non pertanto una sufficiente approssimazione nei risultati.

Se per $\phi^{(i)}$ si prende la forma (13), se si considera cioè lo stato del fluido soltanto in prossimità della sfera S_{m_1} , e si prende:

$$\phi^{(i)} = \phi^{(i)}_{m_1} + \Sigma \epsilon_{m_1} (\phi^{(i)}_g + \phi^{(i)}_{gm_1}) + \Sigma h_{m_1} (\phi^{(i)}_{gh} + \phi^{(i)}_{ghm_1}) + \dots + \Sigma k_{m_1} (\phi^{(i)}_{gh\dots k} + \phi^{(i)}_{gh\dots km_1}),$$

l'errore sarà dell'ordine di:

$$\Sigma_{m_1} \phi^{(i)}_{gh\dots kl} + \chi_n^{(i)}$$

cioè dell'ordine $3n+1+i$, inferiore perciò di un' unità a quello che si aveva adottando la forma (12). Se per questo lato vi è uno svantaggio, vi è peraltro l'utilità che la (14) si presta meglio allo studio dei fenomeni in prossimità di una sfera data. Del resto, la velocità del fluido e le sue componenti, come la pressione totale sulla S_{m_1} , si ottengono con lo stesso grado di approssimazione che si avrebbe adottando la forma completa:

$$\phi^{(i)} = \Sigma \phi^{(i)}_g + \Sigma \phi^{(i)}_{gh} + \dots + \Sigma \phi^{(i)}_{gh\dots l}.$$

Prendendo semplicemente:

$$\phi^{(i)} = \Sigma \phi^{(i)}_{m_1}$$

la velocità e la pressione sarebbero determinate con una approssimazione di ordine $2+i$, e sarebbero indipendenti dai movi-

menti e dalle variazioni di volume delle sfere circostanti. In realtà non è peraltro così, e ponendo:

$$(15) \quad \phi^{(i)} = \phi_{m_i}^{(i)} + \sum_{g \neq i} \left(\phi_g^{(i)} + \phi_{gm_i}^{(i)} \right),$$

cioè trascurando soltanto le quantità di ordine $5+i$, si vede che quei cangiamenti di volume di ciascuna sfera agiscono essi pure sulle altre sfere. Prendendo poi un numero maggiore di termini in $\phi^{(i)}$, cioè spingendo l'approssimazione all'ordine $8+i$, si riconosce che tali effetti non sono tra loro indipendenti. In seguito vedremo, prendendo per $\phi^{(i)}$ la forma (15), che l'accelerazione nel movimento della sfera S_{m_i} ha per effetto di aggiungere alla sua massa una massa ideale, che non dipende nè dalle posizioni nè dalle velocità delle altre sfere; con forme più complete di $\phi^{(i)}$ tale indipendenza sparisce, e la massa ideale risulta essa pure variabile.

Si conclude perciò che quanto maggiore è il numero delle somme che si prendono nella espressione di $\phi^{(i)}$, e tanto maggiore è l'approssimazione che si raggiunge; ma d'altrettanto maggiori sono le difficoltà che resultano dalla complicazione delle formule, talchè non conviene far uso di espressioni dalle quali non si possan trarre risultati semplici, e l'approssimazione non si spinge al di là dell'ordine $8+i$. Nelle comunicazioni fatte all'*Accademia delle Scienze* di Parigi (1) il Bjerknes dice di aver dimostrato che pel caso di distanze centrali assai grandi la serie che esprime il potenziale di velocità è convergente e composta di termini che sono integrali multipli, che, nel caso di movimenti lungo una centrale comune, possono essere calcolati. Egli prometteva di mostrare tali suoi studi, i quali lo avrebbero condotto a una teoria generale delle funzioni, comprendente come caso particolare quella delle funzioni sferiche: ma finora non ha pubblicato nulla in proposito.

Le proprietà accennate delle funzioni $\phi_{gh\dots l}^{(i)}$ sono state dimostrate per lo spazio esterno alle sfere: entro queste sfere le ϕ potrebbero diventare infinite, e non si possono adoprare a studiare i moti interni che si avrebbero supponendo le sfere permea-

(1) Comptes rendus, 1877. pag. 1375.

bili. Per trovare formule analoghe alle precedenti, valide in tutto quanto lo spazio, il Bjerknes introduce nuove ipotesi e nuove funzioni, mediante le quali si possono ottenere le relazioni fra i movimenti esterni ed interni, e la distribuzione dei movimenti parziali.

In altre memorie inserite nelle *Göttinger Nachrichten* pel 1873 e 1874, il Bjerknes dà la forma del potenziale di velocità pel moto di un' ellissoide trovata da Schering, estende le soluzioni di Schering e di Dirichlet ad uno spazio ad n dimensioni, supponendo ancora che l' ellissoide sia variabile di volume, ed accenna al problema del movimento del fluido nello spazio *interno* all' ellissoide, con la condizione che il volume del fluido resti costante.

Dopo conosciuti i lavori del Thomson e del Kirchhoff, il Bjerknes ottenne altri risultati, che pubblicò nei *Forhandlinger* di Cristiania pel 1875, e nel *Repertorium der Mathematik* pel 1876, dando l' equazioni pel movimento di due sfere, nell' ipotesi di poter trascurare le 5^e potenze dei rapporti fra i raggi e le distanze centrali. Il metodo seguito per ottenere le equazioni indicate, è contenuto in una memoria pubblicata posteriormente (1), della quale perciò dovremo occuparci prima di esporre i risultati contenuti nella memoria del 1875.

Nel caso che in un fluido incompressibile ed indefinito si muovano più sfere, variabili anche di volume, il potenziale di velocità è dato, come già si vide, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al 5°, da:

$$\phi = \Sigma \phi_g + \Sigma \phi_{gk}.$$

Per ottenere le funzioni ϕ_{gk} che qui compariscono, giova introdurre l' operazione $\overline{\phi_g}$, che è distinta dalla funzione ϕ_g ; tale operazione, ritenendo che, nella derivazione, il punto M sia fisso, è definita da:

$$\overline{\phi_g} = -\frac{1}{4} R_g^3 \left(a'_g \frac{d}{da_g} + b'_g \frac{d}{db_g} + c'_g \frac{d}{dc_g} + R'_g \frac{d}{dR_g} \right)$$

ossia, rappresentando con e una qualunque delle quantità a, b, c, R :

(1) *Göttinger Nachrichten*, 1876.

$$\overline{\phi_g} = -\frac{1}{2} R_g^3 \sum e'_g \frac{d}{dc_g}.$$

Per conseguenza si ha:

$$\phi_g = \overline{\phi_g} \left(\frac{1}{r_g} \right).$$

Ponendo, al solito,

$$\phi_g = \phi^{(0)}_g + \phi^{(1)}_g,$$

per l'operazione composta $\overline{\phi_g} \overline{\phi_k}$ si ha:

$$\overline{\phi_g} \overline{\phi_k} = \overline{\phi_k} \overline{\phi_g} = \overline{\phi^{(0)}_g} \overline{\phi^{(0)}_k} + \overline{\phi^{(0)}_g} \overline{\phi^{(1)}_k} + \overline{\phi^{(1)}_g} \overline{\phi^{(0)}_k} + \overline{\phi^{(1)}_g} \overline{\phi^{(1)}_k}$$

Indicando poi con D_g la variazione presa nella direzione di r_g , essendo cioè:

$$D_g = \xi_g \frac{d}{da_g} + \eta_g \frac{d}{db_g} + \zeta_g \frac{d}{dc_g}$$

ove

$$\xi_g = \frac{x-a_g}{r_g} \quad \eta_g = \frac{y-b_g}{r_g} \quad \zeta_g = \frac{z-c_g}{r_g},$$

se si indica con r_{kg} la distanza fra i centri k e g , per $\overline{\phi_k} \left(\frac{1}{r_k} \right)$, cioè per ϕ_k , potremo scrivere:

$$(16) \quad \phi_k = \sum_i^{\infty} r_{g^n} \frac{D_{g^n}}{\pi(n)} \overline{\phi_k} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right).$$

Questo sviluppo vale entro una sfera che ha il centro in g e per raggio r_{kg} ; ciascun suo termine sodisfa al $\Delta^* = 0$, e il coefficiente di r_{g^n} è la funzione sferica X_n della formula (7). In modo analogo a quello con cui dalla $\phi_{gh\dots l}$ si dedusse la $\phi_{gh\dots lp}$ si ha ora dalla ϕ_k :

$$\phi_{kg} = \sum_i^{\infty} \frac{n}{n+1} \frac{R_{g^{n+1}}}{r_{g^{n+1}}} \frac{D_{g^n}}{\pi(n)} \overline{\phi_k} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right).$$

Così, con notazioni già adottate, si può scrivere:

$$\phi = \phi_g + \sum_g^k (\phi_k + \phi_{kg}) + \sum_i^i \sum_g^h \phi_{ih}.$$

Ora se q è la densità del fluido, la sua forza viva è data da:

$$T = \frac{q}{2} \int \Delta \phi \, dV = - \frac{q}{2} \int_S \phi \frac{d\phi}{dr} \, dS,$$

ove l'integrale relativo ad S deve essere esteso alla superficie di tutte quante le sfere; la parte che si riferisce alla sfera di raggio infinito che si può intendere limitare il fluido, si annulla, perchè all'infinito $\phi \frac{d\phi}{dr}$ è infinitesimo del 3° ordine. Poniamo ora:

$$T = \Sigma T^{(g)}$$

ove

$$T^{(g)} = - \frac{q}{2} \int \phi \frac{d\phi}{dr_g} \, dS_g$$

con dS_g elemento superficiale della sfera S_g . In modo analogo a quello che abbiamo fatto per ϕ , scomporremo la forza viva $T^{(g)}$ in diverse parti, ponendo:

$$T^{(g)} = T_g^{(g)} + \Sigma_{kg} T_{kg}^{(g)} + \Sigma^i \Sigma_{ih} T_{ih}^{(g)}$$

ove

$$T_g^{(g)} = - \frac{q}{2} \int \phi_g \frac{d\phi_g}{dr_g} \, dS_g$$

$$T_{kg}^{(g)} = - \frac{q}{2} \int (\phi_k + \phi_{kg}) \frac{d\phi}{dr_g} \, dS_g$$

$$T_{ih}^{(g)} = - \frac{q}{2} \int \phi_{ih} \frac{d\phi}{dr_g} \, dS_g$$

con h diverso da g .

Alla superficie di S_g si ha:

$$\phi_g = - R_g R_g' - \frac{1}{2} R_g s_g' \cos(s_g', r_g)$$

$$\frac{d\phi}{dr_g} = R_g' + s_g' \cos(s_g', r_g)$$

quindi avremo:

$$T_g^{(g)} = 2\pi q R_g^3 (R_g'^2 + \frac{1}{6} s_g'^2),$$

e analogamente:

$$T_{kg}^{(g)} = 2\pi q \bar{\phi} \bar{\phi}_k \left(\frac{1}{r_{kg}} \right),$$

$$T_{ih}^{(g)} = -\pi q \frac{R_i^3 R_i' R_h^3 R_h' R_g^3 R_g'}{r_{ih}^3 r_{hg}^3} \cos(ih, hg)$$

avendo in $T_{ih}^{(g)}$ trascurato i termini di 5° ordine. Avremo per conseguenza:

$$T = 2\pi q \sum_g R_g^3 (R_g'^2 + \frac{1}{6} s_g'^2) + 2\pi q \sum_g \sum_k \bar{\phi}_g \bar{\phi}_k \left(\frac{1}{r_{kg}} \right) - \pi q \sum_i \sum_h \sum_g \frac{R_i^3 R_i' R_h^3 R_h' R_g^3 R_g'}{r_{ih}^3 r_{hg}^3} \cos(ih, hg)$$

Ammettendo anche che i rapporti $\frac{R_g'}{R_g}$ siano piccolissimi, e comparabili con $\frac{R_g}{r_{kg}}$, avremo anche più semplicemente:

$$(17) \quad T = 2\pi q R_g^3 (R_g'^2 + \frac{1}{6} s_g'^2) + 2\pi q \sum_g \sum_k \bar{\phi}_g \bar{\phi}_k \left(\frac{1}{r_{kg}} \right).$$

Per ottenere le equazioni del moto, il Bjercknes confronta le due espressioni che possono aversi per la variazione dell'integrale:

$$\int_0^\tau T dt.$$

Dapprima, integrando per parti, e ritenendo che le variazioni δa_g , δb_g , δc_g sieno nulle ai limiti, si ha:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^\tau T dt = & \int_0^\tau \left[\left(\frac{dT}{da_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{da_g'} \right) \delta a_g + \left(\frac{dT}{db_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{db_g'} \right) \delta b_g + \left(\frac{dT}{dc_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{dc_g'} \right) \delta c_g \right. \\ & \left. + \left(\frac{dT}{dR_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{dR_g'} \right) \delta R_g \right] dt. \end{aligned}$$

ove qui, come nelle formule seguenti, soltanto le derivate rapporto a t sono derivate totali.

Una seconda espressione per la variazione dello stesso integrale si ha ponendo per T il suo valore:

$$T = \frac{q}{2} \int_V (u^2 + v^2 + w^2) dV$$

dove u, v, w sono le componenti della velocità del fluido nel punto (x, y, z) , e l'integrale va esteso a tutto lo spazio V occupato dal fluido. Allora, seguendo il metodo indicato dal Boltzmann (1) si ha:

$$\delta \int_0^\tau T dt = q \int_0^\tau dt \int_V \left(u \frac{d\delta x}{dt} + v \frac{d\delta y}{dt} + w \frac{d\delta z}{dt} \right) dV.$$

Integrando per parti rapporto a t , osservando che u, v, w contengono t , sia esplicitamente, sia mediante x, y, z , avendo riguardo alle equazioni dell'idrodinamica date da Euler, si ha:

$$\int_0^\tau T dt = q \int_V (u\delta x + v\delta y + w\delta z)_\tau dV + \int_0^\tau dt \int_V \left(\frac{d(p-P)}{dx} \delta x + \frac{d(p-P)}{dy} \delta y + \frac{d(p-P)}{dz} \delta z \right) dV$$

notando che per $t=0$ si ha $\delta x = \delta y = \delta z = 0$. La P è la pressione limite all'infinito, costante o dipendente soltanto da t .

Il primo integrale del 2° membro, notando che u, v, w sono derivate di ϕ rispetto alle coordinate, con integrazioni per parti si riduce a

$$- q \int (\phi)_\tau \delta \sigma \cos(\delta \sigma, n) dS,$$

essendo dS l'elemento delle superficie che limitano lo spazio V , e $\delta \sigma \cos(\delta \sigma, n)$ lo spostamento nel senso della normale a tali superficie. Poichè nel tempo τ si ha per tutte le sfere $\delta \sigma \cos(\delta \sigma, n) = 0$, e sulla superficie della sfera di raggio infinito la quantità

$$(\phi)_\tau \delta \sigma \cos(\delta \sigma, n)$$

è infinitesima del 3° ordine, quel primo integrale è nullo.

Anche il secondo integrale che comparisce nell'equazione precedente, tenendo conto dell'equazione della continuità per gli spostamenti, si cambia in

(1) Borchardt's Jour. für die rene und ang. Math. Bd. 73. S. 127.

$$-\int_0^{\tau} dt \int (p - P) \delta \sigma \cos(\delta \sigma, n) dS.$$

In questo, le parti corrispondenti alla sfera di raggio infinito e a ciascuna sfera differente dalla S_g si annullano, perchè su di esse si ha $\delta \sigma \cos(\delta \sigma, n) = 0$; quindi si ottiene:

$$(18) \delta \int_0^{\tau} T dt = - \int_0^{\tau} dt \int (p - P) [\delta a_g \cos(r_g, x) + \delta b_g \cos(r_g, y) + \delta c_g \cos(r_g, z) + \delta R_g] dS_g.$$

Il confronto fra le due espressioni ottenute per la variazione dell'azione, dà perciò le relazioni:

$$\int (P - p) \cos(r_g, x) dS_g = \frac{dT}{da_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{da'_g}$$

$$\int (P - p) \cos(r_g, y) dS_g = \frac{dT}{db_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{db'_g}$$

$$\int (P - p) \cos(r_g, z) dS_g = \frac{dT}{dc_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{dc'_g}$$

$$\int (P - p) dS_g = \frac{dT}{dR_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{dR'_g}.$$

Gli integrali

$$-\int p \cos(r_g, x) dS_g, \quad -\int p \cos(r_g, y) dS_g, \quad -\int p \cos(r_g, z) dS_g$$

rappresentano le componenti X, Y, Z di una forza che ha origine in seguito alla pressione sulla superficie di S_g . La pressione $-\int p dS_g$ si riterrà quale forza dilatante la sfera; presa col segno contrario, rappresenterà una forza comprimente.

Supponendo inoltre l'esistenza di una forza esterna X_g, Y_g, Z_g , e di una forza U_g che abbia per effetto di far cambiare il volume della sfera S_g , ed indicando con M_g la massa della sfera S_g e con N_g una costante conveniente, le equazioni del movimento per la sfera S_g saranno:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_g a''_g = X_g + \frac{dT}{da_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{da'_g} \\ M_g b''_g = Y_g + \frac{dT}{db_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{db'_g} \\ M_g c''_g = Z_g + \frac{dT}{dc_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{dc'_g} \\ N_g R''_g = U_g + \frac{dT}{dR_g} - \frac{d}{dt} \frac{dT}{dR'_g} - 4\pi R_g^3 P. \end{array} \right.$$

Le derivate della T che qui compariscono si deducono dalla espressione (17) data per la T nell'ipotesi che i rapporti $\frac{R'_g}{R_g}$ siano dello stess'ordine di piccolezza dei rapporti $\frac{R_g}{r_{kg}}$. Ponendo mente al significato di $\overline{\phi_g}$ si ha

$$\frac{dT}{da_g} = 4\pi q \frac{d}{da_g} \sum^k \overline{\phi_g} \overline{\phi_k} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right)$$

con due analoghe per le derivate rispetto a b_g e c_g , e

$$\frac{dT}{dR_g} = 4\pi q \frac{d}{dR_g} \sum^k \overline{\phi_g} \overline{\phi_k} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right) + 6\pi q R_g^3 (R'_g + \frac{1}{6} s'^3_g).$$

Uguualmente si ha:

$$\frac{dT}{da'_g} = \frac{2}{3}\pi q R_g^3 a'_g - 2\pi q R_g \frac{d}{da_g} \sum^k R_g^3 \overline{\phi_k} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right)$$

e altre tre per le derivate rispetto a b'_g , c'_g e R'_g .

Poniamo ora:

$$M_g = \frac{4}{3}\pi q_g R_g^3$$

$$m_g = \frac{4}{3}\pi q R_g^3$$

$$M_g = M_g + \frac{m_g}{2}$$

ove q_g è la densità della sfera S_g , ed m_g indica la massa fluida spostata dalla S_g stessa; ponendo ancora:

$$(20) \quad \Omega_g = \frac{d}{dt} \left[2\pi q R_g^3 \sum^k \overline{\phi_k} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right) \right] + 4\pi q \sum^k \overline{\phi_g} \overline{\phi_k} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right).$$

le prime tre equazioni del moto potranno porsi sotto la forma:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(M_g a'_g) = \frac{d\Omega_g}{da_g} + X_g \\ \frac{d}{dt}(M_g b'_g) = \frac{d\Omega_g}{db_g} + Y_g \\ \frac{d}{dt}(M_g c'_g) = \frac{d\Omega_g}{dc_g} + Z_g. \end{array} \right.$$

Per la quarta equazione, ponendo:

$$O_g = 2\pi q R_g^3 \Sigma^k \bar{\phi}_k \left(\frac{1}{r_{kg}} \right)$$

$$\Omega_g^* = 4\pi q \Sigma^k \bar{\phi}_g \bar{\phi}_k \left(\frac{1}{r_{kg}} \right)$$

$$N_g = N_g + 3m_g$$

e ricordando che

$$T_g^{(g)} = 2\pi q R_g^3 (R'_g + \frac{1}{6} s'^2_g)$$

si ottiene:

$$(22) \quad \frac{d}{dt}(N_g R'_g) = \frac{d}{dR_g} \left(\frac{2}{3} \frac{dO_g}{dt} + \Omega_g^* + T_g^{(g)} \right) + U_g - 4\pi R_g^3 P.$$

La forma (21) delle equazioni del moto, è quella sotto la quale sono date nella citata memoria inserita nei *Forhandlinger* pel 1875; poichè da queste deduconsi le spiegazioni dei fenomeni che avvengono nel moto di due sfere in un liquido, si può tralasciare di seguire il Bjerknes nello studio delle equazioni sotto la forma (19).

Per la funzione Ω_g che compare nelle equazioni (21), oltre la forma (20) è utile avere lo sviluppo che si ottiene eseguendo le operazioni ivi indicate. Per questo si osservi che si ha:

$$\bar{\phi}_k^{(0)} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right) = - R_k^* R'_k \frac{1}{r_{kg}}$$

$$\bar{\phi}_k^{(1)} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right) = - \frac{1}{2} R_k^3 s'_k \cos(s'_k, r_{kg})$$

$$\bar{\phi}_k^{(0)} \bar{\phi}_g^{(0)} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right) = R_k^* R'_k R_g^* R'_g \frac{1}{r_{kg}}$$

$$\bar{\phi}_k^{(0)} \bar{\phi}_g^{(1)} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right) = \frac{1}{2} R_k^* R'_k R_g^3 s'_g \frac{1}{r_{kg}^2} \cos(s'_g, r_{kg})$$

$$\bar{\phi}_k^{(1)} \bar{\phi}_g^{(0)} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right) = \frac{1}{2} R_g^3 R'_g R_k^5 s'_k \frac{1}{r_{kg}^2} \cos(s'_k, r_{kg})$$

$$\bar{\phi}_k^{(1)} \bar{\phi}_g^{(1)} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right) = \frac{1}{4} R_k^3 R_g^3 s'_k s'_g \frac{1}{r_{kg}^3} [\cos(s'_k, s'_g) + 3 \cos(s'_k, r_{kg}) \cos(s'_g, r_{kg})]$$

Con questo, si ha perciò dalla (20), ricordando l'espressione di $\bar{\phi}_k \bar{\phi}_g$:

$$\begin{aligned} \Omega_g = & -\pi \eta \Sigma_k \left\{ 2 R_g^* \frac{d}{dt} (R_g R_k^* R'_k) \frac{1}{r_{kg}} + (5 R_g^3 R_k^* R'_k + R_k^3 R_g^* R'_g) \frac{1}{r_{kg}^2} s'_k \cos(s'_k, r_{kg}) \right. \\ & \left. + R_g^3 R_k^3 \frac{1}{r_{kg}^2} \left(j_k \cos(j_k, r_{kg}) + \frac{1}{r_{kg}^3} s'_k [3 \cos^2(s'_k, r_{kg}) - 1] \right) \right\} \end{aligned}$$

ove j_k indica l'accelerazione totale del centro k della sfera S_k .

Quest'ultima forma di Ω_g si presta meglio per la determinazione della forza che agisce in un dato momento; mentre la prima, (20), serve specialmente per avere il valor medio della forza stessa, specialmente se è periodicamente variabile, in un dato intervallo di tempo.

Le due forme di Ω_g mostrano pure che, con l'approssimazione indicata, il caso di parecchie sfere si può ricondurre a quello in cui ve ne sieno due sole S_g, S_k , poichè le forze che nascono per effetto del loro movimento, sono indipendenti. Di più si vede che, la espressione di Ω_g non contenendo la s'_g , l'azione di una sfera sull'altra non dipende che dalla velocità di quella da cui emana l'azione. Le azioni scambievoli saranno perciò uguali e contrarie solamente quando le velocità delle due sfere soddisfino a condizioni speciali.

Supponendo di aver due sole sfere S_g ed S_k e che possano

trascuarsi le quantità dell'ordine di $\frac{s'}{r^3}$, le equazioni del movimento possono porsi sotto la forma:

$$\frac{d}{dt}(M_g a'_g) = \frac{3}{8\pi q} \frac{d}{dt}(m_g m'_k) \frac{a_g - a_k}{r_{kg}^3} - \frac{1}{4\pi q} m'_g m'_k \frac{a_g - a_k}{r_{kg}^3} + X_g$$

con altre due analoghe per le coordinate b , c ; qui, come sempre, gli apici rappresentano derivate rapporto al tempo. Dalla forma ora scritta si deduce, che sulla massa variabile M_g agiscono due forze:

$$a) \quad \frac{3}{8\pi q} \frac{d}{dt}(m_g m'_k) \frac{1}{r_{kg}^3}$$

$$b) \quad - \frac{1}{4\pi q} m'_g m'_k \frac{1}{r_{kg}^3}$$

ambidue in ragione inversa del quadrato delle distanze, e che sono attrattive o repulsive secondo che le precedenti espressioni sono negative o positive.

Se le due sfere compiono delle pulsazioni (cambiamenti di volume) uguali od opposte, in modo che sia

$$\frac{m'_g}{m_g} = \pm \frac{m'_k}{m_k},$$

la forza $a)$ può riguardarsi come producente oscillazioni, mentre la forza $b)$ è una forza continua di traslazione.

Per effetto della forza $a)$, la S_k esercita sulla S_g una repulsione, quando il volume di S_k è minimo; quando invece il volume di S_k è massimo, l'azione su S_g è attrattiva. Ciò accadrebbe anche se S_g , che è soggetta all'azione di S_k , non potesse, appunto per questo, cambiare il suo volume.

Per la forza $b)$ invece, si ha attrazione quando le pulsazioni sono della stessa fase, e repulsione quando sono di fasi opposte. Per altro essa forza è nulla, se, mentre S_k compie delle pulsazioni, la S_g non varia di volume. Il Bjerknes fa nondimeno notare ⁽¹⁾ che introducendo più compiutamente in calcolo le condizioni relative alla solidità dei corpi, risulta che per mezzo di

(1) *Comptes rendus*, 1877, pag. 1493.

pulsazioni si possono ottenere non solo oscillazioni, ma anche moti traslatori di corpi non pulsanti immersi nel fluido.

Se le due sfere S_g ed S_k compiono delle oscillazioni nelle direzioni gg' , kk' rispettivamente, la forza principale che dovremo considerare è quella che ha per potenziale:

$$4 \pi q \bar{\phi}_k^{(1)} \bar{\phi}_g^{(1)} \left(\frac{1}{r_{kg}} \right),$$

ed è analoga a quella che due magneti esercitano fra loro; cioè le due sfere posson suporsi dei magneti le cui orientazioni sien determinate da gg' e kk' , essendo, per es., g' e k' i due poli nord. I fenomeni peraltro sono invertiti; nelle azioni idrodinamiche poli uguali si attirano, poli contrari si respingono.

Volendo determinare l'azione scambievole fra tali sfere oscillanti, si può anche far uso del potenziale parziale:

$$- \pi q R_g^3 R_k^3 \frac{1}{r_{kg}^3} s'_k [3 \cos^2(s'_k, s'_g) - 1];$$

allora il magnete che si immagina sostituito ad S_g , qualunque sia il movimento di questa sfera, deve esser sempre 'orientato parallelamente ed in senso contrario a quello sostituito ad S_k , e l'asse di quest'ultimo deve sempre coincidere con la direzione della velocità del centro k .

Le forze corrispondenti al potenziale parziale anzidetto, hanno inoltre la proprietà, che tre di esse, ciascuna della stessa intensità, ma corrispondenti a tre direzioni ortogonali qualunque, hanno una somma uguale a zero, poichè in tal caso si annulla la somma dei tre potenziali parziali.

II.

Le prime esperienze per la verificaione dei risultati ottenuti analiticamente, furono eseguite dal Dott. Bjerknes (1).

Le pulsazioni furon prodotte mediante insufflazioni ed espirazioni d'aria in due palloncini di caoutchouc immersi nell'ac-

(1) Forhandl. i Vidensk. i Christiania 1875, e Repertorium der Math. von Königsberger u. Zeuner. 1876. 3 Heft.

qua. Allorchè uno solo di essi compieva delle pulsazioni, l'altro era posto in oscillazione, e per pulsazioni contemporanee fu trovato, che sfere pulsanti ugualmente compievano oscillazioni opposte, e che sfere pulsanti oppostamente compievano oscillazioni uguali. Per la imperfezione degli apparecchi non furon potute osservare direttamente le forze attrattive, che dovevano presentarsi nelle pulsazioni uguali.

Le pulsazioni nel liquido furon prodotte anche facendo cadere in esso delle sfere di legno; in tal caso, pur rimanendo fisso il volume delle sfere, cambia continuamente, durante l'immersione, quello dell'acqua spostata, e ciò in modo che la velocità di queste variazioni è nulla in due istanti: quando cioè la sfera tocca dapprima l'acqua, e quando essa è completamente immersa. Anche sperimentando in tal modo fu trovato, che le pulsazioni di una sfera sola inducono soltanto oscillazioni in un'altra sfera galleggiante nel liquido, ma ferma; mentre facendo cadere da altezze uguali o diverse le due sfere, si riscontrò attrazione o repulsione reciproca, secondo che le fasi di pulsazione che si producevano, erano uguali o contrarie.

Tali esperienze furono eseguite nuovamente e con maggiore esattezza dallo Schiøtz, professore di Fisica nell'Università di Cristiania, e i risultati precedenti ne rimasero confermati; peraltro è da notare che in tali ricerche non si presenta da sola nessuna delle forze indicate dal Bjercknes, le quali sono: quelle di 2° grado prodotte da pulsazioni uguali; quelle di 4° grado prodotte da oscillazioni perpendicolari alla linea media dei centri, e finalmente quelle pure di 4° grado dovute al movimento parallelo delle sfere. Che l'ultima forza può agire essa pure, sembrò mostrarlo il fatto, che quanto maggiore era l'altezza da cui cadevano nell'acqua le sfere, e perciò quanto maggiore era il tratto in cui si muovevano parallelamente sott'acqua, e tanto più rapidamente avveniva il contatto delle sfere in seguito all'attrazione reciproca.

Un altro risultato accennato dal Bjercknes, è che una sfera che si muove di moto uniforme o rettilineo, deve esercitare una pressione di 4° grado su un'altra sfera, indipendentemente dallo stato di moto o di quiete di quest'ultima: la forza stessa coincide in grandezza e direzione con quella che ha luogo fra due

magneti oppostamente orientati, e paralleli alla direzione del moto della 1^a sfera. Tal conclusione venne verificata mostrando che una corona di sfere, ruotante sotto l'acqua attorno ad un asse verticale, esercitava un'attrazione su una corona simile, coassiale, ruotante essa pure e mobile lungo il suo asse, qualunque fosse la direzione del moto nelle due corone: la massima attrazione fu osservata nel moto opposto. Se ruotava soltanto la corona che poteva scorrere lungo l'asse, non si osservava attrazione; se ruotava soltanto l'altra si aveva attrazione notevole. Poichè le due corone erano completamente immerse nell'acqua, in questa esperienza non si presentava la forza dovuta alle pulsazioni.

Le oscillazioni opposte delle sfere furono ottenute in due modi. Il primo consisteva nel far cadere nell'acqua una sfera da una determinata altezza, mentre un'altra sfera, tenuta immersa nell'acqua, veniva lasciata libera bruciando il filo cui era attaccata; quest'ultima, essendo meno densa dell'acqua, si muoveva verso l'alto quando la prima scendeva nel liquido, e viceversa: dopo alcuni tentativi si riusciva ad ottenere oscillazioni di fasi opposte. All'infuori di alcune perturbazioni, sulle quali ritorneremo in seguito, si osservava anche in questo modo la repulsione indicata dalla teoria matematica.

Il secondo modo di produrre oscillazioni opposte consisteva nell'attaccare due sferette a due crini di cavallo, verticali, ai quali veniva comunicato un rapido movimento dall'alto al basso e viceversa, mediante un roteggio adattato. I due crini erano distanti 21^{mm},5; adoperando due sfere di 19^{mm},75 di diametro, la distanza fra le due superficie era 1^{mm},75: durante le oscillazioni, la cui ampiezza era 4^{mm},5, la distanza fra le due superficie vicine fu quasi raddoppiata. In altre esperienze fu adoperato filo di bozzolo; ma con esso le sfere non si potevano mantenere in oscillazione opposta.

Furono fatte anche altre esperienze nelle quali si muoveva soltanto una sfera nell'acqua, sia pulsando, sia oscillando. Nei due casi, quando nel fluido si trovano altri corpi fermi, più densi di esso, deve esercitarsi un'attrazione: ma questa forza è di ordine superiore al 4°. A questa classe di forze appartiene quella indicata dal Thomson e ricordata in principio di queste pagine, nonchè la cosiddetta *repulsione acustica*.

Una piccola sfera di cera, di 13^{mm} di diametro, fu attaccata

all'estremità di un filo di ottone, e posta in oscillazione sotto l'acqua. Un tubo di vetro circondante il filo di ottone, impediva che le sue oscillazioni ponessero l'acqua in moto. La distribuzione che prendeva un liquido colorato, più denso dell'acqua, versato sulla sfera oscillante, mostrò una corrente liquida perpendicolare alla direzione del moto e diretta verso la sfera: nella direzione del moto, sia davanti che di dietro alla sfera, avevano luogo altre correnti. I corpi avvicinati, che erano più densi dell'acqua, furono attratti qualunque posizione avessero rispetto alla sfera oscillante: soltanto, se si trovavano nella direzione del moto, occorreva che fossero molto vicini. In altre direzioni erano attratti anche a 30^{mm} di distanza. Analoghe esperienze fatte con un palloncino pulsante, mostrarono che anche in quel caso si avevano attrazioni sensibili.

Circa questi effetti prodotti da moti oscillatori su corpi liberi, originariamente in riposo e invariabili di volume, osserva il Bjercknes (1) che, secondo la teoria, devon risultare anche nelle particelle del fluido soltanto delle oscillazioni. Tuttavia nel fluido avranno luogo delle correnti, quando la pressione non sarà tanto grande da far sì che il fluido stesso sia inseparabile dai corpi che vi oscillano. Di questi fenomeni si potrebbe dare un'idea immaginando, secondo il Bjercknes (*), che le forze dipendenti dalle accelerazioni, di tempo in tempo contrarie, si distruggessero e non rimanessero che quelle dipendenti dalle velocità. I corpi circondati da quelle correnti sarebbero allora da esse trascinati, e sembrerebbe che esistessero forze repulsive nelle due direzioni delle oscillazioni, e forze attrattive nel piano equatoriale. Se le pulsazioni fossero troppo rapide, il fluido non accompagnerebbe sempre il corpo vibrante, e i corpi liberi sarebbero sempre respinti.

I fatti principali che resultano da quanto precede sono dunque:

Una *sfera pulsante*, che si dilata, cioè, e si contrae periodicamente, si comporta come *un polo magnetico* o come *una massa elettrica*; una *sfera oscillante* si comporta come *un magnete*. La sfera pulsante deve concepirsi quale un polo nord, o quale una massa elettrica positiva, quando il suo volume aumenta,

(1) *Comptes rendus*. 1877. pag. 1493.

(2) Forhandl, i Vidensk: i Christiania 1868.

e inversamente nel caso in cui diminuisca; il polo deve essere inteso situato nel centro, la massa elettrica deve ritenersi distribuita uniformemente sulla superficie media della sfera. Il magnete che rappresenta la sfera oscillante, deve avere il polo nord dal lato verso il quale è diretto il moto oscillatorio; così la orientazione del magnete cambia regolarmente colla velocità, in modo che considerando oscillazioni isocrone di due sfere vicine, sieno esse di fase uguale o contraria, le orientazioni dei magneti che le rappresentano cambieranno direzione nello stesso tempo, e sarà lo stesso come se non fosse avvenuto nessun cangiamento. Allora la massa elettrica e il polo magnetico conserveranno sempre lo stesso nome, il magnete avrà la stessa orientazione, e, avendo riguardo all'effetto medio durante un'oscillazione o una pulsazione completa, anche le intensità si potranno considerare come costanti. Si intende peraltro che in questi fenomeni *idroelettrici* e *idromagnetici*, come li chiama il Bjerknes, si ha una inversione nel segno, in confronto di quelli che hanno luogo nella elettricità, e nel magnetismo.

È da notare che, per quanto precede, si ha pure un'azione fra una massa elettrica (sfera pulsante), e un magnete (sfera oscillante); cioè un *elettromagnetismo*, di cui non si conosce lo equivalente in natura, perchè la massa elettrica fittizia che qui si considera, è di elettricità statica. Anche considerando la sfera pulsante come rappresentante un polo magnetico, si ha sempre una differenza fra i fenomeni idromagnetici e quelli naturali già conosciuti, perchè in questi non si hanno mai masse magnetiche polari isolate.

Le esperienze sopra accennate, insieme ad altre per mostrare le analogie, sempre inverse, col magnetismo temporario e col diamagnetismo, furono eseguite, con apparecchi perfezionati ed eleganti, alla Esposizione di elettricità di Parigi nel 1881.

In tali apparecchi (1) per i corpi pulsanti fu abbandonata la forma sferica, perchè avendo il Bjerknes notato, nei suoi studi sull'ellissoide, che le variazioni di forma senza variazioni di volume, producono azioni di grado superiore a quelle di cui si è

(1) Vedi: *Journal de Phys.* 1880, 3. — *La Lumière électrique*, 1881, n. 54 e 64. — *L'Ingenieur*. 1882, n. 3, 8 e 10.

tenuto conto nella teoria precedente, alla forma sferica si poteva sostituirla con altra praticamente più comoda; fu perciò adottata la forma di un tamburo, consistente in un cilindro di metallo, di 18^{mm} circa di diametro, e molto schiacciato, le cui due basi sono ricoperte da una membrana sottile di caoutchouc. Comprime e rarefacendo l'aria in tale strumento mediante una pompa conveniente, si ottiene un corpo pulsante il cui effetto, almeno nella parte principale, coincide con quello di una sfera pulsante.

Il movimento alternativo di vibrazione o di pulsazione, è prodotto mediante una pompa consistente in due piccoli cilindri in bronzo, fissati orizzontalmente su una base in legno; ciascun cilindro è munito di uno stantuffo al quale è comunicato un movimento di va e vieni da una piccola manovella e da una biella riunite ad un albero orizzontale, messo in rapido movimento di rotazione, da una ruota assai grande. I raggi delle manovelle, e quindi la corsa degli stantuffi, possono esser variati da zero fino alla loro massima lunghezza, e fissando i tubi di comunicazione fra la pompa e i tamburi pulsanti all'una o all'altra delle estremità di ciascun cilindro di pompa, si può fare in modo che le due pompe operino insieme la compressione o la rarefazione o che una di esse comprima mentre l'altra aspira l'aria dei tamburi. In ogni caso ciascuna pompa comprime e rarefa alternativamente l'aria, quando si gira il volano.

Un tamburo pulsante è fisso alle estremità di un tubo orizzontale metallico, che può girare attorno ad un asse verticale, vuoto esso pure, e per mezzo del quale, e con l'aggiunta di tubi di caoutchouc, l'interno del tamburo è riunito ai cilindri della pompa. L'asse verticale è centrato su delle punte d'acciaio convenientemente disposte, e la comunicazione colla pompa è fatta in modo da non aumentare gli attriti, talchè l'insieme dell'apparecchio pulsante ruota liberamente attorno a tale asse. Un altro tamburo, portato da un tubo posto direttamente in comunicazione con la pompa, può essere avvicinato a quello mobile sopra descritto, e si ha così il modo di mostrare le attrazioni o le repulsioni, a seconda delle fasi di pulsazione dei due tamburi messi in presenza.

Mediante un tamburo formato da due concamerazioni comunicanti ciascuna con un cilindro della pompa, e talmente disposte che

mentre una si dilata l'altra si contragga e viceversa, si ha l'immagine di una calamita permanente: un altro tamburo pulsante, presentato ad una delle faccie del tamburo doppio è attratto, presentato all'altra faccia è respinto.

Un altro apparecchio è destinato a mostrare l'influenza di un corpo oscillante su una coppia di sfera fissata alle estremità di una sbarra orizzontale, cui può esser dato un movimento oscillatorio, e che è contemporaneamente girevole attorno ad un asse verticale. Una disposizione semplicissima permette di fare oscillare le sfere sia parallelamente, sia perpendicolarmente all'asse di rotazione, e ciò mediante lo stesso apparecchio che serve per i tamburi pulsanti. Altri apparecchi portano una sola sfera oscillante, e combinando questi fra loro o coi precedenti, si può osservare l'effetto reciproco di corpi oscillanti, o di corpi oscillanti con altri pulsanti. In ogni caso si ha sempre l'analogia inversa coi corrispondenti fenomeni magnetici.

È da notare che nel caso di sfere oscillanti lungo una stessa retta, le superficie che si vanno incontro tengon luogo delle membrane che contemporaneamente si dilatano l'una di fronte all'altra nei tamburi pulsanti, mentre le superficie che si allontanano sono comparabili alle membrane che contemporaneamente si contraggono.

Per osservare le azioni che si hanno per oscillazioni secondo direzioni ortogonali, si adopera la solita coppia di sfere A, A', che si fa oscillare lungo la retta A O A' che le unisce, e che è girevole attorno il punto O di mezzo. Quando ad una delle sfere A ne venga avvicinata un'altra oscillante in senso normale, si ha attrazione se si avvicinano o si allontanano contemporaneamente al punto d'incontro delle rette lungo le quali avvengono le oscillazioni: si ha repulsione se mentre una si avvicina a tal punto, l'altra se ne allontana.

Un'altra serie di esperienze mostra le azioni analoghe a quelle che si hanno quando ad un ago magnetico girevole attorno ad un asse verticale, si presenta, lungo una retta inclinata a quella che unisce i due poli dell'ago, il polo di un altro magnete. Per questo si adopra una sfera A oscillante e girevole attorno ad un asse verticale, alla quale si presenta un'altra sfera B oscillante nel medesimo piano orizzontale. Se la retta lungo

la quale oscilla la sfera girevole, fa un angolo con quella lungo la quale oscilla l'altra, la prima ruota attorno al suo asse fino a coincidere con la seconda, e in modo da descrivere l'angolo acuto se le oscillazioni delle due sfere erano uguali, l'angolo ottuso se erano opposte.

Se la sfera B si fa oscillare al di sotto della A, in modo che la posizione di riposo di B coincida col prolungamento dell'asse verticale attorno a cui può ruotare la sfera A, le azioni che si presentano sono analoghe a quelle che si hanno se si dispongono due magneti uno al di sotto dell'altro.

Una terza serie di esperienze mostra le analogie idrodinamiche del magnetismo temporario e del diamagnetismo, mediante le azioni che i corpi pulsanti od oscillanti esercitano su corpi in riposo. Per mezzo di fili di bozzolo si sospendono orizzontalmente nell'acqua, allo stesso livello, due cilindretti di dimensioni uguali, ma uno di una sostanza più densa, l'altro di una sostanza meno densa dell'acqua. Il Bjerknes adoperava un cilindretto di cerallacca ed uno di midolla di sambuco. Se al cilindro più peso dell'acqua si avvicina un tamburo pulsante, l'asse del cilindro si dispone normalmente al piano che occupa la membrana vibrante nella sua posizione di riposo. Se il tamburo pulsante è avvicinato al cilindro più leggero dell'acqua, il suo asse si dispone parallelamente al piano anzi detto.

In queste due esperienze, il corpo pulsante rappresenta un magnete; la sbarra più pesa rappresenta una sbarra di ferro dolce sospesa a un filo, e la quale, sotto l'influenza del magnete si dispone nel senso delle linee di intensità magnetica, costituenti il campo magnetico; mentre la sbarra più leggera rappresenta una sbarra di una sostanza diamagnetica, che in condizioni analoghe si dispone perpendicolarmente alle linee anzidette. Se invece di cilindri si adoprano sfere formate di sostanze più pesa, o meno, dell'acqua, la sfera più pesa è attirata dal tamburo pulsante e dalla sfera oscillante, mentre la sfera più leggera è respinta.

Per spiegare questi fenomeni, il Bjerknes confronta l'azione esercitata dal corpo vibrante sul liquido (indipendentemente dal corpo neutro) con quella esercitata dal mezzo, così influenzato, sul corpo neutro. Per effetto delle pulsazioni o delle oscillazioni, le molecole liquide, in un punto determinato, sono spostate alter-

nativamente in avanti e in dietro, e alla fine di una vibrazione completa del corpo influenzante, una molecola qualunque del liquido sarà ritornata alla sua posizione iniziale. Se una di tali molecole, od un loro insieme, si sostituisce con un corpo solido di densità minore dell'acqua, poichè l'azione che ivi si esercita per effetto della sfera pulsante od oscillante è rimasta la stessa, l'accelerazione prodotta sul solido sarà maggiore di quella che era prodotta sulla porzione corrispondente del liquido: e così, nel suo primo moto di allontanamento, il solido si sposterà di un tratto maggiore di quello che avrebbe fatto la molecola liquida, e si troverà in una regione più tranquilla del campo di vibrazione. Nel movimento di ritorno, il solido riceverà dalle molecole circostanti un impulso insufficiente per ricondurlo alla sua posizione primitiva, e alla fine di una oscillazione completa si troverà ad una distanza dal corpo influenzante maggiore di quella iniziale, talchè sembrerà aver subito una repulsione. Se invece il corpo che si sostituisce alla porzione di liquido è più peso dell'acqua, il suo movimento è minore, a cagione della sua maggior massa, di quello delle molecole liquide circostanti, e per conseguenza le sue oscillazioni, rapporto al liquido, sono di senso contrario del liquido stesso, e si produrrà attrazione. In questo modo il liquido rappresenterebbe il *mezzo* che, secondo il Faraday, dovrebbe trasmettere l'azione da punto a punto.

Tenendo conto dell'inversione nei segni, il caso del corpo più peso dell'acqua rappresenterebbe il *paramagnetismo* e il caso opposto il *diamagnetismo*, poichè idrodinamicamente si ha repulsione col paramagnetismo, attrazione col diamagnetismo. Secondo il Bjerknes peraltro, ciò che è più essenziale nel paramagnetismo è non già la produzione di un'attrazione, ma un eccesso di magnetismo; mentre vi è un difetto relativo nel diamagnetismo. Immaginando le cose in tal modo, idrodinamicamente si avrà paramagnetismo quando si ha un corpo leggero, un corpo cioè che può compiere oscillazioni maggiori di quelle del fluido influenzato; oppostamente nel caso del corpo più peso dell'acqua; e così anche secondo questo diverso modo di vedere, il paramagnetismo produrrà repulsione, il diamagnetismo attrazione.

In un'altra serie di ricerche, mediante l'azione di due tamburi pulsanti ad asse comune, ma separati da una piccola distanza che si può regolare in modo che comprendano fra loro uno spazio che possa essere occupato dal liquido o da una piccola sfera, si produce ciò che il Bjerknes chiama un *campo idromagnetico*.

Il corpo influenzato è attualmente una sfera più pesa dell'acqua, sostenuta da un'asticella metallica orizzontale, sospesa, mediante due fili di bozzolo, a due galleggianti. Se i due tamburi pulsanti comprendono fra loro, e a ugual distanza dall'uno e dall'altro, la sfera di cui sopra, per pulsazioni opposte, cioè quando le due membrane prossime alla sfera si spostano nello stesso senso, la sfera sarà attirata verso l'asse comune dei due tamburi. Questo fenomeno è analogo a quello che si osserva quando una piccola massa di ferro dolce, portata da un disco di sughero, si trova sull'asse comune di due magneti fissi, coi poli contrari affacciati, e posti uno sott'acqua, l'altro al di sopra del livello libero, e a distanze uguali dalla massa di ferro dolce. Questa massa si polarizza verticalmente per induzione, ed offre una resistenza ad essere spostata dalla indicata posizione, appunto come segue nel caso indicato della sfera.

Se invece i due tamburi fra i quali è compresa la sfera pulsano ugualmente, la sfera, benchè in equilibrio quando la si pone col centro sull'asse comune dei due tamburi, appena spostata da tal posizione è respinta ad una certa distanza. Lo stesso accade quando alla massa di ferro dolce dell'esperienza precedente, si presentano poli uguali: in questo caso l'asse di polarizzazione di questa massa è perpendicolare all'asse dei magneti fissi, e ne risulta per essa un equilibrio instabile in un piccolo cerchio concentrico all'asse dei magneti; il ferro dolce è attratto verso questo cerchio, ma se lo si forza ad entrare in quel piccolo spazio, è vivamente respinto.

È da notare che i fenomeni prodotti coi tamburi pulsanti sono opposti a quelli sopra indicati, se la sfera interposta è più leggera dell'acqua.

Il Bjerknes ha studiato anche la distribuzione delle linee di forza, prodotte in un liquido dall'azione di corpi pulsanti ed oscillanti. A tale scopo ha impiegato un cilindro metallico, vuoto,

sostenuto da un filo fine ed elastico di acciaio, che si può piegare in tutti i sensi, ma che è ricondotto nella posizione verticale in virtù della sua elasticità, quando cessano le azioni perturbatrici. Al disopra di questo cilindro e nel senso della sua altezza, si eleva fino al di fuori dell'acqua una leggera asticella, cui è fisso un pennellino da disegno, il quale può registrare sopra una lastra di vetro abbassata fino al contatto di esso, ogni spostamento orizzontale del cilindro. Quando si vuole esplorare il campo prodotto da due tamburi pulsanti, si fanno passare le aste da cui essi son portati, attraverso due fori praticati nella lastra di vetro a una distanza conveniente, e il cilindro col pennello registratore si dispone in modo da avere il suo centro nel piano orizzontale che passa pei centri dei due tamburi, e nel punto esplorato. Quando i due tamburi pulsano, il cilindro oscilla nella direzione della linea di forza che passa pel suo centro. Per registrare questa direzione, basta premere leggermente sulla lastra di vetro fino a farle toccare il pennello imbevuto d'inchiostro. Ciò fatto si porta il cilindro in un altro punto, e dopo che si è fermato nella sua posizione di equilibrio, si fanno pulsare di nuovo i tamburi, e si registra come dianzi la indicazione del cilindro; così continuando, si può ripetere l'esperienza per tutto l'intorno dei tamburi pulsanti.

Le linee di forza in tal modo ottenute, sono identiche a quelle di un campo magnetico, e che si ottengono spargendo della limatura di ferro su di una carta al di sotto della quale si dispongano dei magneti, combinati come i corpi vibranti che hanno prodotto il campo idrodinamico.

Il Bjerknes si è finalmente occupato di determinare il campo di energia, prodotto da movimenti di rotazione o di oscillazione circolare in liquidi viscosi, le cui parti possono esser messe in moto dall'attrito che si esercita contro le superficie dei corpi ruotanti che vi sono immersi; ha prodotto in questo modo delle figure identiche a quelle che si ottengono spargendo della limatura di ferro nel campo magnetico prodotto da correnti elettriche molto intense, sia isolate, sia a coppie, e dirette nello stesso senso o in senso contrario ecc. Secondo il Géraldy (1) tali esperienze

(1) *La Lumière électrique*, 1881. n°. 54.

avrebbero condotto il Bjerknes a ritenere piuttosto la formula del Clausius anzichè quella dell'Ampère, per spiegare le azioni fra le correnti elettriche. Tuttavia bisogna osservare, che l'uso di liquidi viscosi è soggetto a discussioni, e presenta difficoltà speciali; giacchè riproducendo in essi i fenomeni già osservati nell'acqua, si trova che gli effetti sono alquanto modificati.

Il Bjerknes inoltre (1), pur notando di non essere molto innanzi nella rappresentazione meccanica di una corrente elettrica, sarebbe portato ad ammettere, che la corrente consistesse in un movimento rotatorio e oscillatorio che si compisse quasi simultaneamente in tutte le sezioni, in modo che sarebbe una propagazione di un fenomeno di elasticità. Questo modo di concepir la corrente presenta peraltro delle difficoltà, perchè il senso della corrente non potrebbe consistere altro che nella fase di oscillazione, e riuscirebbe difficile stabilir così la direzione di una corrente isolata.

Ritornando ora ai fenomeni prodotti da corpi pulsanti e oscillanti, è da osservare che oltre l'inversione delle azioni, in confronto a quelli del magnetismo o della elettricità, si ha un'altra differenza notevole. Per es.: due sfere pulsanti A, B, saranno neutre fra loro, se la differenza di fase è $\frac{1}{2}$ del periodo: paragonando questo caso con i fenomeni elettrici, bisognerebbe dire che nessuna sfera contiene elettricità libera. Invece introducendo una terza sfera pulsante A', le cui pulsazioni fossero concordanti con quelle di A, per es., le due sfere A, A' si attrarrebbero, e allora bisognerebbe supporre elettricità libera anche sulla sfera A (2).

Altra osservazione da farsi è, che ponendo una lastra in vicinanza di un corpo oscillante o pulsante, si manifestano delle azioni perturbatrici, le quali possono predominare per piccole distanze, e cambiare una repulsione in un'attrazione, ecc.

A motivo della inversione costante delle azioni idrodinamiche sopra ricordate, rispetto a quelle elettro-magnetiche, non si può dire di aver trovato una spiegazione dei fenomeni elettrici e magnetici, poichè i fenomeni idrodinamici di cui ci siamo qui occupati, costituirebbero una classe a sè, senza legame con quelli

(1) *L'Actualité*. 1881. n°. 133.

(2) Bjerknes. *Comptes rendus*; 1879.

già noti della natura. Il Bjerknæs peraltro non crede a una tale indipendenza, e ritiene invece che si possa arrivare, con un'inversione di tali fatti inversi, ai fenomeni diretti. In appoggio di tale opinione non adduce ragioni ben determinate: ecco infatti quanto egli dice in proposito (1):

« Supposons qu'on fasse tomber une boule de bois dans l'air ou dans le vide. Elle sera attirée vers le centre de la terre. Mais plaçons la même boule dans l'eau, immédiatement elle monte, comme si le fluide n'existait pas, mais qu'elle fût repoussée par ce même centre. De la même manière, si l'on passe du simple au composé, il pourrait bien arriver quelque inversion semblable avec les séries des phénomènes dont nous occupons.

« Ne nous arrêtons pas cependant en essayant de pénétrer bien loin dans les grands mystères de la matière: envisageons la chose pratiquement et contentons-nous des analogies qu'on pourrait tirer du monde connu.

« Considerons donc une pluralité de corps vibrants nageants, en quelque sorte, dans une grande mer de petits corps vibrants, le tout compris dans notre liquide. Alors je dis qu'il y a lieu de croire qu'on arriverait à une inversion, du moins, si l'on peut s'en rapporter aux analogies. Il en devrait naître, sous certaines circonstances, de nouvelles actions vis-à-vis de ces grands corps, comme si le milieu superposé n'existait pas, mais en admettant qu'il y eût des forces contraires agissant à travers le vide.

« Il faut, en effet, remarquer que, par suite des vibrations des corps plongés, ce milieu superposé sera influencé par tout, et qu'il agira, par conséquent, d'une double manière sur lesdits corps vibrants. Il agira, d'abord, de tous côtés, inversement comme des aimants temporaires, paramagnétiques ou diamagnétiques. Cependant cela ne suffit pas encore, mais il y aura une autre action, dont nous n'avons pas parlé jusqu'à présent, et cette action sera, à ce que je crois, d'une influence prépondérante; c'est le choc immédiat de ce milieu, mis en vibration suivant les lignes magnétiques.

« Et tout me porte à penser que par ce moyen on arrivera

(2) *La Lumière Électrique*. 1881. n°. 64.

un jour au résultat désiré, de sorte qu'il ne faut pas le chercher en recommençant tout à nouveau ».

Se la coincidenza perfetta dei fenomeni idrodinamici con quelli elettromagnetici, dovesse bastare per avere una spiegazione di questi ultimi, ciò che è, del resto, assai discutibile, tale spiegazione sarebbe forse ottenuta considerando le azioni fra i corpi pulsanti non già nei liquidi incompressibili come ha fatto il Bjerknæs, ma invece in quelli compressibili come ha fatto lo Schwedoff (1). Egli trova in questo modo che una sfera pulsante agisce ivi pure come una massa elettrica o come un polo magnetico, e che masse o poli di nome uguale si respingono, di nome opposto si attraggono, come nei fenomeni magnetici ed elettrici. Di più mentre secondo il Bjerknæs si ha una specie di azione idroelettromagnetica non coincidente coi fenomeni naturali conosciuti, ciò non accadrebbe secondo lo Schwedoff.

Prima di lasciare questo soggetto non sarà inopportuno notare che recentemente il Decharme (2) ha esteso le analogie elettromagnetiche ad altri fenomeni idrodinamici, eseguendo coi liquidi l'esperienza di C. Desormes che consiste nel mostrare l'attrazione di un disco di cartone presentato a piccola distanza, e normalmente, a un getto di gas che esce da un tubo. Per ripetere l'esperienza coi liquidi, giova munire il tubo di un disco fisso che ne affiori l'estremità: un secondo disco presentato a piccola distanza, sotto l'influenza del getto è attratto e mantenuto a 2 o 3^{mm} dal disco fisso. Se il tubo è immerso in un liquido, il disco fisso può esser soppresso, e si può anche invertire la disposizione sperimentale, rendendo mobile il tubo e fisso il disco. In tal caso, durante l'efflusso del liquido, il tubo è posto in vibrazione tanto rapida, da render dei suoni quando su di esso si eserciti una pressione. Se il tubo ha pareti sottili, il fenomeno vibratorio si presenta sotto forma di repulsione: cosicchè con un tubo che abbia da una parte pareti grosse, dall'altra pareti sottili, si ha una specie di magnete.

In questo modo il Decharme è condotto a paragonare la corrente del liquido a una corrente voltaica inducente; il tubo rap-

(1) *Séanc. de la Soc. de Phys.* 1880; o *Beibl. zu den Wied. Ann.* 1881.

(2) *Compt. rend. de l'Ac. des Sc. de Paris*, 1882, pag. 440, 527 e 722.

presenterebbe il filo indotto che circonda il filo percorso dalla corrente inducente, e l'analogia fra le correnti liquide coi loro effetti, e i fenomeni d'induzione elettrica, sarebbe *diretta*. In appoggio di tali analogie, il Decharme cita inoltre dei fenomeni corrispondenti a quelli degli anelli del Nobili, prodotti con le correnti liquide; ma su ciò non è qui il luogo di trattenerci ulteriormente.

(*Continua*)

SU L'ELETTROLISI DELLE SOLUZIONI DEI SALI AMMONIACALI CON ELETTRODI DI CARBONE; NOTA DI ADOLFO BARTOLI E GIORGIO PAPASOGLI.

Già fin nei nostri primi studii sulla elettrolisi con elettrodi di carbone osservammo un lento consumo e disgregamento della grafite e del carbone di storta che facevano da elettrodo positivo nelle soluzioni acquose di ammoniaca (*).

Nella presente nota esponiamo i risultati delle nostre ulteriori ricerche sopra tale argomento.

Dividiamo la presente nota in due parti: nella prima parleremo della elettrolisi con elettrodi di grafite: nella seconda di quella con elettrodi di carbone ordinario.

PARTE PRIMA

Elettrolisi dei sali ammoniacali con elettrodi di grafite.

La soluzione acquosa di ammoniaca pura (anche concentrata) conduce pochissimo, come fu già da uno di noi osservato (†) in altra occasione; occorrono parecchie diecine di elementi Bunsen per ottenere una visibile decomposizione dagli elettrodi. Con una pila di 60 elementi Bunsen si ottiene solo dopo varii giorni un debole disgregamento dalla grafite elettrodo positivo.

Se invece alla soluzione di ammoniaca si aggiunge un poco di una soluzione di cloruro sodico o di un altro sale alcalino, il liquido conduce così bene, che si può con soli due elementi Bunsen ottenere visibile sviluppo gassoso dai due elettrodi.

(*) Bartoli e Papasogli — Sintesi di varii acidi organici per mezzo della elettrolisi con elettrodi di carbone. *N. Cimento*. 3. serie, vol. VIII, pag. 279-280, Pisa 1880.

(†) Bartoli — Sulle polarità galvaniche ec; *N. Cimento*, 3. serie vol. VII. Pisa 1880.