Zu der Abhandlung von Herrn Roland Weitzenböck: „Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie“¹⁾.

Von

W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

1. Herr Weitzenböck geht von dem Satze aus: „Ist F der Flächeninhalt eines ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b, c , so ist stets

$$(I) \quad \frac{|F|}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{12} \sqrt{3},$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur bei gleichseitigen Dreiecken.“

Er gibt mehrere elementare Beweise dieses Satzes und macht sodann von ihm eine Reihe bemerkenswerter Anwendungen.

2. Die Ungleichung (I) habe ich in trigonometrischer Gestalt — zugleich unter Hinzufügung der unteren Grenze Null — angegeben im Enzyklopädieartikel III AB 9 „Elementargeometrie“ von M. Zacharias (ausgegeben am 13. August 1918), S. 974, Anm. 322a, unter Nr. (2). Ich habe mich dort mit dem Hinweise begnügt, daß die Doppelungleichung als eine direkte Folge der elementaren Grundtatsache (A) erscheint, „daß die durch ihr Verschwinden das Paar der imaginären Kreispunkte in Linienkoordinaten u_i bestimmende quadratische Form K als Summe zweier Quadrate darstellbar ist, so daß K für reelle Gerade (u) niemals negativ wird und den Wert Null nur für die unendlichferne Gerade g_∞ annimmt“.

Es wird sich empfehlen, hier einige Worte zur Erläuterung hinzuzufügen.

3. Ich bediene mich folgender Bezeichnungen. Es seien, für $i = i, k, l = 1, 2, 3$ die a_i die Seiten des Dreiecks, die α_i dessen Innenwinkel, $s_i = \sin \alpha_i$, $c_i = \cos \alpha_i$, $s_{kl} = \sin(\alpha_k - \alpha_l)$, $\pi_s = s_i s_k s_l$, $\pi_c = c_i c_k c_l$, endlich R der Radius des Umkreises.

¹⁾ Math. Zeitschr., 5 (1919), S. 137–146.

Es soll zuvörderst der Ausdruck $\frac{F}{\sum_i a_i^2}$ in trigonometrische Gestalt umgesetzt werden.

Da $a_i = 2R s_i$, so ergibt sich einmal:

$$(1) \quad \sum_i a_i^2 = 4R^2 \sum_i s_i^2;$$

andererseits, da $|F| = \frac{1}{2} a_i a_k s_l$:

$$(2) \quad |F| = 2R^2 \pi_s.$$

Die Division von (1) und (2) liefert daher:

$$(3a) \quad \frac{|F|}{\sum_i a_i^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi_s}{\sum_i s_i^2}.$$

Mit Rücksicht auf die Identität:

$$(4) \quad \sum_i s_i^2 = 2(1 + \pi_c)$$

läßt sich der Relation (3a) auch die für Anwendungen zumeist zweckmäßigere Form erteilen:

$$(3b) \quad \frac{|F|}{\sum_i a_i^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi_s}{1 + \pi_c}.$$

Nun lautet meine Doppelungleichung (l. c.):

$$(I') \quad 0 < \frac{\pi_s}{1 + \pi_c} \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

wo das rechtsstehende Gleichheitszeichen (Fall des Maximums) nur für ein gleichseitiges Dreieck gilt, und die untere Grenze Null nur für ein uneigentliches (zusammengeklapptes) Dreieck, wo irgendein Winkel α_i gegen einen gestreckten konvergiert.

Auf Grund von (3b) geht der rechte Teil der Doppelungleichung (I') unmittelbar über in (I); überdies tritt in (I) die Null als untere Grenze hinzu.

4. Nunmehr soll (I') direkt aus der Grundtatsache (A) hergeleitet werden. Bei Zugrundelegung des Dreiecks als Koordinatendreieck lautet die Kreispunkteform K :

$$(5) \quad K(u) \equiv u_i^2 + u_k^2 + u_l^2 - 2u_i u_k c_l - 2u_i u_l c_k - 2u_k u_l c_i,$$

und es gilt für jede reelle Gerade (u):

$$(6) \quad K(u) \geq 0,$$

wo das Gleichheitszeichen nur für die $g_\infty(s_i)$ erfüllt ist.

Man setze für die u_i einmal die Werte c_i ein, so kommt:

$$(7) \quad K(c_i) \equiv \sum_i c_i^2 - 6\pi_c \geq 0,$$

oder auch mit Rücksicht auf die Identität (4) — die damit gleichwertig ist, daß die Determinante von $K(u)$ verschwindet — die Doppelungleichung [l. c. Formel (1)]:

$$(8) \quad 0 < 1 + \pi_c \leq \frac{9}{8}.$$

Das rechterhand in (7), oder auch in (8), auftretende Gleichheitszeichen gilt nur, wenn die c_i den s_i proportional sind, d. i. für ein gleichseitiges Dreieck; gegen die untere Grenze Null konvergiert $1 + \pi_c$ nur dann, wenn irgendeiner der drei Faktoren c_i von π_c gegen -1 konvergiert, die beiden andern gegen $+1$, d. h. wenn das Dreieck in ein uneigentliches ausartet.

Andererseits wähle man in (6) die u_i gleich den $s_{kl} = \sin(\alpha_k - \alpha_l)$ (i, k, l zyklisch zu nehmen), so ergibt sich:

$$(9) \quad K(s_{kl}) \equiv 4\{(1 + \pi_c)^2 - 3\pi_s^2\} \geq 0,$$

und damit die rechte Seite der Doppelungleichung (I').

Das Gleichheitszeichen rechts in (9), wie in (I'), tritt offenbar ein, wenn die $s_{kl} = s_k c_l - s_l c_k$ verschwinden, d. i. wieder für ein gleichseitiges Dreieck. Aber auch nur dann. Denn der Ansatz $s_k c_l - s_l c_k = \varrho s_i$ führt nach Elimination der s zur Bedingungsgleichung: $\varrho\left\{\varrho^2 + \sum_i c_i^2\right\} = 0$, deren einzige reelle Lösung in ϱ eben $\varrho = 0$ ist.

Zur unteren Grenze Null von $\frac{\pi_s}{1 + \pi_c}$ in (I') gelangt man ohne weiteres, wenn man $1 + \pi_c$ ersetzt durch $\frac{1}{2} \sum_i s_i^2$, und dann alle s_i gegen Null konvergieren läßt, also wieder für ein uneigentliches Dreieck.

Bei der Umrechnung von $K(s_{kl})$ in die rechte Seite von (9) bedarf man lediglich der Additionstheoreme des Sinus und Kosinus; diese gehen aber wieder unmittelbar aus der Grundtatsache (A) hervor, indem sie damit gleichwertig sind, daß die ersten Minoren der Determinante von $K(u)$ den Quadraten resp. Produkten der s_i proportional sind.

Somit erscheint die Doppelungleichung (I'), wie es sein muß, als eine invariante Eigenschaft des Dreiecks gegenüber der Kleinschen Hauptgruppe. Diese Eigenschaft (I') ist um so bemerkenswerter, als Zähler und Nenner von $\frac{\pi_s}{1 + \pi_c}$ sowohl ihr Maximum wie ihre untere Grenze *gleichzeitig* annehmen.

Aus (I') und (8) folgt noch für π_s die Einschließung [l. c. Formel (I')²⁾]:

$$(10) \quad 0 < \pi_s \leq \frac{3}{8} \sqrt{3}.$$

5. Mit Rücksicht auf (1) und (2) erhält man noch einzeln für Zähler und Nenner des Quotienten (I) die Ungleichungen:

$$(11) \quad 0 < \frac{|F|}{R^2} \leq \frac{3}{4} \sqrt{3},$$

$$(12) \quad 0 < \frac{\sum a_i^2}{R^2} \leq 9.$$

Die einfachste geometrische Deutung von (I') ergibt sich wohl mit Hilfe des „Brocardschen Winkels“ ω , der als spitzer Winkel bestimmt ist durch:

$$(13) \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\pi_s}{1 + \pi_r}.$$

Dieser Winkel ω hat bekanntlich die Eigenschaft, daß wenn man ihn in zyklischer Folge — das eine Mal in positivem, das andere Mal in negativem Sinne — in jeder Ecke des Dreiecks an die anstoßende Seite im Innern anträgt, die drei Transversalen sich in je einem Punkte treffen; diese beiden Punkte sind die „Brocardschen Punkte“, die nebst dem Winkel ω in der neueren Dreiecksgeometrie eine führende Rolle spielen. Vermöge (13) geht dann (I') über in:

$$(14) \quad 0 < \omega \leq 30^\circ.$$

Eine Reihe weiterer analoger Grenzeinschließungen, die alle der Grundtatsache (A) entstammen, habe ich an der zitierten Stelle mitgeteilt.

Königsberg i. Pr., im November 1919.

²⁾ An der zitierten Stelle ist die rechte Seite von (10) durch einen Druckfehler entstellt.

(Eingegangen am 3. Dezember 1919.)