12. Studien zur Totalreflexion und Metallreflexion; von E. Ketteler.

1. Ueber die Totalreflexion und über den streifend austretenden Strahl.

1. Der bei der Totalreflexion auftretende, sogenannte streifende Strahl, dessen Existenz zuerst von Cauchy begründet und später von Quincke experimentell erwiesen wurde, ist neuerlich von Hrn. W. Voigt behandelt worden. In der betreffenden Abhandlung¹⁾ befindet sich indess m. E. ein Rechenfehler, welcher wohl infolge etwas einseitigen Gebrauches complexer Grössen, bez. durch nicht strenges Einhalten der Fresnel'schen Regel entstanden ist. Dadurch wird das Resultat unrichtig, und werden die zur Verificirung desselben angestellten Versuche in anderer Weise gedeutet werden müssen.

Hr. Voigt legt seiner Untersuchung, zunächst wenigstens, unendlich ausgedehnte Medien, Grenzflächen und Wellenebenen zu Grunde, und so kommt er zu dem Schluss, dass, wenn in einem dichteren Medium eine unbegrenzte Wellenebene unter einem Einfallswinkel, welcher grösser ist als der Grenzwinkel der Totalreflexion, in einem unendlich fernen Punkte die ebene Trennungsfläche eines angrenzenden dünneren Mediums trifft, dieselbe sich spaltet in eine „total“ reflectirte und in eine streifend gebrochene Welle, und dass alle drei Wellen, aus dem Unendlichen herkommend, auch wieder ins Unendliche fortschreiten. „Auf diese Weise sei eine totale Reflexion mit dem Bestehen einer Schwingung im zweiten Medium vereinbar“ (p. 186). In Betreff der streifenden Welle wird hervorgehoben, dass die Amplituden derselben (in Uebereinstimmung mit Cauchy) mit der Entfernung von der Grenzfläche abnehmen, und dass (wie ich zuerst gezeigt habe) die

1) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 185. 1899, abgedruckt aus den Göttinger Nachrichten, zum Vortrag angemeldet auf der Naturforscher-Versammlung zu Düsseldorf.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben mit dem Einfallswinkel veränderlich ist.

Nun glaubt Hr. Voigt, wofern ich ihn wenigstens recht verstehe, dass es unter günstigen Umständen möglich sein werde, diese streifende Welle aus ihrer Verbindung mit der Grenzfläche abzulösen und sie dadurch zu veranlassen, als gewissermaassen freie Welle selbständig in das Innere des dünneren Mediums einzutreten und sich in demselben fortzupflanzen. Dazu werde es vermuthlich etwa genügen, die bis dahin unbegrenzt gedachte Trennungsfläche durch einen passend geführten scharfkantigen Knick abzubrechen, sie also dadurch plötzlich endlich zu begrenzen.

Um diese Vermuthungen experimentell zu prüfen, hat Hr. Voigt mit zwei von der Firma C. Zeiss für diesen Zweck hergestellten Prismen und unter Verwendung elektrischen Lichtes Versuche angestellt. Dieselben ergaben das Resultat, dass ein auf die erwähnte scharfe Kante eingestelltes Auge dieselbe in hellem Lichte strahlend sah; daraus schliesst er, „dass die bei der ‚totalen‘ Reflexion im zweiten Medium erregte Bewegung die Ursache dieser Lichterscheinung ist“ (p. 189)

Nach dieser Feststellung giebt der Verfasser im Anschluss an die Neumann'sche Vectorgrösse noch einen kurzen Ueberblick über die bisherige mathematische Fassung der Theorie der Totalreflexion, wobei er sich, wie schon oben angeführt, der complexen Form bedient. Demgemäss bestimmt er die Schwingungscomponenten der in Betracht kommenden Wellen „durch die reellen oder die imaginären Theile“ gewisser Ausdrücke (p. 190). Sind so die drei axialen Amplituden U , V , W der streifenden Welle gefunden, so sollen schliesslich U^2 , V^2 , W^2 die specifischen Energien der Componenten nächst der Grenzfläche sein; die Frage, in welche Kategorie optischer Begriffe diese „streifende Welle“ hineingeht, wird nicht näher erörtert.¹⁾

Bezüglich der oben erwähnten, mittels der Zeiss'schen Prismen wirklich beobachteten Schwingung bemerkt Hr. Voigt

1) Nach der Fresnel'schen Regel ist nämlich der Ausdruck $\sqrt{-1} D_0^2 \sin^2 \varphi$, auf welchen dieses Verfahren führt, gleichbedeutend mit $-D_0^2 \sin \varphi \cos \varphi$, unter φ die Phase verstanden.

selbst, „dass die Analysis, wie es scheine, gegenwärtig deren Gesetze noch nicht abzuleiten vermag“ (p. 193).

2. Behandelt man das Problem der Totalreflexion zunächst und an erster Stelle in reeller und daneben etwa abkürzungsweise auch in complexer Form, sodass das zweite Verfahren durch das erste controlirt wird, so erkennt man sofort, dass bei der obigen Auffassung gerade das Wesentliche und Charakteristische der Erscheinung gar nicht zum Ausdruck kommt. Ein selbständiger streifender Strahl erscheint dann nicht nur unwahrscheinlich, sondern einfach unmöglich.

Um die hier ausgesprochene Ansicht zu beweisen, möchte ich anknüpfen an einen mehrfach, besonders in meinem unten citirten Buche¹⁾ von mir ausgesprochenen Satz, dass nämlich die Totalreflexion nur ein specieller Fall der Metallreflexion ist. Dieser in gewissem Sinne grundlegende Satz hat auffallender Weise bisher nur wenig Beachtung gefunden; er begründet für beide Erscheinungen eine gemeinschaftliche Form sowohl der Grenzgleichungen als der entsprechenden Schwingungsausdrücke.

Die von mir schon 1878 aufgestellten Grenzbedingungen für den Uebergang des Lichtes von einem Medium in ein anderes sind seitdem von der elektromagnetischen Lichttheorie als richtig anerkannt, bez. übernommen worden.²⁾ Dieselben schreiben sich bei Beziehung auf die Fresnel'sche Vectorgrösse folgendermaassen:

$$\left. \begin{aligned} \sum \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= \frac{\partial \xi_2}{\partial t}, & \sum \frac{\partial \eta_1}{\partial t} &= \frac{\partial \eta_2}{\partial t} \\ \sum \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right) &= \frac{\partial \xi_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial x}, \\ \sum \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} \right) &= \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \end{aligned} \right\} z = 0.$$

Darin bedeuten ξ , η , ζ die Schwingungscomponenten eines Aethertheilchens in den Medien (1), bez. (2), bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt in der Trennungs-

1) E. Ketteler, Theoretische Optik, Braunschweig 1885. Dasselbst findet man auch die Angaben über meine früheren Veröffentlichungen. Die nachfolgenden Citate beziehen sich auf die Seiten des Buches und auf die Nummern der Formeln.

2) Vgl. darüber E. Ketteler, Wied. Ann. 55. p. 539. 1895.

fläche liegt, und dessen Z -Axe das Loth ist, und gelten vorstehende Bedingungen für alle Aethertheilchen von der Lage $z = 0$; die Summenzeichen umfassen die einfallende und reflectirte Welle, und t ist die laufende Zeit. Im Folgenden soll die X -Axe als in der Einfallsebene liegend und die Y -Axe als auf derselben senkrecht stehend angenommen werden.

Zu diesen Uebergangsbedingungen gesellt sich noch für jede der drei Wellen eine Incompressibilitätsbedingung von der Form:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Wir unterscheiden demzufolge die beiden Hauptfälle, dass die einfallenden Schwingungen zur Einfallsebene parallel oder senkrecht sind.

Handelt es sich zunächst allgemein um den Uebergang des Lichtes aus einem durchsichtigen (1) in ein *absorbirendes* Medium (2), so gelten für den Fall der Parallelschwingungen zufolge p. 200 meines Buches die Schwingungsausdrücke:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho^p = \mathfrak{E}_p \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - n_1 \frac{z \cos e + x \sin e}{\lambda} \right) \\ \varrho_r^p = \mathfrak{R}_p \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + n_1 \frac{z \cos e - x \sin e}{\lambda} \right) - \chi_r^p \right] \\ \xi_d = \mathfrak{D}_x e^{-\frac{2\pi}{\lambda} \kappa z} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z \mu + x n_1 \sin e}{\lambda} \right) - \chi_x \right] \\ \zeta_d = \mathfrak{D}_z e^{-\frac{2\pi}{\lambda} \kappa z} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z \mu + x n_1 \sin e}{\lambda} \right) - \chi_z \right] \end{array} \right.$$

Die beiden ersten beziehen sich auf das einfallende, bez. reflectirte Licht, die beiden folgenden auf das durchgehende Licht. T ist die Schwingungsdauer, λ die dieser entsprechende Wellenlänge im Weltäther, e der Einfallswinkel und n_1 der Brechungsexponent des Mediums (1); das absorbirende Medium ist charakterisirt durch den Extinctionscoefficienten κ und den Brechungsexponenten ν , welch letzterer mit der Hülfsgrösse μ und dem Brechungswinkel r zusammenhängt durch die Beziehung:

$$\mu = \nu \cos r = \sqrt{\nu^2 - n_1^2 \sin^2 e}.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in den betreffenden

Uebergangsbedingungen erhalten diese bei Zuziehung der Incompressibilitätsgleichungen die Form (p. 203):

$$\mathfrak{E}_p \sin \varphi + \mathfrak{H}_p \sin (\varphi - \chi_r^p) = \frac{\mathfrak{D}_x}{\cos e} \sin (\varphi - \chi_x)$$

$$\mathfrak{E}_p \sin \varphi - \mathfrak{H}_p \sin (\varphi - \chi_r^p) = \mathfrak{D}_x \frac{\nu_0^2 + \kappa_0^2}{n_1 \sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \sin (\varphi - \chi_x - \varepsilon + u).$$

In ihnen steht abkürzungsweise φ statt $2\pi t/T$, und entsprechen die Grössen ν_0 und κ_0 der senkrechten Incidenz, während ε und u weitere Variable sind.

Multiplicirt man beide Gleichungen miteinander und reducirt die rechte Seite in der auf p. 204 angegebenen Weise, so erhält man:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_p^2 \sin^2 \varphi - \mathfrak{H}_p^2 \sin^2 (\varphi - \chi_r^p) &= \frac{\mathfrak{D}_0^2}{n_1 \cos e} \left[\mu \sin^2 (\varphi - \chi_x) \right. \\ &\quad \left. - \kappa \frac{\mu^2 + \kappa^2 - n_1^2 \sin^2 e}{\nu^2 + \kappa^2} \sin (\varphi - \chi_x) \cos (\varphi - \chi_x) \right]. \end{aligned} \right.$$

Die linke Seite dieser Gleichung repräsentirt den Ueberschuss der augenblicklichen Energie der einfallenden Welle über die der reflectirten (pro Volumeneinheit); die rechte Seite, deren beide Glieder nach T , bez. $1/2 T$ periodisch sind, stellt somit die augenblickliche, in das absorbirende Medium eintretende Energie dar. Und so folgt, dass bei der Spaltung der einfallenden Welle in eine reguläre verschiedenphasige reflectirte Welle und in eine gebrochene Welle die augenblickliche Energie bald grösser, bald kleiner ist, als der Energie

$$\frac{\mu}{n_1 \cos e} \mathfrak{D}_0^2 \sin^2 (\varphi - \chi_x)$$

entsprechen würde.

Aehnliche Gleichungen erhält man, wenn man die auf die X -Axe bezüglichen Attribute $\mathfrak{D}_x, \chi_x$ durch die auf die Z -Axe bezüglichen $\mathfrak{D}_z, \chi_z$ ersetzen würde, sofern der Zusammenhang derselben sich ausdrückt durch die Beziehungen:

$$(33) \quad \mathfrak{D}_0^2 = \mathfrak{D}_x^2 \frac{\nu^2 + \kappa^2}{\mu^2 + \kappa^2} = \mathfrak{D}_z^2 \frac{\nu^2 + \kappa^2}{n_1^2 \sin^2 e},$$

$$(28) \quad \operatorname{tg} (\chi_x - \chi_z) = \frac{\kappa}{\mu}.$$

Endlich bedarf es wohl kaum eines analytischen oder geometrischen Nachweises, dass die rechte Seite der obigen

Energiegleichung auch unmöglich durch ein einheitliches Glied von der allgemeinen Form

$$B \sin^2(\varphi - \beta),$$

entsprechend einem einfachen, verschiedenphasigen gebrochenen Strahle, ersetzt werden kann.

Gehen wir indess weiter von den *augenblicklichen* Energien zur Zeit t über zu den *mittleren* Energien während der Zeiteinheit, multipliciren zu dem Ende beide Seiten der obigen Gleichung mit dt , und integriren zwischen zwei Grenzen, die um die Zeiteinheit voneinander abstehen, so ergibt sich (p. 204):

$$(35a) \quad \mathfrak{E}_p^2 - \mathfrak{R}_p^2 = \mathfrak{D}_0^2 \frac{\mu}{n_1 \cos e}$$

oder bei Einführung der (unendlich klein gedachten) äquivalenten Volumina $v_1 : v_2 = \sin e \cos e : \sin r \cos r$:

$$v_1 n_1^2 (\mathfrak{E}_p^2 - \mathfrak{R}_p^2) = v_2 v^2 \mathfrak{D}_0^2.$$

„Es hat also die auf die Zeiteinheit bezogene Gleichung der lebendigen Kräfte für absorbirende Medien die gleiche Form wie für durchsichtige“ (p. 204).

Um schliesslich auch noch den zweiten Hauptfall der senkrechten Schwingungen heranzuziehen, so hat man in die Uebergangsbedingungen die Ausdrücke einzuführen:

$$(52) \quad \begin{cases} \eta = \mathfrak{E}_s \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - n_1 \frac{x \cos e + x \sin e}{\lambda} \right), \\ \eta_r = \mathfrak{R}_s \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + n_1 \frac{x \cos e - x \sin e}{\lambda} \right) - \chi_r^s \right], \\ \eta_d = \mathfrak{D}_y e^{-\frac{2\pi}{\lambda} x z} \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \mu + x n_1 \sin e}{\lambda} \right) - \chi_y \right]. \end{cases}$$

Man erhält dann die Grenzgleichungen:

$$(53) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_s \sin \varphi + \mathfrak{R}_s \sin(\varphi - \chi_r^s) = \mathfrak{D}_y \sin(\varphi - \chi_y) \\ \mathfrak{E}_s \sin \varphi - \mathfrak{R}_s \sin(\varphi - \chi_r^s) \\ = \frac{\mathfrak{D}_y}{n_1 \cos e} [\mu \sin(\varphi - \chi_y) - x \cos(\varphi - \chi_y)]. \end{cases}$$

Durch deren Multiplication ergibt sich die Gleichung der augenblicklichen lebendigen Kräfte:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_s^2 \sin^2 \varphi - \mathfrak{R}_s^2 \sin^2 (\varphi - \chi_r^s) \\ = \frac{\mathfrak{D}_y^2}{n_1 \cos e} [\mu \sin^2 (\varphi - \chi_y) - \kappa \sin (\varphi - \chi_y) \cos (\varphi - \chi_y)], \end{array} \right.$$

bezüglich deren die für den ersten Hauptfall gezogenen Schlüsse ebenfalls gelten. Und durch Integration derselben findet man für die mittleren Energien:

$$(55) \quad \mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{R}_s^2 = \mathfrak{D}_y^2 \frac{\mu}{n_1 \cos e}.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (32b) und (53) den die variable Zeit enthaltenden Winkel φ , so erhält man *genau* die Cauchy'schen Formeln der Metallreflexion, die ihrerseits bekanntlich ohne jedes Verständniss der inneren Vorgänge durch einen glücklichen mathematischen Griff gewonnen sind. Auch lassen sich die Resultate dieser Elimination bei Anwendung complexer Formen auf eine gewisse grosse Kürze bringen (p. 207 und 210).

3. Wenden wir uns nunmehr von den absorbirenden zu den ideell durchsichtigen Medien für den Fall der Totalreflexion und setzen zu dem Ende in sämtlichen bisherigen Formeln:

$$v_0 = n_2, \quad \kappa_0 = 0, \quad \mu = v \cos r = \sqrt{v^2 - n_1^2 \sin^2 e} = 0.$$

Dadurch vereinfacht sich die Gleichung der augenblicklichen lebendigen Kräfte (34) auf die Form:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_p^2 \sin^2 \varphi - \mathfrak{R}_p^2 \sin^2 (\varphi - \chi_r^p) \\ = - \mathfrak{D}_0^2 \frac{\kappa}{n_1 \cos e} \frac{\kappa^2 - n_1^2 \sin^2 e}{\nu^2 + \kappa^2} \sin (\varphi - \chi_x) \cos (\varphi - \chi_x) \\ = + \mathfrak{D}_z^2 \frac{\kappa}{n_1 \cos e} \frac{\kappa^2 - n_1^2 \sin^2 e}{n_1^2 \sin^2 e} \sin (\varphi - \chi_x) \cos (\varphi - \chi_x). \end{array} \right.$$

Und es lässt sich schliesslich in sehr übersichtlicher Weise auch schreiben (p. 177):

$$(27b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_p^2 \sin^2 \varphi - \mathfrak{R}_p^2 \sin^2 (\varphi - \chi_r^p) \\ = - \frac{e_2}{e_1} \frac{\kappa}{n_1 \cos e} [\mathfrak{D}_x^2 \sin (\varphi - \chi_x) \cos (\varphi - \chi_x) \\ + \mathfrak{D}_z^2 \sin (\varphi - \chi_x) \cos (\varphi - \chi_x)], \end{array} \right.$$

sofern man nämlich, um gleichzeitig den Formeln Neumann's und Fresnel's gerecht zu werden, noch den Quotienten e_2/e_1

der Elasticitätsconstanten der beiden Medien einführt. Es ist dann bekanntlich ϵ_2/ϵ_1 nach Fresnel gleich 1, nach Neumann gleich n_1^2/n_2^2 ; der Extinctionscoefficient hat im jetzigen Falle den Werth (p. 175):

$$\kappa = \sqrt{n_1^2 \sin^2 e - n_2^2} \cdot 1)$$

Multiplicirt man wieder beiderseits mit dt und integrirt zwischen Grenzen, die um die Zeiteinheit auseinander liegen, so kommt diesmal einfach:

$$(28) \quad \mathfrak{E}_p^2 - \mathfrak{H}_p^2 = 0,$$

„d. h. die auf die Zeiteinheit entfallende lebendige Kraft des streifenden Strahles ist Null, folglich die des reflectirten Strahles der des einfallenden gleich. Es wird daher während einer gewissen Zeit (gleich $1/2$), während welcher die augenblickliche lebendige Kraft der einfallenden Welle die der gespiegelten übertrifft, den Aethertheilchen des zweiten Mediums Energie zugeführt, aber während der übrigen Zeit wieder entzogen, um den mittlerweile entstandenen negativen Ueberschuss zum Ausgleich zu bringen“ (p. 177). Von einem selbständigen gebrochenen Strahle, wie in den absorbirenden Medien, kann also kaum die Rede sein.

Für den zweiten Hauptfall ergeben sich analog zufolge Gleichung (54) die beiden Energiegleichungen:

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_s^2 \sin^2 \varphi - \mathfrak{H}_s^2 \sin^2 (\varphi - \chi_r) \\ = - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\kappa}{n_1 \cos e} \mathfrak{D}_y^2 \sin (\varphi - \chi_y) \cos (\varphi - \chi_y), \end{array} \right.$$

$$45) \quad \mathfrak{E}_s^2 - \mathfrak{H}_s^2 = 0.$$

Die Addition der beiden Gleichungen (27 b) und (44) würde dem allgemeinsten Falle entsprechen, dass die einfallenden Wellen nach einem beliebigen Azimuth polarisirt sind.

Eliminirt man schliesslich aus den Gleichungen (32 b) und (53) unter der Bedingung $\mu = 0$ die die Zeit enthaltende Phase φ , so erhält man bei Hinzufügung des Factors ϵ_2/ϵ_1 genau die Fresnel-Neumann'schen Formeln der Totalreflexion.

1) Vgl. auch E. Ketteler, Wied. Ann. 56. p. 56. 1895

4. Die obigen Entwicklungen datiren im wesentlichen aus dem Jahre 1878; es dürfte daher aus Vorstehendem erhellen, dass gerade das Wesen des streifenden Strahles von Anfang an mit Klarheit und Schärfe behandelt ist. Meine Ausführungen sind wohl leider seither übersehen worden. Im übrigen habe ich, einem p. 447 aufgestellten Grundsatz entsprechend, die ausschliessliche Verwendung der anschauungslosen complexen Grössen stets nach Möglichkeit zu vermeiden gesucht. Man erkennt ja in der That auch hier wieder, dass selbst bei correcter complexer Behandlung eine Reihe von wichtigen Einzelheiten für das Verständniss geradezu verloren geht.

Hr. Voigt behandelt ersichtlich die Energie des streifenden gebrochenen Strahles wie die eines gewöhnlichen Lichtstrahles; dabei ist indess nicht untersucht, wie denn die Umwandlung einer einfallenden Welle in zwei verschiedenphasige Wellen (die Complication der longitudinal-elliptischen Schwingungen fällt für den zweiten Hauptfall fort) sich thatsächlich vollzieht. Ist aber die mittlere Energie der streifend gebrochenen Welle gleich Null, so folgt nothwendig, dass, wenn ein System *endlich begrenzter* einfallender Wellen unter einem Einfallswinkel, welcher den Grenzwinkel der Totalreflexion überschreitet, in einem gegebenen Punkte die Trennungsfläche trifft, zwar die reflectirten Wellen ins Unendliche fortwandern, *die streifenden Wellen aber an den Ort der fort und fort erschütterten nämlichen Punkte der Grenzfläche fest gebunden bleiben, sodass also ihre Lostrennung von dieser Grenzfläche mathematisch wie physikalisch unmöglich ist.*

Demnach wird denn, wie mir scheint, für die bezüglichen Voigt'schen Versuche eine andere Erklärung gesucht werden müssen.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich schliesslich noch darauf hinweisen, dass sich in den seit 1884 veröffentlichten Arbeiten über Totalreflexion und Metallreflexion manche Sätze finden, die ich bereits früher (vgl. darüber die Angaben meines Werkes) aufgestellt habe, und für die mir daher die Priorität zuzommt. Dahin gehören z. B. die Sätze über die Abhängigkeit des Refractions- und Extinctionscoefficienten von der Incidenz (p. 198 der Theor. Optik), die Erweiterung des Brewster'-

schen Satzes vom Polarisationswinkel auf absorbirende Medien (p. 228 und 270), die Sätze über den Zusammenhang zwischen Refractions- und Extinctionscoefficient mit Hauptincidenz und Hauptazimuth (p. 222) u. a.

2. Eine weitere Vervollständigung der Theorie der Metallreflexion.

1. *Umformung der Energiegleichung.* Der Umstand, dass die Gleichung der lebendigen Kräfte sich bei totalreflectirenden Medien bezüglich der axialen Componenten auf eine sehr symmetrische Form bringen lässt [Gleichungen (27 b) und (44)], legte mir bei dem gegenwärtigen Anlass die Vermuthung nahe, dass Entsprechendes auch bei den absorbirenden Medien möglich sein werde.

Um dieselbe zu prüfen, gehe man aus von den Gleichungen (30) auf p. 202, denen zufolge die in das absorbirende Medium eintretende Energie die auf die Attribute der Z -Axe bezogene Form hat:

$$\frac{\mathfrak{D}_z^2}{n_1^2 \sin^2 e \cos e} [\mu \sin(\varphi - \chi_z) - \kappa \cos(\varphi - \chi_z)] \times \\ [(\nu_0^2 - \kappa_0^2) \sin(\varphi - \chi_z) - 2\nu_0 \kappa_0 \cos(\varphi - \chi_z)].$$

Man subtrahire von derselben den den senkrechten Schwingungen (Gl. 54) entsprechenden hypothetischen Ausdruck:

$$\frac{\mathfrak{D}_z^2}{n_1 \cos e} \sin(\varphi - \chi_z) [\mu \sin(\varphi - \chi_z) - \kappa \cos(\varphi - \chi_z)],$$

und bezeichne die Differenz beider durch δ . Ist die Vermuthung richtig, so muss δ , in den Attributen der X -Axe ausgedrückt, die gleiche Form erhalten. Es ist nun zunächst:

$$\delta = \frac{\mathfrak{D}_z^2}{n_1 \cos e} [\mu \sin(\varphi - \chi_z) - \kappa \cos(\varphi - \chi_z)] \times \\ \left[\frac{\nu_0^2 - \kappa_0^2}{n_1^2 \sin^2 e} \sin(\varphi - \chi_z) - \frac{2\nu_0 \kappa_0}{n_1^2 \sin^2 e} \cos(\varphi - \chi_z) - \sin(\varphi - \chi_z) \right].$$

Abkürzungsweise möge der erste eingeklammerte Faktor F_1 und der zweite F_2 genannt werden:

Für die weiteren Transformationen gelten die Ausdrücke:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\varepsilon + u) = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}}, \quad \sin(\varepsilon + u) = \frac{\kappa}{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}} \\ \cos(\varepsilon - u) = \cos(\varepsilon + u) \frac{\mu^2 + \kappa^2 + n_1^2 \sin^2 e}{\nu_0^2 + \kappa_0^2} \\ \sin(\varepsilon - u) = \sin(\varepsilon + u) \frac{\mu^2 + \kappa^2 - n_1^2 \sin^2 e}{\nu_0^2 + \kappa_0^2}. \end{array} \right.$$

$$(31) \quad \cos 2\varepsilon = \frac{\nu_0^2 - \kappa_0^2}{\nu_0^2 + \kappa_0^2}, \quad \sin 2\varepsilon = \frac{2\nu_0 \kappa_0}{\nu_0^2 + \kappa_0^2}.$$

$$(28) \quad \operatorname{tg}(\chi_x - \chi_z) = \frac{\kappa}{\mu} = \operatorname{tg}(\varepsilon + u), \quad \chi_z = \chi_x - (\varepsilon + u).$$

Bei Benutzung derselben erhält man successive:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{\nu_0^2 + \kappa_0^2}{n_1^2 \sin^2 e} \sin(\varphi - \chi_z - 2\varepsilon) - \sin(\varphi - \chi_z) \\ &= \frac{\nu_0^2 + \kappa_0^2}{n_1^2 \sin^2 e} \sin[\varphi - \chi_x - (\varepsilon - u)] - \sin[\varphi - \chi_x + (\varepsilon + u)] \\ &= \frac{1}{n_1^2 \sin^2 e} \left[\sin(\varphi - \chi_x) \cos(\varepsilon + u) \left(\frac{\mu^2 + \kappa^2 + n_1^2 \sin^2 e}{n_1^2 \sin^2 e} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \cos(\varphi - \chi_x) \sin(\varepsilon + u) \left(\frac{\mu^2 + \kappa^2 - n_1^2 \sin^2 e}{n_1^2 \sin^2 e} + 1 \right) \right] \end{aligned}$$

und sonach schliesslich:

$$F_2 = \frac{\sqrt{\mu^2 + \kappa^2}}{n_1^2 \sin^2 e} [\mu \sin(\varphi - \chi_x) - \kappa \cos(\varphi - \chi_x)].$$

Andererseits ergibt sich für den ersten Factor:

$$\begin{aligned} F_1 &= \mu \sin(\varphi - \chi_x + \varepsilon + u) - \kappa \cos(\varphi - \chi_x + \varepsilon + u) \\ &= \sqrt{\mu^2 + \kappa^2} \sin(\varphi - \chi_x). \end{aligned}$$

Ersetzt man jetzt schliesslich in dem Ausdruck für δ noch $\mathfrak{D}_x^2$ mittels der schon oben aufgeführten Beziehung (33) durch $\mathfrak{D}_x^2$, so ergibt sich definitiv:

$$\delta = \frac{\mathfrak{D}_x^2}{n_1 \cos e} \sin(\varphi - \chi_x) [\mu \sin(\varphi - \chi_x) - \kappa \cos(\varphi - \chi_x)],$$

und damit ist die Richtigkeit der obigen Vermuthung erwiesen.

Dementsprechend erhält man jetzt für einfallende Schwingungen, die unter einem beliebigen Azimuth zur Einfallsebene geneigt sind, die folgende äusserst übersichtliche und symmetrisch gebaute Energiegleichung:

$$(I) \quad \left\{ \begin{aligned} & n_1 \cos e \{ (\mathfrak{E}_p^2 + \mathfrak{E}_s^2) \sin^2 \varphi - [\mathfrak{R}_p^2 \sin^2 (\varphi - \chi_p^e) \\ & \qquad \qquad \qquad + \mathfrak{R}_s^2 \sin^2 (\varphi - \chi_s^e)] \} \\ & = \mathfrak{D}_x^2 [\mu \sin^2 (\varphi - \chi_x) - \kappa \sin (\varphi - \chi_x) \cos (\varphi - \chi_x)] \\ & \quad + \mathfrak{D}_y^2 [\mu \sin^2 (\varphi - \chi_y) - \kappa \sin (\varphi - \chi_y) \cos (\varphi - \chi_y)] \\ & \quad + \mathfrak{D}_z^2 [\mu \sin^2 (\varphi - \chi_z) - \kappa \sin (\varphi - \chi_z) \cos (\varphi - \chi_z)]. \end{aligned} \right.$$

Ihr entspricht dann für die mittleren Energien pro Zeiteinheit die Integralgleichung:

$$(II) \quad n_1 \cos e [(\mathfrak{E}_p^2 + \mathfrak{E}_s^2) - (\mathfrak{R}_p^2 + \mathfrak{R}_s^2)] = \mu (\mathfrak{D}_x^2 + \mathfrak{D}_y^2 + \mathfrak{D}_z^2).$$

Für das Innere des absorbirenden Mediums bleiben selbstverständlich die drei Summanden der rechten Seite der Gleichung (I) bestehen, nur ist ihnen der Faktor

$$e^{-\frac{4\pi}{\lambda} \kappa z}$$

hinzuzufügen, und erhält die Phase φ den Werth:

$$\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\lambda \mu + \kappa n_1 \sin e}{\lambda} \right).$$

Schliesslich habe ich dann noch, aber erst nach Beendigung der vorstehenden, ziemlich umständlichen Rechnung, zu einiger Ueberraschung gefunden, dass dieselbe Gleichung (I) sich in sehr viel einfacherer und directer Weise ableiten lässt aus einer differentiellen Uebergangsbedingung von der Form:

$$(III) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \kappa} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial \eta_1}{\partial \kappa} \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \kappa} \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \right) \\ & = \frac{\partial \xi_2}{\partial \kappa} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \kappa} \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial \kappa} \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} \end{aligned} \right\} z = 0.$$

Dieselbe ist identisch mit der in meinem Buche (p. 149) für durchsichtige Medien aufgestellten Gleichung (XI), *aber bis heute noch niemals für die Theorie der Metallreflexion und Totalreflexion verwerthet worden*. Aus der hier a posteriori gegebenen Ableitung derselben folgt offenbar nothwendig der Schluss, dass die sämmtlichen einzelnen Glieder der durchgeführten Rechnung widerspruchsfrei miteinander verträglich sind.

Weitere Transformationen mit anderen Variabeln findet man in meinem Buche auf den Seiten 187—232. Es mag an dieser Stelle nur noch auf folgendes hingewiesen werden. „Sowie wir (für den Fall der Parallelschwingungen) in $\mathfrak{D}_0$ und

$\mathfrak{D}_0^2 = \mathfrak{D}_x^2 + \mathfrak{D}_z^2$ eine gewisse virtuelle Amplitude und eine resultierende Energie kennen gelernt haben, die bei der eingetretenen longitudinal-elliptischen Bewegung an die Stelle der wirklichen Amplitude $\mathfrak{D}$ der Linearschwingungen der durchsichtigen Medien treten, so giebt es auch eine eigenthümliche virtuelle Phasenänderung X_p , die in gewissem Sinne die axial verschiedenen Phasenänderungen χ_x und χ_z zusammenfasst und sie vertreten kann“ (p. 206).

2. *Die magnetischen Schwingungscomponenten.* Der elektromagnetischen Lichttheorie zufolge hängen die Componenten α, β, γ der magnetischen Kraft mit den bisher behandelten Componenten ξ, η, ζ der elektrischen Kraft zusammen durch die Hertz'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\mu'}{v} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\mu'}{v} \frac{\partial \beta}{\partial t} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\mu'}{v} \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x},\end{aligned}$$

in welchen μ' die Magnetisirungsconstante und v die Lichtgeschwindigkeit im Weltäther bedeutet.

Mittels der oben gegebenen Ausdrücke findet man nun leicht:

$$(IV) \quad \begin{cases} \mu' \alpha = -\mathfrak{D}_y \sqrt{\mu^2 + \kappa^2} \cos(\varphi - \chi_y - (\varepsilon + u)) \\ \mu' \beta = \sqrt{\mathfrak{D}_x^2 + \mathfrak{D}_z^2} \frac{\nu_0^2 + \kappa_0^2}{\sqrt{\nu^2 + \kappa^2}} \cos(\varphi - \chi_z - 2\varepsilon) \\ \mu' \gamma = \mathfrak{D}_y n_1 \sin e \cos(\varphi - \chi_y). \end{cases}$$

Schreibt man abkürzungsweise und den elektrischen Componenten entsprechend (Δ gleich Amplitude, ψ gleich Verzögerung):

$$\begin{aligned}\mu' \alpha &= \Delta_x \cos(\varphi - \psi_x), & \mu' \beta &= \Delta_y \cos(\varphi - \psi_y), \\ \mu' \gamma &= \Delta_z \cos(\varphi - \psi_z),\end{aligned}$$

so ergeben sich zwischen den beiderseitigen Grössen folgende Beziehungen:

$$(V) \quad \begin{cases} \Delta_x = -\mathfrak{D}_y \sqrt{\mu^2 + \kappa^2} & \psi_x = \chi_y + \varepsilon + u \\ \Delta_y = \sqrt{\mathfrak{D}_x^2 + \mathfrak{D}_z^2} \frac{\nu_0^2 + \kappa_0^2}{\sqrt{\nu^2 + \kappa^2}} & \psi_y = \chi_z + 2\varepsilon \\ \Delta_z = \mathfrak{D}_y n_1 \sin e & \psi_z = \chi_y. \end{cases}$$

Die letzteren lassen sich auch auf die Form bringen:

$$\psi_y = \chi_x + \varepsilon - u = \chi_z + 2\varepsilon = X_p + \varepsilon$$

$$\psi_x - \psi_z = \varepsilon + u = \chi_x - \chi_z,$$

sodass also der Phasenunterschied der Schwingungen parallel der X - und der Z -Axe für die magnetischen und elektrischen Wellen gleich ist.

Für die Amplituden folgt weiter:

$$\sqrt{A_x^2 + A_z^2} = -\mathfrak{D}_y \sqrt{\nu^2 + \kappa^2},$$

und daher wird:

$$\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_z^2}} = -\frac{\sqrt{\mathfrak{D}_x^2 + \mathfrak{D}_z^2}}{\mathfrak{D}_y} \frac{\nu_0^2 + \kappa_0^2}{\nu^2 + \kappa^2}$$

oder auch:

$$\operatorname{tg} \Theta_m = -\operatorname{ctg} \Theta_e \frac{\nu_0^2 + \kappa_0^2}{\nu^2 + \kappa^2},$$

unter Θ_m , Θ_e die Azimuthwinkel der „restaurirten“ Schwingungen zur Einfallsebene verstanden.

Die magnetischen und elektrischen Schwingungen stehen also *genau* senkrecht aufeinander nur in vollkommen durchsichtigen Medien bei beliebiger Incidenz; sowie in absorbirenden Medien bei normaler Incidenz, *genähert* senkrecht aber auch in schwächer absorbirenden Medien bei kleineren Incidenzen.

Schliesslich erhält man für das Quadrat der vollen magnetischen Amplitude:

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \left[(\mathfrak{D}_x^2 + \mathfrak{D}_z^2) \frac{(\nu_0^2 + \kappa_0^2)^2}{\nu^2 + \kappa^2} + \mathfrak{D}_y^2 (\nu^2 + \kappa^2) \right],$$

welcher wenig symmetrische Ausdruck sich bei senkrechter Incidenz vereinfacht auf:

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = (\mathfrak{D}_x^2 + \mathfrak{D}_y^2 + \mathfrak{D}_z^2) (\nu_0^2 + \kappa_0^2).$$

Wäre noch das brechende Medium (2) völlig durchsichtig mit einem Brechungsexponenten $\nu_0 = n_2$, so liesse sich ganz kurz schreiben:

$$A = \mathfrak{D} n_2.$$

Aehnlich einfache Beziehungen gelten dann natürlich für alle in durchsichtigen Medien möglichen transversalen Wellen, und so werden denn auch für die in unserem Medium (1) einfallenden, bez. gespiegelten magnetischen und elektrischen

Wellen die Amplituden E , $\mathfrak{E}$ und P , $\mathfrak{R}$ miteinander verknüpft sein durch die Gleichungen:

$$E = \mathfrak{E} n_1, \quad P = \mathfrak{R} n_1.$$

Man erhält aus ihnen durch Division: $P/E = \mathfrak{R}/\mathfrak{E}$, d. h. der Schwächungscoefficient der Reflexion hat unter allen Umständen für die magnetischen Wellen den gleichen Werth wie für die elektrischen, und bedarf es daher zur Ableitung derselben keiner besonderen, event. schwierigen und umständlichen Rechnungsmethode. Entsprechendes gilt ebenso von der Verzögerung der reflectirten Wellen gegen die einfallenden.

Münster i. W., im Februar 1899.

(Eingegangen 4. Februar 1899.)