Das Vertauschen der Risse.

Von Karl Mack in Prag.

I.

Wie im Auf- und Grundrißverfahren wird auch in zentraler und schiefer Projektion ein Punkt des Raumes durch ein orientiertes Punktpaar der etwa lotrecht gedachten Zeichenebene Π dargestellt, wenn man, wie dies beim Zeichnen technischer Gegenstände üblich ist, den Punkt samt seinem Grundriß zentral oder schief auf Π projiziert. Dadurch werden die Punkte des R^3 auf die Mannigfaltigkeit orientierter Punktpaare (Bildpaare) der Zeichenebene abgebildet, von denen jedes auf einem Strahle eines Parallelstrahlenbüschels der Zeichenebene liegt.¹⁾ Im folgenden wird gezeigt werden, daß einer Vertauschung der Risse in allen drei Fällen eine harmonische Kollineation des abgebildeten Raumes entspricht, die im besonderen in schiefe oder normale Symmetrie übergeht. Die Frage nach Gebilden, die gegenüber einer Vertauschung ihrer Risse invariant bleiben, führt zu den merkwürdigen „involutorischen Rissen“. Als Transformationen, welche der Raum erleidet, wenn man seine Normalrisse als Schrägriß und Schräggrundriß beziehungsweise Zentralriß und Zentralgrundriß deutet, ergeben sich perspektive Affinitäten beziehungsweise zentrische Kollineationen.²⁾

II.

Allgemeines über das Ändern der Orientierung von Bildpaaren.

Durch das Ändern der Orientierung werden zwei Räume R und $\bar{R}$ derart auf einander bezogen, daß jedem Punkte p in R ein Punkt $\bar{p}$ in $\bar{R}$, jeder durch p gehenden Geraden oder Ebene eine durch $\bar{p}$ gehende Gerade oder Ebene entspricht. R und $\bar{R}$ sind demnach kollinear.³⁾ Eine nochmalige Änderung der Orientierung

¹⁾ E. Müller, „Die darstellende Geometrie als eine Versinnlichung der abstrakten projektiven Geometrie“. Jhrsb. Dtsch. Math.-Ver. 14, 1905, S. 569.

²⁾ Herr E. Müller hat in den zitierten Jahresberichten schon darauf hingewiesen (S. 571), daß die verschiedenen räumlichen Figuren, die zu demselben „linearen Abbild“ gehören, untereinander projektiv verwandt sind.

³⁾ Nach der Staudtschen Definition. Geometrie der Lage, Nürnberg, 1847, S. 60, § 10.

führt $\bar{R}$ wieder in R über. Die Kollineation ist also involutorisch, daher zentrisch und die Gegenebenen liegen vereinigt. Da die Punkte der Koinzidenzebenen in allen Fällen einer Änderung der Orientierung ihrer Bilder gegenüber invariant sind, ist sie stets Involutionsebene. Jedes Gebilde, dessen Punkte sich nach Paaren ordnen lassen, die entsprechende Paare dieser Involution sind, wird durch eine Vertauschung seiner Risse nicht geändert.

III.

Das Vertauschen von Zentralriß und Zentralgrundriß.

In der Abbildung durch Zentralriß und Zentralgrundriß fällt die Grundrißebene Γ mit der Koinzidenzebene und Involutionsebene zusammen. Die Zentralrisse aller Punkte der unendlich fernen Ebene Ω überdecken das ganze Zeichenfeld Π , während ihre Zentralgrundrisse im Horizont liegen. Durch Vertauschen der Risse wird Ω in die durch das Auge o gehende zu Γ parallele Ebene $\bar{\Omega}$ übergeführt, die zugleich Flucht- und Verschwindungsebene der involutorischen Kollineation ist. Da aber in einer involutorischen Kollineation der Abstand des Zentrums von der Involutionsebene von den in der Zentralebene vereint liegenden Gegenebenen halbiert wird, folgt, daß das Zentrum i von Γ um die doppelte Augenhöhe absteht. Da der durch o gehende und zu Γ normale Strahl O gegenüber der Vertauschung seiner Risse, die im unendlich fernen Punkt der zu $[\Pi \Gamma]$ normalen Richtung zusammenfallen, invariant bleibt, ist er ein Involutionstrahl und demnach ein Ort für das Zentrum i . Somit ergibt sich der

Lehrsatz 1: Einer Vertauschung I^z von Zentralriß und Zentralgrundriß entspricht eine harmonische Kollineation S^z (Charakteristik — 1) der durch die ursprünglichen Risse dargestellten Gebilde. Involutionsebene ist die Grundebene Γ , das Involutionzentrum liegt lotrecht über¹⁾ dem Auge und besitzt von Γ einen doppelt so großen Abstand als dieses. Gebilde, die durch S^z in sich selbst transformiert werden, bleiben gegenüber der Vertauschung I^z invariant.

IV.

Die Form der Risse von Gebilden, die gegenüber der Vertauschung I^z ihrer Zentral- und Zentralgrundrisse invariant bleiben.

Die Involutionstrahlen S : Da der Zentralriß und Zentralgrundriß von i im unendlich fernen Punkte der zu $[\Pi \Gamma]$ normalen Richtung zusammenfallen und die Risse der Punkte $[S\Gamma]$

¹⁾ Das Auge soll über der Grundebene liegend vorausgesetzt werden.

gleichfalls inzidieren, folgt: Die Risse der Involutionstrahlen fallen zusammen und stehen zu $[\Pi \Gamma]$ senkrecht.

Punktpaare: Jedes Paar einander in der Involution $\mathfrak{I}^z$ entsprechender Punkte a, b auf dem Involutionstrahle S trennt i und den Punkt $c \equiv [S \Gamma]$ harmonisch. Da aber beide Risse von i unendlich fern liegen, bilden die Paare $a^z b^z$ und auch die Paare $a'^z b'^z$ eine Symmetrie mit dem Zentrum $c^z \equiv c'^z$. Durch Vertauschung I^z der Risse wird das Punktpaar ab im Raume nicht geändert, doch wird a in b und b in a übergeführt. Dies ist nur dann möglich, wenn a^z mit b'^z und b^z mit a'^z inzidiert. Daraus folgt: Zentralrisse und Zentralgrundrisse aller auf einem Involutionstrahl S liegenden Punkte bilden die Paare einer symmetrischen Involution $\mathfrak{S}$ auf einem zu $[\Pi \Gamma]$ normalen Träger, deren Zentrum der Riß $c^z \equiv c'^z$ des Koinzidenzpunktes c ist. Umgekehrt stellen die Paare einer symmetrischen Involution auf einem zu $[\Pi \Gamma]$ normalen Träger die Bildpaare von Punkten einer auf einem Involutionstrahl liegenden Reihe dar. Zwei Punkte a und b , für welche a^z mit b'^z und a'^z mit b^z zusammenfallen, sind entsprechende Punkte der Involution $\mathfrak{I}^z$. Ihre Bilder sollen Involutionspaare genannt werden. Die Paare $a^z b^z$ und auch die Paare $a'^z b'^z$ bilden je eine symmetrische Involution, die mit $\mathfrak{S}$ identisch ist.

Die Ebenen des Bündels i : Die Bildpaare a^z, a'^z der Mannigfaltigkeit aller Punkte a einer Ebene α des Bündels i bilden sich wie die Punkte jeder Ebene als perspektive Affinität $\mathfrak{A}$ ab. Jede Bündelebene α schneidet die räumliche involutorische Kollineation $\mathfrak{I}^z$ in einer ebenen involutorischen Kollineation $\mathfrak{H}$ (Harmonie), mit dem Zentrum i , in der a und b ein Paar entsprechender Punkte seien. Da aber a'^z mit b^z zusammenfällt, ergibt sich, daß $\mathfrak{A}$ sich mit dem Zentralriß $\mathfrak{H}^z$ von $\mathfrak{H}$ deckt; da $\mathfrak{H}$ harmonisch ist, ist auch $\mathfrak{H}^z$ und $\mathfrak{A}$ harmonisch und da i^z in den unendlich fernen Punkt der zu $[\Pi \Gamma]$ normalen Richtung fällt, folgt: Die Bildpaare der Punkte einer dem Bündel i angehörigen Ebene α bilden sich als schiefe Symmetrie ab, deren Richtung zu $[\Pi \Gamma]$ normal, deren Achse der Zentralriß A_1^z der Grundspur A_1 ist. Da jeder Punkt e der Bildspur A einer solchen Ebene seinen Grundriß e' in der Grundlinie $G \equiv [\Pi \Gamma]$ hat, andererseits aber e, e' bezüglich A_1^z schief symmetrisch liegen, muß A_1^z jede Strecke ee' halbieren. Für die Spuren der Bündelebenen gilt somit

$$tg \hat{A} G = 2 tg \overset{\wedge}{A_1^z} G.$$

Durch eine perspektive Affinität, deren Richtung zu $[\Pi \Gamma]$ senkrecht ist, werden stets 2 Ebenen dargestellt. Will man eine einzige Ebene darstellen, muß man die Felder orientieren. Ist die Affinität aber symmetrisch, stellt sie eine einzige Ebene dar.

Kurven: Eine Kurve, die sich in der Involution $\mathfrak{I}^z$ selbst entspricht, liegt auf einem Kegel mit dem Scheitel i oder

in einer durch i gehenden Ebene. Auf jeder Mantellinie gibt es zu einem Punkte a der Kurve einen Punkt b , für den $b^z \equiv a^z$ und $b'^z \equiv a^z$ ist. Daraus folgt:

Der Zentralriß und der Zentralgrundriß R^z , R'^z einer Raumkurve R , die sich in der Verwandtschaft $\mathfrak{S}^z$ selbst entspricht, fallen zusammen. Die Ordnungsstrahlen schneiden aus $R^z \equiv R'^z$ Involutionspaare aus. Umgekehrt stellen zwei zusammenfallende „involutorisch liegende“ Kurven der Zeichenebene die Risse einer in J^z sich selbst entsprechenden Raumkurve dar. Zu diesen Kurven gehören z. B. alle Raumkurven von der Ordnung $2n$, die sich als Schnitte eines aus i beschriebenen Kegels n -ter Ordnung mit einer Fläche zweiter Ordnung ergeben, für welche Γ Polarebene in bezug auf den Pol i ist. Bezeichnen wir die von einem Involutionspaare begrenzte Sehne als Ordnungssehne, so ergibt sich der Satz: Liegen die Risse einer Raumkurve R involutorisch vereinigt, so stellen die Mitten der Ordnungssehnern die inzidierenden Risse der in der Grundebene liegenden Basis des aus i beschriebenen Kegels dar, dessen Leitlinie R ist. Unendlich kleine Ordnungssehnern sind koinzidierende Risse der Punkte $[R\Gamma]$. Ist der Ort der Sehnennitten gerade, so artet der Kegel durch i in eine Bündelebene aus und R ist eben.

Flächen: Durch $\mathfrak{S}^z$ geht der Schein aus o an eine in $\mathfrak{S}$ sich selbst entsprechende Fläche φ in den φ gleichfalls berührenden und zu Γ normalen Zylinder über.¹⁾ Die beiden wahren Umrisse sind daher Kurven, die einander in der Verwandtschaft $\mathfrak{S}^z$ entsprechen, woraus folgt: Die zum Zentralriß und Zentralgrundriß gehörigen scheinbaren Umrißkurven einer in der Verwandtschaft $\mathfrak{S}^z$ sich selbst entsprechenden Fläche φ liegen involutorisch vereinigt.

Bezeichnet Z eine räumliche Zentralkollineation, die Γ zur Hauptebene, die durch i gehende Parallelebene zur Fluchtebene und ein auf ($i\ o$) beliebig liegendes Zentrum besitzt, so gilt: Jede Reliefperspektive von der Art Z führt ein zu Γ orthogonal-symmetrisches Gebilde in ein Gebilde über, das in $\mathfrak{S}^z$ sich selbst entspricht, dessen Risse also involutorisch vereint liegen.

V.

Das Vertauschen von Schrägriß und Schrägggrundriß.

Die in III und IV abgeleiteten Sätze gelten mit der Abänderung, daß o unendlich fern liegt. Demnach ergibt sich aus dem Lehrsatz 1

Lehrsatz 2: *Einer Vertauschung von Schrägriß und Schrägggrundriß entspricht eine schiefe Symmetrie $\mathfrak{S}^s$ der durch die ursprünglichen Risse dargestellten Gebilde. Symmetrieebene ist die Grundebene Γ . Der Symmetriestrahle eines Punktes liegt mit seinem schrägprojizierenden Strahl in einer Vertikalebene und die Tangenten der*

¹⁾ Denn jede φ berührende Fläche geht wieder in eine φ berührende Fläche über.

Neigungswinkel dieser Strahlen mit Γ verhalten sich wie 2:1.¹⁾ Gebilde, die durch $\mathfrak{S}^s$ in sich selbst transformiert werden, bleiben gegenüber einer Vertauschung ihrer Risse invariant.

VI.

Die Form der Risse von Gebilden, die gegenüber einer Vertauschung von Schrägriß und Schräggrundriß invariant bleiben.

Wie im Abschnitt IV erkennt man: Schrägriß und Schräggrundriß der Symmetriestrahlen fallen zusammen und stehen zu $[\Pi\Gamma]$ normal. Die Schrägrisse a^s und die Schräggrundrisse a'^s aller auf einem Symmetriestrahle S liegenden Punkte a bilden die Paare einer symmetrischen Involution $\mathfrak{S}$ auf einem zu $[\Pi\Gamma]$ normalen Träger, deren Zentrum der Riß des Koinzidenzpunktes ist. Für entsprechende Punkte a, b der Symmetrie $\mathfrak{S}^s$ fällt a^s mit b'^s und a'^s mit b^s zusammen und umgekehrt: Zwei Punkte a, b , für welche a^s mit b'^s und a'^s mit b^s zusammenfallen, sind entsprechende Paare der Symmetrie $\mathfrak{S}^s$; ihre Bildpaare sollen „Symmetriepaare“ genannt werden. Die Paare $a^s b^s$ und auch die Paare $a'^s b'^s$ bilden je eine symmetrische Involution, die in beiden Fällen mit $\mathfrak{S}$ identisch ist. Die Bildpaare von Punkten einer zur Symmetrierichtung parallelen Ebene α bilden sich als schiefe Symmetrie ab, deren Richtung senkrecht $[\Pi\Gamma]$, deren Achse A_1 der Schrägriß der Grundspur A_1 von α ist. Für die Spuren solcher Ebenen gilt:

$$tg \widehat{AG} = 2 tg \widehat{A_1^s G},$$

wobei $G = [\Pi\Gamma]$. Der Schrägriß und Schräggrundriß R^s, R'^s einer Raumkurve R , die durch die Symmetrie $\mathfrak{S}^s$ in sich selbst transformiert wird, fallen zusammen. Die Ordnungsstrahlen schneiden auf ihnen Symmetriepaare aus. Umgekehrt stellen je zwei zusammenfallende involutorisch liegende Kurven der Zeichenebene eine in $\mathfrak{S}^s$ sich selbst entsprechende Kurve dar. Liegen die Risse R^s, R'^s einer Raumkurve R involutorisch vereinigt, so stellen die Mittelpunkte der Ordnungssehnern die indizierenden Risse der in der Grundebene liegenden Basis des mit der Symmetrierichtung beschriebenen Zylinders dar, dessen Leitkurve R ist.²⁾ Die zu dem Schrägriß und Schräggrundriß gehörigen scheinbaren Umrißkurven einer in der Verwandtschaft $\mathfrak{S}^s$ sich selbst entsprechenden Fläche φ liegen involutorisch vereinigt.

¹⁾ Das Verhältnis der Kubikinhalte der durch die ursprünglichen zu den durch die vertauschten Risse dargestellten Körper ist konstant. Schwerpunkte gehen wieder in Schwerpunkte über.

²⁾ Sie sind also die Bilder der Schatten von Punkten der Kurve R für die Symmetrierichtung als Lichtrichtung.

VII.

Das Vertauschen der Normalrisse I^n .

Die Koinzidenzebene Γ ist Involutionsebene der entsprechenden Transformation $\mathfrak{S}^n$; da aber Punkte von Ω wieder in Punkte von Ω transformiert werden, ist $\mathfrak{S}^n$ eine Affinität, und da sie involutorisch ist, eine Symmetrie. Der unendlich ferne Punkt der zu Γ normalen Richtung, für den das Verhältnis seiner Tafelabstände gleich 1 ist, ist der einzige außerhalb Γ liegende Punkt, der gegenüber $\mathfrak{S}^n$ invariant bleibt; er ist also der Bündelscheitel. Somit ergibt sich

Lehrsatz 3: *Einer Vertauschung I^n der Normalrisse entspricht eine Spiegelung $\mathfrak{S}^n$ an der Koinzidenzebene Γ der durch die ursprünglichen Risse dargestellten Gebilde. Zu Γ symmetrische Gebilde sind gegenüber I^n invariant.*

VIII.

Die Form der Risse von Gebilden, die gegenüber einer Vertauschung ihrer Normalrisse invariant bleiben.

Alle im Abschnitte VI ausgesprochenen Sätze gelten wörtlich, wenn wir statt

Schrägriß und Schräggrundriß	Aufriß und Grundriß
$a^s a'^s \mathfrak{S}^s b^s b'^s$ Grundspur A_1	$a'' a' \mathfrak{S}^n b'' b'$ Koinzidenzspur ($\alpha \Gamma$)
A_1^s	$[\alpha \Gamma]' \equiv [\alpha \Gamma]''$
$R^s R'^s$	$R'' R'$
Grundebene	Koinzidenzebene
Grundlinie G	Rißachse X_{12}

setzen. Überdies läßt sich hinzufügen: Die Symmetriestrahlen besitzen Spurelemente, die nach der Umklappung der Grundrißebene in die Aufrißebene — kurz in der Zeichenebene inzidieren. Da jede zu Γ normale Ebene ein Büschel von Symmetriestrahlen enthält, folgt: In der Zeichenebene fallen die Spuren solcher Ebenen in eine Gerade. Alle zu Γ normalen, also in $\mathfrak{S}^n$ sich selbst entsprechenden Ebenen werden somit auf die Strahlen des in der Zeichenebene liegenden Strahlenfeldes abgebildet.

IX.

Das Vertauschen S von Spur- und Fluchtelementen und die hiedurch bewirkte Transformation $\mathfrak{S}$.

In der Darstellung durch Spur- und Fluchtelemente ist der Strahl als Element aufzufassen und zwei Strahlen G und H , für welche die Verbindungslinie ($g_u^z h_u^z$) ihrer Fluchtpunkte der Verbindungslinie (gh) ihrer Spurpunkte parallel ist, stellen sowohl einen

Punkt $[GH]$ als auch eine Ebene (GH) dar. Durch die Vertauschung S werden zwei Räume derart auf einander bezogen, daß einem Punkte p ein Punkt $\bar{p}$ einer durch p gehenden Geraden oder Ebene eine durch $\bar{p}$ gehende Gerade oder Ebene entspricht. $\mathcal{S}$ ist daher eine Kollineation und da durch eine nochmalige Vertauschung S der Raum $\bar{R}$ in R übergeführt wird, ist $\mathcal{S}$ involutorisch und daher zentrisch. Da für die Sehstrahlen Spur- und Fluchtpunkte zusammenfallen, sind sie gegenüber $\mathcal{S}$ invariant, woraus folgt, daß das Auge o auch das Zentrum von $\mathcal{S}$ ist. Die Fluchtpunkte aller Strahlen von Π liegen in der unendlich fernen Geraden dieser Ebene, während die Spurpunkte das Feld Π ganz überdecken. Da die Spurpunkte aller Strahlen von Ω auf der unendlich fernen Geraden von Π liegen, während die Fluchtpunkte das Feld Π ganz überdecken, folgt: $\mathcal{S}$ transformiert involutorisch Π in Ω . Π ist also Zentralebene, woraus sich weiter ergibt, daß die Involutionsebene die durch das Spiegelbild von o bezüglich Π gelegte Parallelebene ist.

Lehrsatz 4: Einer Vertauschung von Spur- und Fluchtelementen entspricht eine involutorische Kollineation der durch die ursprünglichen Risse dargestellten Gebilde, deren Zentrum das Zentrum der Perspektive, deren Involutionsebene die zur Bildebene im Abstand der Augdistanz gelegte Parallelebene ist, die mit dem Auge zu entgegengesetzten Seiten von Π liegt.

X.

Die durch die Deutung N^z von Auf- und Grundriß als Zentralriß und Zentralgrundriß bewirkte Transformation $\mathcal{N}^z$.

Die Rißebenen sollen beibehalten, das Auge beliebig gewählt werden. Aus den gleichen Gründen wie in den vorigen Abschnitten ist zu erkennen, daß $\mathcal{N}^z$ eine Kollineation ist.¹⁾ Da sie die Punkte der Bildebene Π ungeändert läßt, ist diese die Kollineationsebene und es existiert notwendig ein Bündel selbstentsprechender Strahlen mit dem Scheitel k . Für den vom Auge o normal zu Π gelegten Strahl H (Hauptstrahl), der durch seine Risse eindeutig bestimmt ist, indiziert H'' mit H^z und H' mit H'^z ; er ist also ein Bündelstrahl und enthält das Zentrum k . Dieses hat von Π den Abstand $\delta - \mathfrak{h}$ (δ sei die Augdistanz, $\mathfrak{h}$ die Augenhöhe) und liegt zwischen o und Π , denn für diesen Punkt ist $k'' \equiv k^z$ und $k' \equiv k'^z$, also k gegenüber $\mathcal{N}^z$ invariant. Punkte der unendlich fernen Ebene werden durch $\mathcal{N}^z$ in Punkte übergeführt, die in der Verschwindungsebene der Perspektive liegen; daher ergibt sich

Lehrsatz 5: Faßt man Auf- und Grundriß beliebiger Gebilde als Zentralriß und Zentralgrundriß in bezug auf die gleichen Rißebenen und ein beliebig gewähltes Auge o mit der Distanz δ und

¹⁾ Die Koinzidenzspur im Auf- und Grundrißverfahren wird zur Grundspur in der Darstellung durch Zentralriß und Zentralgrundriß.

der Höhe h auf, so entspricht dies einer zentrischen Kollineation $\mathfrak{N}$ der durch die ursprünglichen Risse dargestellten Gebilde, deren Kollineationsebene die Bildebene Π , deren Fluchtebene die Verschwindungsebene der Perspektive ist und deren Zentrum auf dem Hauptstrahl der Perspektive mit o auf derselben Seite von Π liegt und von Π um die Strecke $(b - h)$ absteht.

XI.

Die durch die Deutung $\mathfrak{N}^s$ von Auf- und Grundriß als Schrägriß und Schräggrundriß bewirkte Transformation $\mathfrak{N}^s$.

Da $\mathfrak{N}^s$ nur ein Sonderfall von $\mathfrak{N}^z$ für ein unendlich fernes o ist, ergibt sich unmittelbar

Lehrsatz 6: *Faßt man Auf- und Grundriß beliebiger Gebilde als Schrägriß und Schräggrundriß in bezug auf die gleichen Rißebenen und einen beliebigen schrägprojizierten Strahl S mit den Richtungskosinussen λ, μ, ν auf, so entspricht dies einer perspektiven Affinität der durch die ursprünglichen Risse dargestellten Gebilde, deren Affinitätsebene Π ist und deren Richtung R immer so liegt, daß die Richtung (RS) zu Π normal ist.*

Bezeichnen wir die Koordinaten der durch die Normalrisse dargestellten Punkte mit $x y z$, die der transformierten Punkte mit $\xi \eta \zeta$ in bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem, dessen Ebenen die Kreuzriß-Aufriß- und Grundrißebene beziehungsweise sind, so läßt sich an einer Skizze unschwer erkennen, daß

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + y \frac{\lambda}{\nu} \\ \eta &= y \frac{\mu}{\nu} \\ \zeta &= y + z. \end{aligned} \right\}$$

Somit kann der Satz 6 ergänzt werden durch den

Lehrsatz 7: *Der Modul von $\mathfrak{N}^s$ ist $\frac{\mu}{\nu}$ und die ersten Tafelabstände der durch die Schrägrisse dargestellten Punkte gleichen der Summe der ersten und zweiten Tafelabstände der durch die Normalrisse dargestellten.*

Schwerpunkte werden wieder in Schwerpunkte transformiert.