CAMPI ELETTROMAGNETICI PURI A STRATI PARALLELI UNIFORMI,

di UMBERTO CISOTTI.

Sono *puri*, secondo il prof. Levi-Civita ¹⁾, quei campi in cui il moto dell'elettricità avviene senza l'intervento di masse materiali e di legami cinematici fra le varie cariche.

In modo preciso, è quest'ultima la condizione che caratterizza i campi elettromagnetici *puri*, essendo ormai accettata in tutte le teorie degli elettroni l'ipotesi dell'assenza di materia ponderabile; soltanto in queste teorie le cariche non si considerano mai libere da vincoli cinematici ²⁾.

La considerazione dei campi elettromagnetici puri dà origine ad un sistema differenziale che li caratterizza analiticamente.

È interessante la ricerca di soluzioni particolari di tale sistema, poichè dalla loro esistenza dipende la possibilità di movimenti spontanei delle cariche elettriche.

Il prof. Levi-Civita stesso ha messo in luce un primo esempio ³⁾, assegnando un tipo di soluzioni che corrispondono ad un trasporto per onde piane.

Lo stesso A. ha successivamente indicata una categoria di soluzioni che corrispondono a moti piani permanenti ⁴⁾.

In una recente Memoria la Sig.^{na} Caffaratti ha studiato le soluzioni che competono a moti rigidi stazionari ⁵⁾.

1) Cfr. « Sur le mouvement de l'électricité sans liaisons ni forces extérieures ». (*Comptes Rendus*, 19 Agosto 1907, pag. 417-420); e ancora dello stesso autore « Sui campi elettromagnetici puri dovuti a moti piani permanenti ». (*Atti del R. Ist. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, 1908; Tomo LXVII, pag. 995-1010).

2) Vedi a tale proposito: Levi-Civita. « Sulla massa elettromagnetica ». (*Nuovo Cimento*, Ottobre 1907, p. 3-36; oppure *Rivista di Scienza*, 1907, Vol. II, N. IV, pag. 387-412).

3) *Comptes Rendus*, loco citato.

4) *Atti del R. Istituto Veneto*, loco citato.

5) « Sui campi elettromagnetici puri ». (*Nuovo Cimento*, Maggio 1908, pag. 369-394).

Nel presente lavoro tratto una categoria assai semplice di soluzioni aventi carattere stazionario.

Suppongo limitato da due piani paralleli l'ambiente S in cui deve svolgersi il moto; e del fascio di piani da essi individuato, considero la porzione interna ad S.

Mi propongo di cercare se sia possibile mantenere in S un campo elettromagnetico puro, libero da azioni esterne, mediante un movimento regolare di elettricità, in guisa che i parametri del campo, pur variando da piano a piano, sieno costanti sopra un medesimo piano, in altre parole su ogni piano del fascio il campo sia *uniforme*.

E la risposta è affermativa.

Tutti i parametri del campo si possono far dipendere, in modo semplice, da due funzioni H e λ , di una variabile indipendente. Esse devono soddisfare alle sole condizioni di essere finite e continue in un intervallo finito, e di più la prima di annullarsi negli estremi dell'intervallo stesso.

In ogni piano del fascio si ha una indefinita traslazione uniforme, con velocità variabile, in grandezza e direzione, da piano a piano, ma mai inferiore, in valore assoluto, alla velocità della luce.

Il campo non è generalmente trasversale rispetto alla direzione del moto delle cariche elettriche. Lo diviene nel caso particolare in cui tutte le cariche si muovano nella stessa direzione e con velocità eguale a quella della luce.

L'energia totale è (come nel caso tipico delle onde piane) metà di origine magnetica e metà di origine elettrica.

1. — *Richiamo delle equazioni caratteristiche di un campo elettromagnetico puro.*

Le equazioni caratteristiche di un campo elettromagnetico puro nel vuoto (o nei mezzi come l'aria) sono, con notazioni vettoriali manifeste,

le equazioni di Hertz:

$$(I) \quad \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = - \text{rot } \mathbf{H} - 4 \pi \mathbf{A} \rho \mathbf{v},$$

$$(II) \quad A \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{E} ,$$

$$(III) \quad \text{div } \mathbf{E} = 4 \pi \rho ,$$

$$(IV) \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 ,$$

che definiscono un campo elettromagnetico qualsiasi, e l'equazione di Lorentz ¹⁾

$$(V) \quad \rho [\mathbf{E} + A \cdot \mathbf{H} \wedge \mathbf{v}] = 0 \text{ } ^2).$$

In queste

$\mathbf{E}$ = forza elettrica,

$\mathbf{H}$ = forza magnetica,

$\mathbf{v}$ = velocità del flusso elettrico,

in un generico punto del campo che si considera; ρ rappresenta la densità della distribuzione elettrica; infine $A = \frac{1}{c}$, dove c designa la velocità della luce nell'etere.

Le equazioni (I) — (V) valgono inquantochè si intenda di riferirsi ad un sistema *sinistrorso*, altrimenti bisognerebbe cambiare segno ai rot.

2. — *Dipendenza da una coordinata. — Flusso stazionario.*
— *Comportamento qualitativo degli elementi caratteristici del campo sia entro che fuori della regione del moto.*

Supponiamo, in particolare, che il moto dell'elettricità avvenga per piani paralleli in modo che i caratteri del campo sieno gli stessi per tutti i punti di uno stesso piano, pur variando da piano a piano.

Assunti i piani del fascio come piani $z = \text{costante}$ di un sistema di riferimento cartesiano, ortogonale, *sinistrorso*, la

1) Cfr. Levi-Civita, loc. cit.

2) Il simbolo $\wedge$ designa un prodotto vettoriale, conformemente alle proposte dei signori Marcolongo e Burali-Forti. (Cfr. *Rend. del Circ. Mat. di Palermo*, T. XXIV, 1907).

ipotesi fatta viene analiticamente espressa dall'*indipendenza di tutti i parametri del campo dalle coordinate x e y* .

Supporremo ulteriormente che il comportamento del fenomeno abbia carattere stazionario.

Ciò implica che *tutto sia indipendente da t* .

Esplicitiamo le (I) — (V) in tali ipotesi. Poniamo brevemente

$$\mathbf{B} = A \mathbf{v} ,$$

con che $\mathbf{B}$ rappresenta la velocità del flusso rispetto a quella della luce.

Avremo

$$(I') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dH_y}{dz} = 4\pi\rho\beta_x , \\ \frac{dH_x}{dz} = -4\pi\rho\beta_y , \\ \beta_z = 0 ; \end{array} \right.$$

$$(II') \quad \frac{dE_x}{dz} = \frac{dE_y}{dz} = 0 ;$$

$$(III') \quad \frac{dE_z}{dz} = 4\pi\rho ;$$

$$(IV') \quad \frac{dH_z}{dz} = 0 ;$$

$$(V') \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho [E_x - H_z \beta_y] = 0 , \\ \rho [E_y + H_z \beta_x] = 0 , \\ \rho [E_z + (H_x \beta_y - H_y \beta_x)] = 0 . \end{array} \right.$$

Sia S la regione dello spazio in cui vi è effettivamente dell'elettricità, in cui cioè ρ è *generalmente* ¹⁾ diverso da zero.

Sia S limitato dai due piani

$$z = l_1 \quad \text{e} \quad z = l_2 .$$

1) Colla parola *generalmente* si intende che ρ possa annullarsi al più in punti, linee o superficie isolate.

Ammetteremo che ρ sia finita e continua entro S, senza escludere che passi bruscamente a zero attraversando i piani limiti verso l'esterno.

Fuori di S è naturalmente $\rho = 0$.

Ammetteremo ancora che la forza elettrica **E** e la forza magnetica **H** sieno finite e continue tanto in S che fuori e attraverso i piani limiti.

3. — *Integrazione del sistema (I') — (V').*

Dalle (II') e (IV') scende che E_x, E_y, H_z , hanno valore costante in tutto lo spazio.

Se si nota che per $z = \pm \infty$ il campo è a ritenersi nullo, si deve dire che

$$E_x = E_y = H_z = 0 \quad \text{in tutto lo spazio.}$$

Con ciò riescono identicamente soddisfatte le prime due delle (V').

Nei punti esterni ad S l'ultima delle (V') è identicamente soddisfatta; nei punti interni, essendo, $\rho \neq 0$, dà la relazione

$$E_z = H_y \beta_x - H_x \beta_y,$$

ed eliminando da questa e dalle (I') e (III') le incognite β_x, β_y, ρ e ponendo brevemente E al posto di E_z si ottiene

$$\frac{dE^2}{dz} = \frac{d(H_x^2 + H_y^2)}{dz},$$

dalla quale integrando e notando che

$$H_x^2 + H_y^2 = H^2,$$

si ricava la relazione

$$(1) \quad E^2 - H^2 = \text{costante} \quad \text{entro S.}$$

Dalle due prime delle (I') e dalla (III') scende che fuori di S (essendo $\rho = 0$), H_x, H_y, E hanno valore costante; ma poichè, come abbiamo già notato, per $z = \pm \infty$ il campo è a ritenersi nullo, sarà

$$H_x = H_y = E = 0 \quad \text{fuori di S.}$$

Per la continuità delle forze elettromagnetiche attraverso ai piani limiti di S saranno E ed H nulli sugli stessi. D'altra parte, per la (1), E^2 e H^2 differiscono nei punti interni per una quantità costante che, essendo nulla sul contorno, sarà nulla pure in tutti i punti interni; potremo scrivere pertanto $E = \pm H$ ovvero, potendosi sempre assumere come direzione positiva dell'asse z quella della forza elettrica,

$$(1') \quad E = H \quad \text{entro } S.$$

Possiamo concludere che l'energia totale è metà di origine elettrica e metà di origine magnetica.

Dalla terza delle (I') scende che le cariche elettriche non escono dal piano su cui giacciono inizialmente.

Inoltre, per le ipotesi ammesse, in ogni piano $z = \text{costante}$, è costante la velocità in grandezza e direzione, e ha cioè una indefinita traslazione uniforme.

La velocità varia, come ora vedremo, da piano a piano, in modo regolare, non scendendo mai, in valore assoluto, al di sotto della velocità della luce.

Infatti, moltiplicando ambo i membri della prima delle (I') per $i = \sqrt{-1}$, e sommando l'equazione risultante colla seconda, avremo

$$(2) \quad \frac{d}{dz} (H_x + i H_y) = 4 \pi \rho i (\beta_x + i \beta_y).$$

Supponiamo che H non si annulli mai nell'intervallo (l_1, l_2) , esclusi beninteso gli estremi; possiamo allora porre ¹⁾

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = e^h, \\ H_x + i H_y = H e^{i\lambda} = e^{h+i\lambda}, \\ \beta_x + i \beta_y = \beta e^{i\mu}; \end{array} \right.$$

e per l'ipotesi fatta h si mantiene finita nei punti interni del citato intervallo.

1) Se H si annullasse anche in un numero discreto di punti dell'intervallo (l_1, l_2) , basterebbe isolare tali punti, mediante degli interni. In ciascuno dei rimanenti tratti, mantenendosi H diverso da zero, sarebbero lecite le posizioni (3) e le conseguenti deduzioni.

Dalle precedenti posizioni risulta che λ e μ rappresentano rispettivamente le inclinazioni delle linee di forza magnetica e delle linee di flusso sull'asse delle ascisse.

Per le (3) e la (III'), la (2) diviene, indicando con un apice la derivazione rispetto a z ,

$$(h' + i \lambda') e^{h+i\lambda} = i h' \beta e^{h+i\mu}.$$

Non può essere $h' \cdot e^h$ identicamente nulla, poichè, per la prima delle (3), ciò implicherebbe $H = \text{costante}$ in tutto lo intervallò e quindi $\dot{H} = 0$ (dovendo H annullarsi agli estremi) il chè dobbiamo escludere poichè, le (III') e (I'), darebbero $\rho = 0$ entro S , contro l'ipotesi fondamentale; perciò sarà lecito dividere ambo i membri della precedente per $h' e^{h+i\lambda}$ otterremo

$$1 + i \frac{\lambda'}{h'} = i \beta e^{i(\mu - \lambda)}.$$

Eguagliando le parti reali ed i coefficienti dell'immaginario, si hanno dalla precedente le due relazioni seguenti

$$\begin{cases} \beta \sin(\mu - \lambda) = -1, \\ \beta \cos(\mu - \lambda) = \frac{\lambda'}{h'}. \end{cases}$$

Da queste, quadrando e sommando, si ha

$$(4) \quad \beta^2 = 1 + \left(\frac{\lambda'}{h'}\right)^2,$$

e dividendo membro a membro

$$(5) \quad \operatorname{tg}(\mu - \lambda) = -\frac{h'}{\lambda'}.$$

La (4) ci dice appunto che *la velocità del flusso non è mai inferiore, in valore assoluto, a quella della luce.*

La (5), che per la (4), può anche scriversi

$$(5') \quad \operatorname{tg}(\mu - \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}},$$

ci dà l'inclinazione $\mu - \lambda$ delle linee di flusso sulle linee di forza magnetica.

Da essa risulta che, in generale, il campo non è trasversale rispetto alla direzione delle cariche. Infatti l'ipotesi di un campo trasversale richiederebbe che fosse dappertutto $\beta^2 = 1$; nel qual caso, dalla (4), si deduce $\lambda = \text{costante}$ e quindi $\mu = \text{costante}$; dunque il campo è trasversale allora e solo allora che tutte le cariche si muovono nella stessa direzione, colla velocità della luce.

Riportando nella (4) al posto di h la sua espressione $\log H$, desunta dalla prima delle (3), avremo

$$(4') \quad \beta = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda'}{d \log H} \right)^2}$$

formola che ci dà il valore assoluto della velocità in funzione del valore assoluto e dell'inclinazione della forza magnetica.

Riassumendo

Sieno H e λ due funzioni di z , finite e continue nello intervallo (l_1, l_2) di cui la prima si annulli agli estremi.

Se si prende a considerare il campo S limitato dai piani $z = l_1$, $z = l_2$, si possono esprimere, per mezzo di H e di λ , tutti i parametri del campo nel modo seguente:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x = H \cos \lambda, \quad H_y = H \sin \lambda, \quad H_z = 0; \\ E_x = E_y = 0, \quad E_z = E = H; \\ \rho = \frac{1}{4\pi} \frac{dH}{dz}; \\ \beta = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda'}{d \log H} \right)^2}; \\ \beta_x = \beta \cos \mu, \quad \beta_y = \beta \sin \mu, \quad \beta_z = 0, \\ \text{essendo } \mu \text{ definita dalla} \\ \operatorname{tg}(\mu - \lambda) = \frac{-1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}. \end{array} \right.$$

Queste formole valgono nei punti interni ad S , incluso il contorno..

All'esterno di S, dove non c'è elettricità, è

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0.$$

Esempio. — Sieno

$$z = +l \quad \text{e} \quad z = -l$$

i due piani che limitano S, e poniamo, ad es.

$$H = l^2 - z^2, \quad \lambda = z^2.$$

Come si vede, per $z = \pm l$, H si annulla.

Portando nelle (6) le precedenti espressioni, abbiamo

$$H_x = (l^2 - z)^2 \cos z^2, \quad H_y = (l^2 - z^2) \sin z^2;$$

$$E = l^2 - z^2;$$

$$\rho = \frac{-z}{2\pi};$$

$$\beta = \sqrt{1 + (l^2 - z^2)^2},$$

$$\mu = z^2 - \arctg \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} = z^2 - \arctg \frac{1}{l^2 - z^2}.$$

Dalla precedente espressione di β , se si tiene presente che entro S è

$$|z| \leq l,$$

si deduce che il massimo valore della velocità è $\beta = \sqrt{1 + l^4}$, ed è raggiunto dalle cariche che si muovono nel piano ($z = 0$) equidistante da quelli che limitano lo spazio S. Su questi piani limiti le cariche si muovono colla velocità della luce.

Come si vede tutti gli elementi che caratterizzano il campo S si mantengono regolari in S e soddisfanno al contorno e fuori di S alle condizioni volute.