Ueber Centralbewegungen.

Von R. Lehmann-Filhés.

Auf einen beweglichen Punkt möge ein festes Centrum, welches wir als Anfangspunkt der Coordinaten wählen wollen, eine beschleunigende Kraft äussern, welche nur vom gegenseitigen Abstände r abhängt, und deren Intensität wir deshalb mit $f(r)$ bezeichnen. Für die in Frage kommenden, selbstverständlich stets reellen und positiven Werthe von r sei die Function $f(r)$ endlich und stetig; sie sei positiv, wenn die Kraft eine Anziehung, negativ, wenn sie eine Abstossung ist.

Da jede Centralbewegung eine ebene ist, so nehmen wir die Bahnebene zur xy -Ebene. Sind x und y die Coordinaten des beweglichen Punktes, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, t die Zeit, so hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f(r) \frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -f(r) \frac{y}{r}. \quad 1)$$

Der Radiusvector r möge mit der x -Axe den Winkel λ bilden, und

$$u = \frac{1}{r}$$

gesetzt werden. Aus den Gleichungen 1) folgert man alsdann mit Leichtigkeit

$$2) \quad d\lambda = h u^2 dt, \quad \frac{d^2u}{d\lambda^2} + u = \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2 u^2} \quad 3)$$

Hier ist h eine Integrationsconstante und bezeichnet die doppelte Flächengeschwindigkeit, mit welcher sich der vom Radiusvector überstrichene Sector ändert.

Die Ableitung der Gleichungen 2) und 3) setzt keinerlei Bedingungen über die Function $f(r) = f\left(\frac{1}{u}\right)$ voraus; daher sind diese Gleichungen auch gültig, wenn in $f(r)$ die Zeit explicite auftritt.

Aus der Gleichung 2) erkennen wir, dass $\frac{d\lambda}{dt}$ niemals das Vorzeichen ändern kann, dass also die Umrückung des Kraftcentrums stets in demselben Sinne vor sich geht.

Aus 3) kann man einen wichtigen Schluss über die Krümmung der Bahn ziehen. Bekanntlich ist der Krümmungsradius gleich

$$\frac{\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2\right]^{3/2}}{u^3 \left(u + \frac{d^2u}{d\lambda^2}\right)},$$

d. h. nach 3)

$$\frac{h^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2\right]^{3/2}}{u f\left(\frac{1}{u}\right)},$$

mithin positiv oder negativ, je nachdem $f\left(\frac{1}{u}\right)$ positiv oder negativ ist. Demnach kehrt die Bahn dem Kraftcentrum stets ihre concave oder stets ihre convexe Seite zu, je nachdem die Kraft eine Anziehung oder eine Abstossung ist.

Aus 3) ist durch Integration die Gleichung der Bahncurve herzuleiten. Man erhält durch Multiplication mit $2 du$, Integration und Wurzelziehung, wenn A eine Integrationsconstante bedeutet,

$$\frac{du}{d\lambda} = \pm \sqrt{A - u^2 + \frac{2}{h^2} \int f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2}}. \quad 4)$$

Beim Durchgange von u durch ein Maximum oder Minimum, in welchem Falle $\frac{du}{d\lambda} = 0$ wird, wechselt die Wurzel ihr Vorzeichen.

Die Constante A ist natürlich so zu bestimmen, dass entweder für alle positiven Werthe des u oder doch wenigstens für solche, die innerhalb gewisser Grenzen liegen, $\frac{du}{d\lambda}$ reell ist.

Ob das Gebiet, innerhalb dessen u liegen muss, einseitig oder beiderseitig begrenzt ist, d. h. ob Maxima und Minima von u existiren, hängt von der Function $f\left(\frac{1}{u}\right)$ ab.

Setzen wir

$$W = A - u^2 + \frac{2}{h^2} \int f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2}, \quad 5)$$

mithin

$$\frac{du}{d\lambda} = \pm \sqrt{W},$$

so muss für ein Maximum oder Minimum von u jedenfalls

$$W = 0 \quad 6)$$

sein, d. h. diese Gleichung muss mindestens eine positive Wurzel haben; ausserdem muss W für diesen Werth des u einen Zeichenwechsel erleiden.

Hat 6) zwei positive Wurzeln, und ist für diejenigen Werthe des u , welche zwischen diesen Wurzeln liegen, W positiv, für ausserhalb liegende Werthe jedoch negativ, so

stellen jene beiden Wurzeln ein Minimum und ein Maximum von u dar. Die Bedingungen für die Existenz derselben sind leicht aufzufinden. Construiert man nämlich eine Curve, deren Punkte die Abscissen u und die Ordinaten W haben, und existirt für ein positives u ein Maximum von W , so wird man durch passende Wahl der Constante A stets erreichen können, dass dieses Maximum oberhalb der Abscissenaxe liegt, und die Curve in zwei Punkten mit positiven Abscissen die Abscissenaxe schneidet. Diese Abscissen sind die beiden positiven Wurzeln der Gleichung 6). Die Bedingungen für die Existenz des genannten Maximums bestehen darin, dass für einen positiven Werth des u

$$\frac{dW}{du} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{d^2W}{du^2} < 0$$

sein muss. Mit Rücksicht auf 5) ergibt sich, wenn

$$\frac{df(r)}{dr} = f'(r),$$

also

$$\frac{df\left(\frac{1}{u}\right)}{d\left(\frac{1}{u}\right)} = f'\left(\frac{1}{u}\right)$$

gesetzt wird,

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{1}{u}\right) &= h^2 u^3, & f'\left(\frac{1}{u}\right) &> -3 h^2 u^4 \\ \text{oder auch} \\ f(r) &= \frac{h^2}{r^3}, & f'(r) &> -\frac{3 h^2}{r^4} \end{aligned} \right\} 7)$$

Hieraus geht hervor, dass $f(r)$ positiv, also die Kraft nothwendig eine Anziehung sein muss. Wir werden diesen Fall im Folgenden beständig festhalten.

Man kann sich die Bedingungen 7) geometrisch veranschaulichen. Construiert man nämlich zur Abscisse r die beiden Curven mit den Ordinaten $f(r)$ und $\frac{h^2}{r^3}$, so müssen diese Curven sich in einem Punkte mit positiver Abscisse schneiden, und zwar so, dass im Schnittpunkte mit wachsenden r die Ordinaten der ersten Curve grösser als die der zweiten werden. Ein solcher Durchschnitt existirt immer, wenn $f(r)$ eine mit r verschwindende sowie mit r ins Unendliche wachsende Anziehungskraft bedeutet, z. B. eine elastische Kraft.

Aus 7) folgt durch Elimination von h :

$$3 + \frac{r f'(r)}{f(r)} > 0,$$

eine Bedingung, die von der Function $f(r)$ stets erfüllt sein muss, wenn ein Maximum und ein Minimum von u möglich sein soll.

Umgekehrt ist, wenn diese Bedingung erfüllt ist, auch stets ein Maximum und ein Minimum möglich; denn man wird stets eine Grösse h von der Art bestimmen können, dass $f(r) = \frac{h^2}{r^3}$ ist; und alsdann ist auch $f'(r) > -\frac{3 h^2}{r^4}$.

Jedoch folgt aus der Erfüllung der Bedingung noch nicht mit Nothwendigkeit, dass für ein beliebig gewähltes h die Forderung erfüllt ist.

Beispielsweise nehmen wir $f(r) = a r^n$ an, indem wir durch a eine positive Constante bezeichnen. Die Bedingungen 7) lauten dann

$$a r^n = \frac{h^2}{r^3}, \quad n a r^{n-1} > -\frac{3 h^2}{r^4}.$$

Die erste Bedingung ist erfüllbar durch den positiven Werth

$$r = \sqrt[n+3]{\frac{h^2}{a}};$$

die zweite ergibt

$$n a r^n > -\frac{3 h^2}{r^3},$$

d. h.

$$n \frac{h^2}{r^3} > -\frac{3 h^2}{r^3}$$

oder

$$n > -3.$$

Demnach ist unter Annahme des Anziehungsgesetzes $f(r) = a r^n$ ein Maximum und Minimum von u (resp. r) von der geschilderten Art möglich, wenn $n > -3$ ist.

Für $n = -1$ lautet 4):

$$\frac{du}{d\lambda} = \pm \sqrt{A - u^2 + \frac{2a}{h^2} \log \text{nat } u}.$$

Da A so gewählt ist, dass für gewisse positive Werthe von u die Grösse unter dem Wurzelzeichen positiv ist, während sie für $u = 0$, sowie für $u = +\infty$, wie aus Untersuchung der Exponentialgrösse $e^{-u^2} \frac{2a}{u h^2}$ folgt, einen negativen unendlichen Werth annimmt, so hat die Gleichung

$$A - u^2 + \frac{2a}{h^2} \log \text{nat } u = 0$$

zwei positive Wurzeln von der Art, dass für die zwischen ihnen liegenden Werthe von u der Differentialquotient $\frac{du}{d\lambda}$ reell ist.

Ist $n > -1$, so schreiben wir, weil $u = \frac{1}{r}$ ist, 4) in der Form

$$\frac{dr}{d\lambda} = \mp r \sqrt{A r^2 - 1 - \frac{2a r^{n+3}}{h^2(n+1)}}.$$

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen ist für $r = 0$ sowie für $r = +\infty$ negativ, muss aber für gewisse dazwischen liegende Werthe von r positiv sein, weshalb hier unter allen Umständen zwei positive Wurzeln von der Art existiren, dass für die zwischen ihnen liegenden Werthe von r der Differentialquotient $\frac{dr}{d\lambda}$ reell ist.

Diese Untersuchung zeigt, dass im Falle des Anziehungsgesetzes $f(r) = ar^n$ ein Maximum und ein Minimum der geschilderten Art von u existiren muss, wenn $n \geq -1$ ist.

Wären für ein positives r oder u die Bedingungen erfüllt

$$f(r) = \frac{h^2}{r^3}, \quad f'(r) < \frac{3h^2}{r^4} \quad (8)$$

so hätte man es mit einem Minimum von W zu thun. Die schon oben bezeichneten Curven mit den Ordinaten $f(r)$ und $\frac{h^2}{r^3}$ hätten dann zwar auch für eine positive Abscisse r einen Durchschnittspunkt, jedoch würden jetzt mit wachsendem r die Ordinaten der ersten Curve kleiner als die der zweiten werden. Bei passender Wahl von A hat die Gleichung $W = 0$ alsdann gleichfalls zwei positive Wurzeln, jedoch entsprechen den von ihnen eingeschlossenen Werthen von u negative W , also imaginäre Werthe von $\frac{du}{d\lambda}$; reelle Werthe dieses Differentialquotienten sind alsdann nur möglich für die ausserhalb jener Grenzen liegenden Werthe von u .

Man kann die Bedingungen 8) in die eine zusammenziehen:

$$3 + \frac{rf'(r)}{f(r)} < 0,$$

welche aussagt, dass unter Annahme des Anziehungsgesetzes $f(r)$ zwei Wurzeln der Gleichung $W = 0$ von der angegebenen Art möglich sind, wenn auch im Allgemeinen nicht für ein beliebig gewähltes h (vergl. das oben über die Bedingungen der Existenz eines Maximums und Minimums von u Gesagte.)

Für das Anziehungsgesetz $f(r) = ar^n$ können Wurzeln der letzteren Art nur eintreten, wenn $n < -3$ ist.

Interessant ist der Fall $n = -3$. Die Gleichung 6) lautet hier

$$A + \left(\frac{a}{h^2} - 1\right)u^2 = 0$$

und kann höchstens eine reelle positive Wurzel haben.

In allen Fällen, in denen u ein Minimum u_0 und ein Maximum u_1 von der oben bezeichneten Art hat, besteht die Bahn aus symmetrischen Stücken, die vom Minimum zum Maximum, resp. vom Maximum zum Minimum reichen. Die Aenderung Θ des Winkels λ , welche einem Fortschreiten vom Minimum zum Maximum entspricht, ist

$$\Theta = + \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{A - u^2 + \frac{2}{h^2} \int f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2}}},$$

während beim Fortschreiten vom Maximum zum Minimum λ um

$$- \int_{u_1}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{A - u^2 + \frac{2}{h^2} \int f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2}}},$$

also gleichfalls um Θ zunimmt.

Hiernach folgen die Punkte, in denen u ein Minimum, sowie diejenigen, in denen es ein Maximum wird, in Winkelintervallen $= 2\Theta$ aufeinander. In diesen Punkten tritt jedesmal wieder der Werth $\frac{du}{d\lambda} = 0$, sowie $u = u_0$, resp. $u = u_1$, ein; nach 2) nimmt dann auch $\frac{d\lambda}{dt}$ seinen Anfangswerth wieder an, und da somit die Anfangsumstände wieder eingetreten sind, so müssen auch alle Bewegungsverhältnisse sich wiederholen, mit dem Unterschiede freilich, dass der Winkel λ , den der Radiusvector mit einer festen Richtung bildet, um 2Θ grösser ist als bei dem vorangehenden Verlauf der Aenderung des u von u_0 über u_1 bis wieder zum Werthe u_0 .

Hiernach kann die Bewegung als eine periodische bezeichnet werden; wenigstens muss u oder r als eine periodische Function von t oder auch von $\frac{\pi}{\Theta} \lambda$ darstellbar sein.

Stabile und instabile Kreisbahnen.

Bezeichnen wir

$$\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2 u^2}$$

der Kürze wegen durch $\varphi(u)$, so können wir die Gleichung 3) so schreiben:

$$\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + u = \varphi(u) \quad (9)$$

Wir nehmen an, dass $f\left(\frac{1}{u}\right)$ für solche Werthe von u , welche bei der Bewegung in Betracht kommen, also positiven Werthen von W entsprechen, stetig und eindeutig ist. Die Fälle, dass $u = 0$ oder $= \infty$ wird, schliessen wir von der Untersuchung aus. Es wird alsdann auch für

alle in Frage kommenden Werthe des u die Function $\varphi(u)$ eindeutig und stetig sein und, wenn auch innerhalb verschiedener Convergenzkreise, deren Mittelpunkte alle auf der Axe der reellen u liegen, und deren Radien von der Vertheilung der singulären Punkte von $\varphi(u)$ in der Ebene der complexen Grössen abhängen, in Reihen, die nach positiven und ganzen Potenzen von $u - k$ fortschreiten, entwickelt werden können. Durch k ist hier eine reelle Grösse bezeichnet. Aus der Möglichkeit der Reihenentwicklung folgt aber, dass auch die successiven Ableitungen von $\varphi(u)$, nämlich $\varphi'(u)$, $\varphi''(u)$, $\varphi'''(u)$, $\dots$, durch convergente Reihen darstellbar, mithin eindeutige und stetige Functionen sind. Unter diesen Voraussetzungen können wir die Gleichung 9) beliebig oft differenziren, wodurch wir erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{d^3u}{d\lambda^3} &= [\varphi'(u) - 1] \frac{du}{d\lambda} \\ \frac{d^4u}{d\lambda^4} &= [\varphi'(u) - 1] \frac{d^2u}{d\lambda^2} + \varphi''(u) \frac{du}{d\lambda} = [\varphi(u) - u][\varphi'(u) - 1] + \varphi''(u) \frac{du}{d\lambda} \\ \frac{d^5u}{d\lambda^5} &= ([\varphi'(u) - 1]^2 + [\varphi(u) - u]\varphi''(u) + \varphi'''(u)) \frac{du}{d\lambda} + \varphi''(u) \frac{d^2u}{d\lambda^2} \\ &= [\varphi(u) - u]\varphi''(u) + ([\varphi'(u) - 1]^2 + [\varphi(u) - u]\varphi''(u) + \varphi'''(u)) \frac{du}{d\lambda}; \text{ etc.}\end{aligned}$$

Man sieht hieraus, dass, wenn für irgend einen Werth von u die beiden ersten Differentialquotienten $\frac{du}{d\lambda}$ und $\frac{d^2u}{d\lambda^2}$ verschwinden, dies auch für alle anderen stattfindet. In diesem Falle ist u , folglich auch r , eine Constante, die Bahn also ein Kreis.

Für das Stattfinden einer kreisförmigen Bewegung sind also die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen die folgenden:

$$\frac{du}{d\lambda} = 0; \quad \frac{d^2u}{d\lambda^2} = 0.$$

Da aber

$$\frac{du}{d\lambda} = \pm \sqrt{W},$$

so muss sowohl W wie auch $\frac{dW}{du}$ verschwinden. Dies kann in zweierlei Weise geschehen:

Erstens, indem die Gleichung $W = 0$ zwei gleiche positive Wurzeln hat; zweitens, indem die Gleichung $W = 0$ eine Identität ist.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Er fordert, dass $u_0 = u_1$ wird. War nun u_0 das Minimum, u_1 das Maximum von u , so sind jetzt die Grenzen, innerhalb deren die Werthe von u liegen müssen, wenn W positiv, also $\frac{du}{d\lambda}$ reell sein soll, nicht mehr von einander verschieden; die Kreisbahn ist demnach hier der Grenzfall einer periodischen Bewegung. Eine geringe Aenderung der Integrationsconstanten, also der Anfangsbedingungen, die natürlich der Art sein muss, dass $\frac{du}{d\lambda}$ reell bleibt, wird u_0 und u_1 wieder von einander verschieden werden und die Kreisbewegung in eine nur wenig vom Kreise abweichende periodische Bewegung übergehen lassen. Wir können die hier betrachtete Kreisbewegung eine stabile nennen. Sie tritt nach dem früher Gesagten dann ein, wenn für ein positives u ein Maximalwerth 0 der Function W vorhanden ist.

Der Radius r_0 der stabilen Kreisbahn muss den Bedingungen 7) genügen, wodurch auch h bestimmt wird, nämlich

$$h = r_0^{3/2} \sqrt{f(r_0)}.$$

Alsdann folgt aus 2) für die Winkelgeschwindigkeit der constante Werth:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{h}{r_0^2} = \sqrt{\frac{f(r_0)}{r_0}}.$$

Die Bedingungen 7) kann man auch ersetzen durch:

$$3 + r_0 \frac{f'(r_0)}{f(r_0)} > 0.$$

Ganz anders liegt die Sache, wenn zwischen den beiden gleich gewordenen Wurzeln u_0 und u_1 solche Werthe von u lagen, für welche W negativ, also $\frac{du}{d\lambda}$ imaginär ist, sodass die zulässigen Werthe von u sich ausserhalb jener Grenzen befanden. In diesem Falle wird eine, wenn auch noch so geringe Veränderung der Anfangsbedingungen, d. h. der Integrationsconstanten, der Variablen u sofort einen Spielraum eröffnen, der ausserhalb der Grenzen u_0 und u_1 liegt und sich bis zu den etwaigen nächstliegenden positiven Wurzeln, oder, falls solche nicht vorhanden sind, bis 0 resp. $+\infty$ erstreckt. Die Kreisbewegung ist in diesem Falle eine instabile.

Macht man eine Anwendung auf das Anziehungsgesetz $f(r) = ar^n$, so erkennt man nach dem oben Gesagten sofort, dass für $n > -3$ jede Kreisbahn nothwendig stabil ist, wie es z. B. für das Newton'sche Anziehungsgesetz der Fall ist.

Für $n < -3$ kann es nur instabile Kreisbewegungen geben. Wählen wir als specielles Beispiel $n = -4$, so können wir die Gleichung $W = 0$ in der Form schreiben:

$$u^3 - \frac{3}{2} \frac{h^2}{a} u^2 + \frac{3}{2} \frac{h^2}{a} A = 0.$$

Giebt man der Constante A den Werth

$$\frac{1}{3} \frac{h^4}{a^2},$$

so hat vorstehende Gleichung die 3 Wurzeln

$$+\frac{h^2}{a}, \quad +\frac{h^2}{a}, \quad -\frac{h^2}{2a}.$$

Wir haben alsdann eine instabile Kreisbewegung mit dem Radius $\frac{a}{h^2}$.

Wäre $n = -3$, so könnte der Fall gleicher Wurzeln überhaupt nicht eintreten, weshalb stabile Kreisbewegungen auch hier unmöglich sind.

Wir kommen jetzt zu dem zweiten Falle, in dem eine Kreisbewegung möglich ist, nämlich zu dem, dass die Gleichung $W = 0$ eine Identität ist. Alsdann ist auch identisch

$$\frac{dW}{du} = 0,$$

und die Gleichung 5) liefert durch Differentiation

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = h^2 u^3 ;$$

d. h. verglichen mit dem Anziehungsgesetz $f(r) = a r^n$ ist hier

$$a = h^2, \quad n = -3.$$

Die Constante A muss natürlich $= 0$ gesetzt werden. Wie oben schon gezeigt, ist in diesem Falle die Kreisbewegung instabil. Der Radius des Kreises kann beliebig angenommen werden.

Besitzt die Gleichung $W = 0$ eine positive Wurzel u_0 , so existirt für die Schaar der durch 4) definirten Bahnen eine einhüllende Curve, welche offenbar ein Kreis mit dem Radius $r_0 = \frac{1}{u_0}$ ist. Aehnlich verhält es sich auch mit jeder anderen positiven Wurzel der Gleichung 4). Setzt man in 4) $u = u_0$, so wird diese Gleichung offenbar be-

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} + u_0 + x = \varphi(u_0) + \varphi'(u_0)x + \frac{\varphi''(u_0)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\varphi'''(u_0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Für die Kreisbahn selbst lautet 9), da hier $\frac{d^2u}{d\lambda^2} = 0$ wird,

$$u_0 = \varphi(u_0),$$

so dass die obige Differentialgleichung wird:

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} + x = \varphi'(u_0)x + \frac{\varphi''(u_0)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\varphi'''(u_0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \quad 10)$$

Die auf der rechten Seite von 10) stehende Reihe ist nach dem früher über $\varphi(u)$ Gesagten innerhalb eines gewissen Convergenzkreises convergent.

Wir können uns leicht Rechenschaft davon geben, welche Form x haben muss. Nennen wir den Punkt der Bahn, welcher dem minimalen Werthe von r , also dem Maximum u_1 von u entspricht, das Perihel, die Richtung nach diesem Punkte die Apsidenlinie, den Winkel, welchen diese mit einem beliebigen Radiusvector r bildet, die wahre Anomalie, so ist zunächst klar, dass r oder u , folglich auch x , nur von der wahren Anomalie abhängen kann. Bildet die Apsidenlinie mit einer festen Anfangsrichtung den Winkel Π , so ist $\lambda - \Pi$ die wahre Anomalie. Folglich ist x eine periodische Function von $\lambda - \Pi$. Nach dem früher über die periodischen Bewegungen Gesagten folgt aber, dass die

$$x = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{\Theta} \lambda + C\right) + a_2 \cos 2\left(\frac{\pi}{\Theta} \lambda + C\right) + a_3 \cos 3\left(\frac{\pi}{\Theta} \lambda + C\right) + \dots$$

Durch Einsetzen in 10) lassen sich die Coefficienten $a_0, a_2, a_3, \dots$ sowie $\pi : \Theta$ bestimmen; a_1 und C bilden die Integrationsconstanten. Diese Art der Integration von 10) könnte man eine directe nennen, wenn auch die Coefficienten a sowie $\pi : \Theta$ durch successive Näherungen aus den Bedingungen gefunden werden müssen.

friedigt, und man erkennt sofort, dass die betreffenden Kreise singulären Lösungen von 4) entsprechen. Da aber im Allgemeinen für diese Werthe des u nicht $\frac{d^2u}{d\lambda^2} = 0$ wird, so stellen diese singulären Lösungen von 4) im Allgemeinen keine Kreisbewegungen dar. Fallen zwei Wurzeln u_0 und u_1 zusammen, so fallen auch zwei singuläre Lösungen zusammen und sind identisch mit einer der früher behandelten particulären Lösungen, welche eine Kreisbahn darstellt.

Nahe kreisförmige periodische Bewegungen.

Sätze von Newton und Bertrand.

Es möge die Bewegung eine periodische sein und von einer stabilen Kreisbewegung mit dem Radius $\frac{1}{u_0}$ nur wenig abweichen. Man setze

$$u = u_0 + x,$$

wodurch 9) übergeht in

Apsidenlinie eine Symmetrieaxe der Bahncurve ist, d. h. dass man für die wahren Anomalien $+(\lambda - \Pi)$ und $-(\lambda - \Pi)$ dieselben Werthe von u oder x erhält. Folglich kann x nur von den Cosinussen der wahren Anomalie und ihrer Vielfachen abhängen.

Endlich ist gezeigt, dass u , mithin auch x , eine periodische Function von $\frac{\pi}{\Theta} \lambda$ sein muss, also ausser dieser Variablen keine andern enthält. Daher muss, wenn C eine Constante bedeutet,

$$\lambda - \Pi = \frac{\pi}{\Theta} \lambda + C$$

sein, weshalb man für x die Form erhält

Bequemer scheint es mir aber zu sein, mutatis mutandis die von Lindstedt *) für die Integration einer Gleichung von der Form

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} + x = \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots \quad 11)$$

angegebene Methode anzuwenden. In unserem Falle sind

*) A. N. 2465 sowie: Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie: Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, VIIe série, Tome XXXI, No. 4.

allerdings die Verhältnisse andere, als Lindstedt sie angenommen hat; denn er betrachtet die β als kleine Grössen, was für unsere Untersuchung nicht zutreffen würde; vielmehr wissen wir, dass x eine ziemlich kleine Grösse ist, deren

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} + (1 - \nu)x = (\beta_1 - \nu)x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots, \quad (12)$$

welche Gleichung wir am bequemsten durch successive Annäherungen integrieren können. Die Constante ν wird in jeder Annäherung so bestimmt werden, dass nur periodische Glieder im Integrale auftreten.

Von vornherein setzen wir fest, dass $\beta_1 - \nu$ eine kleine Grösse von der ersten oder höherer Ordnung ist, sodass $(\beta_1 - \nu)x$ mindestens von der zweiten Ordnung ist. Demnach sind die grössten Glieder auf der rechten Seite von 12) von der zweiten Ordnung.

Indem wir nun in erster Näherung die Glieder zweiter etc. Ordnung vernachlässigen, lautet 12):

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} + (1 - \nu)x = 0.$$

Das allgemeine Integral ist

$$x = e \cos(\lambda \sqrt{1 - \nu} + C),$$

Da $(\beta_1 - \nu)$ von der ersten oder einer höheren Ordnung ist, so ist $(\beta_1 - \nu)e \cos w$ von der zweiten oder höherer Ordnung.

Eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} + \mu^2 x = \alpha_0 + \sum \alpha_i \cos(x_i \lambda + a_i),$$

in welcher μ , die α , x und a constant sind, hat bekanntlich das allgemeine, die beiden Integrationsconstanten e und C enthaltende Integral

$$x = e \cos(\mu \lambda + C) + \frac{\alpha_0}{\mu^2} + \sum \frac{\alpha_i}{\mu^2 - x_i^2} \cos(x_i \lambda + a_i). \quad (15)$$

Wäre aber für ein bestimmtes i

$$x_i = \mu,$$

so entstände anstatt desjenigen Gliedes in 15), welches unendlich gross wird, das Gliederpaar

$$\frac{\alpha_i}{\mu^2} \cos(\mu \lambda + a_i) + \frac{\alpha_i}{2\mu} \lambda \sin(\mu \lambda + a_i).$$

$$x = e \cos w + \frac{\beta_2 e^2}{2(1 - \nu)} + \frac{\beta_2 e^2}{2(1 - \nu)(1 - 2^2)} \cos 2w \quad (16)$$

Hier ist wieder approximativ $\beta_1 - \nu = 0$, d. h. $\nu = \beta_1$ zu setzen.

Da aber die Entwicklung in 4) bis auf Grössen zweiter Ordnung incl. genau war, so ist auch mit Rücksicht auf den Factor e der Coefficient $(\beta_1 - \nu)$ von $e \cos w$ bis auf die erste Ordnung incl. genau, d. h. $\beta_1 - \nu$ sowie der Fehler der Bestimmung $\nu = \beta_1$ sind von der zweiten oder

Ordnung wir als die erste betrachten. Diese Unterschiede ändern jedoch nichts an dem Grundgedanken der Methode. Bezeichnen wir mit ν eine vorläufig noch unbestimmte Constante, so können wir 11) folgendermassen schreiben:

$$\lambda \sqrt{1 - \nu} + C = w,$$

wodurch

$$x = e \cos w. \quad (13)$$

Da bei dieser ersten Näherung nur Grössen erster Ordnung berücksichtigt sind, so genügt es hier zu setzen

$$\beta_1 - \nu = 0, \text{ d. h. } \nu = \beta_1.$$

Der hierbei in der Bestimmung von ν begangene Fehler ist von der ersten oder höherer Ordnung, so dass der in x entstehende Fehler wegen des Verkleinerungsfactors e von der zweiten oder höherer Ordnung ist.

Das gefundene Integral 13) setzen wir in die rechte Seite von 12) ein und vernachlässigen die Glieder dritter und höherer Ordnung. Wir finden

Man sieht sofort, dass in 14) das mit $\cos w$ multiplicirte Glied der rechten Seite ein dem soeben genannten besonderen Fall entsprechendes, mit λ multiplicirtes Glied im Integrale ergeben muss, weshalb man in allen Näherungen ν so bestimmt, dass der Coefficient dieses Gliedes verschwindet, da ja doch x rein periodisch herauskommen muss.

Mit Unterdrückung dieses Gliedes wird das nach dem Schema 15) gebildete Integral von 14):

höherer Ordnung. Wir setzen jetzt 16) in die rechte Seite von 12) ein, indem wir in den Nennern von 16) β_1 statt ν schreiben und die Glieder dritter Ordnung vollständig berücksichtigen. Das mit $e \cos w$ multiplicirte Glied der rechten Seite wird:

$$\left(\beta_1 - \nu + \frac{5}{6} \frac{\beta_2^2 e^2}{1 - \beta_1} + \frac{3}{4} \beta_3 e^2 \right) e \cos w.$$

Die übrigen Glieder hinzuschreiben hat für uns keinen Nutzen. Damit nun im Integral kein mit λ multiplicirtes Glied entsteht, müssen wir ν so bestimmen, dass obiges Glied verschwindet, d. h.

$$\nu = \beta_1 + \left(\frac{5}{6} \frac{\beta_2^2}{1 - \beta_1} + \frac{3}{4} \beta_3 \right) \epsilon^2. \quad (17)$$

Der Fehler dieser Bestimmung ist von der dritten oder höherer Ordnung. Wir werden in den Approximationen nicht weiter gehen.

Da nun x eine periodische Function von

$$w = \lambda \sqrt{1 - \nu} + C$$

$$\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \varphi(u_0) - \frac{\epsilon^2}{24} \left(5 \frac{(\varphi''(u_0))^2}{1 - \varphi'(u_0)} + 3 \varphi'''(u_0) \right)}}. \quad (18)$$

Wir fragen nun, für welche Anziehungsgesetze die Bahn bei beliebigen, wenn auch an gewisse Grenzen gebundenen, Anfangsbedingungen eine geschlossene sein kann; offenbar nur dann, wenn der Nenner der rechten Seite von 18) eine rationale ganze oder gebrochene Zahl ergibt, wie auch ϵ und u_0 beschaffen sein mögen. Wir wählen ϵ unendlich klein, d. h.

$$\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \varphi'(u_0)}}. \quad (19)$$

Nun war

$$\varphi(u) = \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2 u^2},$$

woraus, wenn wieder

$$\frac{df\left(\frac{1}{u}\right)}{d\left(\frac{1}{u}\right)} = f'\left(\frac{1}{u}\right)$$

gesetzt wird,

$$\varphi'(u_0) = -\frac{1}{h^2 u_0^3} \left[\frac{f'\left(\frac{1}{u_0}\right)}{u_0} + 2 f\left(\frac{1}{u_0}\right) \right]$$

Aber für die zu Grunde gelegte Kreisbahn war

$$u_0 = \varphi(u_0),$$

woraus

$$h^2 u_0^3 = f\left(\frac{1}{u_0}\right),$$

mithin

$$\begin{aligned} \varphi'(u_0) &= -\frac{1}{f\left(\frac{1}{u_0}\right)} \left[\frac{f'\left(\frac{1}{u_0}\right)}{u_0} + 2 f\left(\frac{1}{u_0}\right) \right] \\ &= -r_0 \frac{f'(r_0)}{f(r_0)} - 2, \end{aligned}$$

sodass 19) wird

$$\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{3 + \frac{r_0 f'(r_0)}{f(r_0)}}}, \quad (20)$$

ist, so kehren dieselben Werthe wieder, wenn λ um

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \nu}} = 2\Theta$$

wächst, d. h.

$$\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \beta_1 - \left(\frac{5}{6} \frac{\beta_2^2}{1 - \beta_1} + \frac{3}{4} \beta_3 \right) \epsilon^2}}.$$

Hier haben wir nach 10) zu setzen

$$\beta_1 = \varphi'(u_0), \quad \beta_2 = \frac{\varphi''(u_0)}{1 \cdot 2}, \quad \beta_3 = \frac{\varphi'''(u_0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Wir erhalten

eine Grösse, die, wie früher gezeigt, nur im Falle einer periodischen Bewegung reell ist.

Damit Θ von $r_0 = \frac{1}{u_0}$ unabhängig ist, muss, wenn n eine Zahlengrösse bedeutet,

$$r_0 \frac{f'(r_0)}{f(r_0)} = n$$

sein. Lässt man den Index 0 fort und bezeichnet durch a eine positive Integrationsconstante, so erhält man

$$f(r) = a r^n$$

als einziges Anziehungsgesetz, für welches, wenigstens unter Annahme eines unendlich kleinen ϵ , d. h. einer unendlich wenig vom Kreise abweichenden periodischen Bewegung, Θ vom Radius r_0 des Kreises unabhängig wird. Die Gleichung 20) wird alsdann

$$\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{n+3}}, \quad (21)$$

eine Formel, die bereits von Newton aufgestellt ist.

Damit die Bahn geschlossen ist, muss $n+3$ das Quadrat einer rationalen Zahlengrösse sein. Setzen wir z. B. $n = -2$, d. h. nehmen wir das Newton'sche Gravitationsgesetz an, so wird $\Theta = \pi$. Bekanntlich ist für dieses Anziehungsgesetz die Bahn eine geschlossene für beliebige, allerdings an gewisse Grenzen gebundene Anfangsbedingungen, auch wenn ϵ nicht unendlich klein ist.

Für $n = +1$ wird $\Theta = \frac{\pi}{2}$, d. h. die Maxima und Minima von r liegen um je einen rechten Winkel von einander entfernt, die Bahn ist also geschlossen, wenigstens solange sie nur unendlich wenig vom Kreise abweicht. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass auch für endliche Abweichungen vom Kreise die Bahn geschlossen ist. In der That lautet die Gleichung 3), wenn man $f(r) = a r$ annimmt,

$$\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + u = \frac{a}{h^2 u^3}.$$

Das allgemeine Integral

$$u^2 = A \sin^2(\lambda + B) + \frac{a}{h^2 A} \cos^2(\lambda + B),$$

in welchem A und B willkürliche Constanten sind, deren erste positiv sein muss, stellt offenbar die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse dar, auch bei endlicher Abweichung vom Kreise. Die Bahn ist daher geschlossen.

Es lassen sich nun offenbar unendlich viele Werthe des Exponenten n angeben, für welche $\sqrt{n+3}$ rational, mithin unabhängig von den Anfangsbedingungen, wofür die Bewegung nur unendlich wenig vom Kreise abweicht, die Bahn geschlossen ist. Jedoch ist damit nicht erwiesen, dass auch, wie bei den soeben betrachteten Anziehungsgesetzen $f(r) = \frac{a}{r^2}$ und $f(r) = ar$ die Bahn bei endlicher Abweichung vom Kreise geschlossen ist. Soll dies der Fall sein, so müsste auch die strengere Gleichung 18) für Θ dasselbe rationale Vielfache von π ergeben wie die Gleichung 21), d. h. der Coefficient von e^2 verschwinden.

Wie bereits gezeigt, kommen überhaupt nur Anziehungsgesetze von der Form $f(r) = ar^n$ in Frage, wenn Θ von den Anfangsbedingungen, so lange diese an gewisse Grenzen gebunden sind, unabhängig sein soll. Man hat also

$$\varphi(u) = \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2 u^2} = \frac{a}{h^2 u^{n+2}},$$

woraus durch successive Differentiation:

$$\varphi'(u) = -(n+2) \frac{a}{h^2 u^{n+3}}$$

$$\varphi''(u) = + (n+2)(n+3) \frac{a}{h^2 u^{n+4}}$$

$$\varphi'''(u) = - (n+2)(n+3)(n+4) \frac{a}{h^2 u^{n+5}}$$

.....

Setzt man hier $u = u_0$ und eliminirt den Factor $\frac{a}{h^2}$ mittelst der Gleichung $\varphi(u_0) = u_0$, d. h.

$$\frac{a}{h^2 u_0^{n+3}} = 1,$$

so ergibt sich:

$$\varphi(u_0) = + u_0$$

$$\varphi'(u_0) = - (n+2)$$

$$\varphi''(u_0) = + \frac{(n+2)(n+3)}{u_0}$$

$$\varphi'''(u_0) = - \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{u_0^2}$$

.....

wodurch 18) wird:

$$\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{(n+3) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{e^2}{u_0^2} (n-1)(n+2)\right)}}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass Θ nur für $n = +1$ und für $n = -2$ von e und u_0 unabhängig ist, und dass nur in diesen Fällen die Bahn, unabhängig von den Anfangsbedingungen, wenn diese nur an gewisse Grenzen gebunden sind, eine geschlossene sein kann. Dass für diese beiden Exponenten dies in der That der Fall ist, haben wir bereits gesehen.

Wir sind somit zu dem von Bertrand aufgestellten Satze gelangt, dass nur unter Annahme der beiden Anziehungsgesetze $f(r) = \frac{a}{r^2}$ und $f(r) = ar$ unabhängig von den Anfangsbedingungen, solange diese an gewisse Grenzen gebunden sind, die Bahnen geschlossen sind.

Anziehung einer mit der Zeit veränderlichen Masse.

Es wurde bereits darauf aufmerksam gemacht, dass die Gleichungen 2) und 3) auch für den Fall gelten, dass die Function $f(r)$ die Zeit explicite enthält. Freilich wird in diesem Falle an eine directe Integration nicht zu denken sein, sondern man muss zu successiven Näherungen seine Zuflucht nehmen.

Gylden hat in A. N. 2593 eine Methode der Lösung angegeben, die zunächst, und zwar in veränderter und verallgemeinerter Form, hier vorgetragen werden soll.

Es werde gesetzt:

$$r = \frac{\varrho}{1 + \psi},$$

oder, wenn $\frac{1}{\varrho} = v$ ist,

$$u = v(1 + \psi). \quad 22)$$

Die Function ψ ist vorläufig unbestimmt. An Stelle von $f(r)$ setzen wir jetzt $f(r)(1 + F)$, indem wir mit F eine Function der Zeit bezeichnen. Wird wieder

$$\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2 u^2} = \varphi(u)$$

gesetzt, so tritt an Stelle von 3) jetzt die Gleichung:

$$\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + u = (1 + F) \varphi(u), \quad 23)$$

oder wegen 22)

$$(1 + \psi) \left(\frac{d^2 v}{d\lambda^2} + v \right) + 2 \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\psi}{d\lambda} + v \frac{d^2 \psi}{d\lambda^2} = (1 + F) \varphi(u) \quad 24)$$

Die Function ψ soll nun so gewählt werden, dass

$$\frac{d^2 v}{d\lambda^2} + v = \varphi(v) \quad (25)$$

ist, wodurch 23) wird:

$$\begin{aligned} 2 \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\psi}{d\lambda} + v \frac{d^2 \psi}{d\lambda^2} &= (1 + F) \varphi(u) - (1 + \psi) \varphi(v) \\ &= \varphi(u) - \varphi(v) - \psi \varphi(v) + F \varphi(u). \end{aligned} \quad (26)$$

Statt t führen wir jetzt die sogenannte reducirte Zeit τ ein durch die Gleichung

$$dt = \frac{d\tau}{(1 + \psi)^2}, \quad (27)$$

wodurch 2) übergeht in

$$d\lambda = h v^2 d\tau. \quad (28)$$

In 26) führen wir mittelst 28) statt λ die unabhängige Variable τ ein, wodurch wir erhalten:

$$\frac{d^2 \psi}{d\tau^2} - h^2 v^3 (\varphi(u) - \varphi(v) - \psi \varphi(v)) = h^2 v^3 F \varphi(u).$$

Wegen 22) ist aber

$$\varphi(u) = \varphi(v) + \frac{\varphi'(v)}{1} \psi v + \frac{\varphi''(v)}{1 \cdot 2} \psi^2 v^2 + \dots,$$

wodurch die vorige Gleichung wird:

$$\frac{d^2 \psi}{d\tau^2} + h^2 v^3 (\varphi(v) - v \varphi'(v)) \psi - h^2 v^5 \frac{\varphi''(v)}{1 \cdot 2} \psi^2 - h^2 v^6 \frac{\varphi'''(v)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \psi^3 - \dots = h^2 v^3 F \varphi(u). \quad (29)$$

Die Lösung der Aufgabe beruht also auf der Integration der Gleichungen 25), 27), 28) und 29).

Die linke Seite von 29) wird linear, wenn

$$\varphi''(v) = \varphi'''(v) = \dots = 0$$

sind, d. h. wenn $\varphi(v) = \alpha + \beta v$, wo α und β Constanten sind. Das Anziehungsgesetz lautet alsdann:

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = h^2 \alpha u^2 + h^2 \beta u^3,$$

oder

$$f(r) = \frac{h^2 \alpha}{r^2} + \frac{h^2 \beta}{r^3}.$$

Unter Annahme dieses Gesetzes, dem das Newton'sche Gravitationsgesetz als specieller Fall angehört, mag hier die

Rechnung fortgesetzt werden. Die Gleichung 29) lautet alsdann

$$\frac{d^2 \psi}{d\tau^2} + h^2 \alpha v^3 \psi = h^2 v^3 [\alpha + \beta v (1 + \psi)] F. \quad (30)$$

Die Gleichungen 23) und 24) werden

$$\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + u = (1 + F) (\alpha + \beta u)$$

und

$$\frac{d^2 v}{d\lambda^2} + v = \alpha + \beta v,$$

welche man für unsere Zwecke besser folgendermaassen schreibt:

$$\frac{d^2 \left(u - \frac{\alpha}{1 - \beta}\right)}{d\lambda^2} + (1 - \beta) \left(u - \frac{\alpha}{1 - \beta}\right) = (\alpha + \beta u) F, \quad (31)$$

$$\frac{d^2 \left(v - \frac{\alpha}{1 - \beta}\right)}{d\lambda^2} + (1 - \beta) \left(v - \frac{\alpha}{1 - \beta}\right) = 0. \quad (32)$$

Um 30) integrieren zu können, wird man sich zunächst die Kenntniss zweier particulärer Integrale ψ_1 und ψ_2 unter der Annahme $F = 0$ zu verschaffen suchen. Für $F = 0$ lautet 31):

$$\frac{d^2 \left(u - \frac{\alpha}{1 - \beta}\right)}{d\lambda^2} + (1 - \beta) \left(u - \frac{\alpha}{1 - \beta}\right) = 0, \quad (33)$$

hat also dieselbe Form wie 32).

Ist $1 - \beta > 0$, so hat man die beiden folgenden particulären Integrale von 33)

$$u = v + \cos(\lambda \sqrt{1 - \beta}) = v \left(1 + \frac{\cos(\lambda \sqrt{1 - \beta})}{v}\right) = v(1 + \psi_1)$$

und

$$u = v + \sin(\lambda \sqrt{1 - \beta}) = v \left(1 + \frac{\sin(\lambda \sqrt{1 - \beta})}{v}\right) = v(1 + \psi_2).$$

Hieraus folgt:

$$\psi_1 = \frac{\cos(\lambda \sqrt{1-\beta})}{v}$$

$$\psi_2 = \frac{\sin(\lambda \sqrt{1-\beta})}{v},$$

woraus mit Rücksicht auf 28):

$$u = v + e^{-\lambda \sqrt{\beta-1}} = v \left(1 + \frac{e^{-\lambda \sqrt{\beta-1}}}{v} \right) = v(1 + \psi_1),$$

und

$$u = v + e^{+\lambda \sqrt{\beta-1}} = v \left(1 + \frac{e^{+\lambda \sqrt{\beta-1}}}{v} \right) = v(1 + \psi_2),$$

woraus folgt:

$$\psi_1 = \frac{e^{-\lambda \sqrt{\beta-1}}}{v}, \quad \psi_2 = \frac{e^{+\lambda \sqrt{\beta-1}}}{v},$$

woraus

$$\frac{\psi_1 d\psi_2 - \psi_2 d\psi_1}{d\tau} = h \sqrt{\beta-1}.$$

Für $1-\beta=0$ lautet 33): $\frac{d^2 u}{d\lambda^2} = \alpha$, und 25): $\frac{d^2 v}{d\lambda^2} = \alpha$.

Man kann in diesem Falle setzen:

$$\psi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2 + \frac{h^2}{\psi_1 d\psi_2 - \psi_2 d\psi_1} [\psi_2 \int \psi_1 v^3 (\alpha + \beta v(1+\psi)) F d\tau - \psi_1 \int \psi_2 v^3 (\alpha + \beta v(1+\psi)) F d\tau].$$

Die beiden Constanten C_1 und C_2 sind überschüssig, da bereits bei der Integration von 32) zwei willkürliche Constanten eingeführt werden; wir setzen deshalb $C_1 = C_2 = 0$, und haben alsdann für die drei oben betrachteten Fälle:

1) $1-\beta > 0$,

$$\psi = \frac{h}{v \sqrt{1-\beta}} [\sin(\lambda \sqrt{1-\beta}) \int v^2 \cos(\lambda \sqrt{1-\beta}) (\alpha + \beta v(1+\psi)) F d\tau - \cos(\lambda \sqrt{1-\beta}) \int v^2 \sin(\lambda \sqrt{1-\beta}) (\alpha + \beta v(1+\psi)) F d\tau].$$

2) $1-\beta < 0$,

$$\psi = \frac{h}{v \sqrt{\beta-1}} [e^{+\lambda \sqrt{\beta-1}} \int v^2 e^{-\lambda \sqrt{\beta-1}} (\alpha + \beta v(1+\psi)) F d\tau - e^{-\lambda \sqrt{\beta-1}} \int v^2 e^{+\lambda \sqrt{\beta-1}} (\alpha + \beta v(1+\psi)) F d\tau].$$

3) $1-\beta = 0$,

$$\psi = \frac{h}{v} [\lambda \int v^2 (\alpha + v(1+\psi)) F d\tau - \int v^2 \lambda (\alpha + v(1+\psi)) F d\tau].$$

Diese Integrationen können nur durch successive Annäherungen vollzogen werden, indem man v und λ vermöge 32) und 28) als Functionen von τ ausdrückt. Die durch 32) definierte »intermediäre Bahn« hat folgende Gleichung:

1) Wenn $1-\beta > 0$,

$$v = \frac{\alpha}{1-\beta} + C_1 \cos(\lambda \sqrt{1-\beta} + C_2),$$

2) wenn $1-\beta < 0$,

$$v = C_1 e^{+\lambda \sqrt{\beta-1}} + C_2 e^{-\lambda \sqrt{\beta-1}},$$

$$\frac{\psi_1 d\psi_2 - \psi_2 d\psi_1}{d\tau} = h \sqrt{1-\beta}.$$

Da v aus 32) und 28) als Function von τ darstellbar ist, so sind hiernach auch ψ_1 und ψ_2 bekannte Functionen von τ .

Ist $1-\beta < 0$, so hat man folgende particuläre Integrale von 33):

$$u = v + 1 = v \left(1 + \frac{1}{v} \right) = v(1 + \psi_1)$$

und

$$u = v + \lambda = v \left(1 + \frac{\lambda}{v} \right) = v(1 + \psi_2),$$

d. h.

$$\psi_1 = \frac{1}{v}, \quad \psi_2 = \frac{\lambda}{v},$$

woraus

$$\frac{\psi_1 d\psi_2 - \psi_2 d\psi_1}{d\tau} = h.$$

Bedeutet nun C_1 und C_2 zwei Integrationsconstanten, so lautet das allgemeine Integral von 30), da ja ψ_1 und ψ_2 particuläre Integrale dieser Gleichung sind:

3) wenn $1-\beta = 0$,

$$v = C_1 + C_2 \lambda,$$

wo C_1 und C_2 Integrationsconstanten sind.

Die Function F , welche von t abhängt, ist vermöge 27) als Function von τ darzustellen. Ein einfaches Beispiel für die Ausführung dieses Annäherungsprocesses giebt Gylden in A. N. 2593; wir wollen jedoch hierauf nicht näher eingehen.

Man wird nicht leugnen können, dass das Verfahren ein complicirtes ist, und dass es einfacher erscheint, die

Lösung auf Grund der Gleichungen 2) und 23) also

$$\begin{aligned} d\lambda &= h u^2 dt, \\ \frac{d^2 u}{d\lambda^2} + u &= (1 + F) \varphi(u) \end{aligned}$$

zu unternehmen, indem man mit allmählich gesteigerter Schärfe u und t , welch' letzteres in F vorkommt, als Functionen von λ darstellt.

Im Falle des Newton'schen Gravitationsgesetzes oder eines von diesem nur wenig abweichenden Anziehungsgesetzes wird man gemäss der Methode der Variation der Constanten die Bahn als einen Kegelschnitt mit veränderlichen Elementen ansehen können. Wir nehmen, um diesen Aufsatz nicht über Gebühr auszudehnen, einfach

$$f(r) = \frac{a}{r^2} = \frac{k^2 M}{r^2},$$

also

$$a = k^2 M,$$

indem wir unter k eine der Gauss'schen Constante entsprechende Grösse oder auch diese selbst, unter M die in dem als fest betrachteten Anziehungscentrum vorhanden gedachte Masse zu einer bestimmten Zeit, für welche $F = 0$ ist, verstehen. Demnach ist $\varphi(u) = \frac{a}{h^2}$, mithin

$$\frac{d^2 u}{d\lambda^2} + u = \frac{a}{h^2} (1 + F) = \frac{k^2 M}{h^2} (1 + F). \quad 34)$$

Verstehen wir nun unter p den Halbparameter des osculirenden Kegelschnittes, so haben wir

$$\frac{d\lambda}{u^2 dt} = h = k \sqrt{p M (1 + F)}. \quad 35)$$

oder auch

$$u = \frac{1}{p_0} + \frac{e_0}{p_0} \cos(\lambda - \Pi_0) + \frac{1}{p_0} (\sin \lambda \int \cos \lambda F d\lambda - \cos \lambda \int \sin \lambda F d\lambda), \quad 39)$$

$$u = \frac{1 + F}{p_0} + \frac{e_0}{p_0} \cos(\lambda - \Pi_0) - \frac{1}{p_0} (\sin \lambda \int \sin \lambda dF + \cos \lambda \int \cos \lambda dF).$$

Der Vergleich mit 38) giebt:

$$(1 + F) e \cos(\lambda - \Pi) = e_0 \cos(\lambda - \Pi_0) - \sin \lambda \int \sin \lambda dF + \cos \lambda \int \cos \lambda dF. \quad 40)$$

Nach den Grundsätzen der Variation der Constanten muss für die Bewegung auch die Gleichung

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k \sqrt{M(1 + F)}}{\sqrt{p}} e \sin(\lambda - \Pi)$$

so dass 41) lautet:

$$(1 + F) e \sin(\lambda - \Pi) = \frac{e_0}{p_0} \sin(\lambda - \Pi_0) + \cos \lambda \int \sin \lambda dF - \sin \lambda \int \cos \lambda dF. \quad 42)$$

Aus 40) und 42) folgt:

$$e \cos \Pi = \frac{e_0 \cos \Pi_0 - \int \cos \lambda dF}{1 + F}, \quad e \sin \Pi = \frac{e_0 \sin \Pi_0 - \int \sin \lambda dF}{1 + F}.$$

Die Integrale verschwinden für die Osculationsepoche $t = 0$.

Verschwindet F zur Zeit $t = 0$, und hat alsdann p den Werth p_0 , so ist auch

$$h = k \sqrt{p_0 M}. \quad 36)$$

Aus 35) und 36) folgt

$$p = \frac{p_0}{1 + F}. \quad 37)$$

Mit wachsendem F wird also p immer kleiner werden und umgekehrt. Wir werden deshalb für die osculirende Bahn die Gleichung

$$r = \frac{p_0}{(1 + F)(1 + e \cos(\lambda - \Pi))} = \frac{1}{u}, \quad 38)$$

wo Π die Perihelslänge, e die Excentricität bedeutet, annehmen können. Diese Elemente werden beide veränderlich sein.

Für $F = 0$ lautet 34)

$$\frac{d^2 \left(u - \frac{a}{h^2}\right)}{d\lambda^2} + \left(u - \frac{a}{h^2}\right) = 0,$$

oder, da $p_0 = \frac{h^2}{k^2 M} = \frac{h^2}{a}$ ist,

$$\frac{d^2 \left(u - \frac{1}{p_0}\right)}{d\lambda^2} + \left(u - \frac{1}{p_0}\right) = 0.$$

Da diese Gleichung für $u - \frac{1}{p_0}$ die beiden particulären Werthe $\cos \lambda$ und $\sin \lambda$ zulässt, lautet das allgemeine Integral von 34):

gelten, die wir mit Rücksicht auf 2) leicht auf folgende Form bringen:

$$(1 + F) e \sin(\lambda - \Pi) = -p_0 \frac{du}{d\lambda}. \quad 41)$$

Nun folgt aus 39)

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\lambda} &= -\frac{e_0}{p_0} \sin(\lambda - \Pi_0) + \frac{1}{p_0} (\cos \lambda \int \cos \lambda F d\lambda + \sin \lambda \int \sin \lambda F d\lambda) \\ &= -\frac{e_0}{p_0} \sin(\lambda - \Pi_0) - \frac{1}{p_0} (\cos \lambda \int \sin \lambda dF - \sin \lambda \int \cos \lambda dF), \end{aligned}$$

Nehmen wir $F = \gamma t$, indem wir durch γ eine Constante bezeichnen, so wird bei Vernachlässigung von $\gamma^2, \gamma^3, \dots$

$$\int \cos \lambda dF = -e_0 \cos \Pi_0 \gamma t + \gamma \times \text{periodische Glieder}$$

$$\int \sin \lambda dF = -e_0 \sin \Pi_0 \gamma t + \gamma \times \text{periodische Glieder.}$$

Setzt man dies in 43) ein, so erhält man bei Vernachlässigung von $\gamma^2, \gamma^3, \dots$

Berlin 1898, Febr. 7.

$$e \cos \Pi = e_0 \cos \Pi_0 + \text{periodische Glieder}$$

$$e \sin \Pi = e_0 \sin \Pi_0 + \text{periodische Glieder.}$$

Aus diesem Ergebniss und 37) folgt, dass, wenn die anziehende Masse der Zeit proportional langsam wächst, die Bahn ein sich langsam verengender, hierbei aber sich stets ähnlich bleibender Kegelschnitt ist. Dieser Satz gilt für beliebige Excentricitäten.

R. Lehmann-Filhés.

Ueber die Ertel'sche Theilung des Pulkowaer Verticalkreises und die darauf beruhenden Declinationsbestimmungen.

Von M. Nyrén.

In dem werthvollen Aufsatz von Herrn Battermann »Individuelle Correctionen von 388 Fundamentalsternen des Berliner Jahrbuchs«, A. N. Nr. 3468–69, macht der Verfasser über die Theilungsfehler-Correctionen, welche bei unseren Beobachtungsreihen für 1845 und 1865 zur Anwendung gekommen sind, einige Bemerkungen, welche für die Mehrzahl der jetzt mit Declinationsbestimmungen beschäftigten Astronomen von erheblicher Tragweite sein könnten. Da die endgültige Bearbeitung der Declinationen, sowohl des 1845- wie des 1865-er Cataloges von mir herrührt, so erlaube ich mir die Berechtigung der erwähnten Bemerkungen hier etwas näher zu untersuchen.

Da Herr Battermann unter Berufung auf Dr. Romberg die Correctionen als »zweifelhaft« und »unsicher« bezeichnet, muss ich annehmen, dass er aus der Einleitung zum Romberg'schen »Catalog von 5634 Sternen« diese Meinung gewonnen hat. Und es kann nicht geleugnet werden, dass die von Romberg dort angeführten Zahlen einen scheinbar guten Grund für eine solche Meinung abgeben.

Die Declinationen des von Romberg am Meridiankreise bestimmten Cataloges beruhen auf einem aus Beobachtungen am Verticalkreise gebildeten Fundamentalcatalog; die dabei gewonnene Neubestimmung der Fundamentalsterne kann also nur durch Anschluss an den Catalog als Ganzes erlangt werden. Die Abweichungen vom F. C. des V. Kr., die dabei hervorgetreten sind, hatte Romberg in Gruppen von je 2° zwischen +88° und –18° vereinigt. Die Summe der Quadrate dieser 54 Differenzen V. Kr. – M. Kr. fand sich dann = 9.35; wurden die Theilungsfehler-Correctionen des V. Kr. vernachlässigt, so verminderte sich die Summe auf 6.47; verfuhr man mit den Declinationen des M. Kr. in derselben Weise, so bekam man 5.56; wenn die Th. F. Correctionen beider Instrumente vernachlässigt wurden, 3.64; durch Anbringen der Th. F. Correctionen des M. Kr. mit umgekehrtem Zeichen, 3.14; und schliesslich, wenn die Th. F. Correctionen des M. Kr. mit umgekehrtem Zeichen angebracht und diejenigen des V. Kr. vernachlässigt wurden, 2.16.*)

Aus diesen Zahlen geht nun unter anderem scheinbar hervor, dass die Declinationen des V. Kr. unter sich besser übereinstimmen würden, wenn keine Correctionen wegen

Th. F. angebracht wären. Mein verehrter College Romberg ist jedoch ein zu erfahrener Kenner von Beobachtungsergebnissen, um nicht seine hierauf gebauten Schlussfolgerungen in sehr vorsichtige Form zu kleiden. Er sagt nämlich l. c. p. (10): »Hieraus scheint hervorzugehen, dass 1) die Theilungsfehler des Meridiankreises ihrer Quantität nach verlässlich, die Zeichen derselben jedoch verkehrt waren; 2) die Theilungsfehler des Verticalkreises mit kleinen Unsicherheiten behaftet sind und hier wenigstens keine Verbesserungen hervorbringen.«

Die in diesen Ausdrücken liegende Reserve scheint Herr Battermann übersehen zu haben.

Da die von Peters ausgeführte Untersuchung der systematischen Th. F. sich durch grosse Sorgfalt auszeichnet, so muss die nachgebliebene Unsicherheit der numerischen Werthe der gefundenen Correctionen höchst unbedeutend sein. Es kann wohl deshalb keinem Zweifel unterliegen, dass durch Anbringen der Correctionen, zumal diese innerhalb des Quadranten um mehr als 1 Secunde variiren, die Beobachtungsreihe als Ganzes an Zuverlässigkeit gewonnen hat.

Ein Punkt könnte nach den von Romberg gefundenen Zahlen vielleicht noch verdächtig erscheinen, ob nämlich nicht die Th. F. Correctionen für den V. Kr. ebenfalls verkehrtes Zeichen bekommen haben. Obgleich ich in Bezug auf diese Frage mir schon längst Gewissheit verschafft hatte, habe ich doch jetzt, um jeden Zweifel in dieser Hinsicht auch von anderer Seite zu zerstreuen, folgende Controllrechnung ausgeführt.

In derselben Weise, wie ich seinerzeit mir die Gewissheit verschaffte, dass die Correctionen wegen der Th. F. des M. Kr. umgekehrtes Zeichen gegen das vorher angewandte haben mussten, bin ich auch in Bezug auf den V. Kr. verfahren. Aus den Kreisablesungen einiger Beobachtungsabende für den 1865-er Catalog habe ich bei verschiedenen Stellungen des Kreises den Winkel zwischen den durch die 4 Mikroskope bestimmten Durchmesser ermittelt. Damit zwei von einander unabhängige Resultate sich gegenseitig controlliren, habe ich diese Untersuchungen durch zwei Quadranten durchgeführt. Obgleich hierbei die Zahl der herangezogenen Beobachtungsabende eine nur geringe war,

*) Bei diesen Vergleichen ist der Umstand, dass die Declinationen des V. Kr. für Sterne zwischen 50° und dem Pol auch auf Beobachtungen in der unteren Culmination beruhen, folglich auch von den dabei mit spielenden Th. F. abhängig sind, von Romberg übersehen worden.